HÓDSÁGI KRISTÓF

Kevert stratégiák az evolúciós játékelméletben

Témavezető: Dr. Szabó György

Absztrakt:

A dolgozat célkitűzése, hogy megismertesse az olvasót az evolúciós játékelmélet jelentőségével, lehetőségeivel és bevezető jelleggel annak módszertanával. Ennek a célnak megfelelően egy konkrét problémán, a kevert stratégiával bővített társadalmi dilemmákon keresztül fogjuk vizsgálni elsősorban a modell fizikai jelentőségét és vonatkozásait. A matematikai eszköztár és a terület eddigi eredményeinek nagy vonalakban való ismertetése után közöljük azokat az adatokat, melyeket a konkrét fizikai rendszeren futtatott szimulációk eredményeztek, és összevetjük azokat az elvárásokkal. Miután megmutattuk az eddig vizsgált és az általunk kibővített rendszerek közötti hasonlóságokat, röviden rátérünk egy olyan modellre, mely közelebb áll az evolúcióbiológusok által használtakhoz. Itt még élesebben megmutatkozik a kevert stratégiák jelentősége, valamint lényegi eltérést találunk a három- és a kétstratégiás rendszerek viselkedése között.

Kulcsszavak: *evolúciós játékelmélet, társadalmi dilemmák, potenciáljátékok, kevert stratégia, logit szabály, imitációs dinamika, evolúciósan stabil stratégia*

1. Bevezetés

A játékelmélet XX. század eleji megszületése óta egyike a leginkább széleskörűen alkalmazott matematikai modelleknek: a közgazdaságtól elkezdve a biológián és a szociológián át a fizikáig számos tudományterület használja ezt az eszköztárat. Lényege, hogy olyan helyzeteket modellez, ahol a játékosok nyereményét a saját döntésükön kívül játékostársaik döntései is befolyásolják. Különösen érdekesek azok az élethelyzetek, amikor a játékosok optimális döntésének kiválasztását a játékostársak ellenérdekeltsége akadályozza. Az evolúciós játékelmélet ilyen rendszereket vizsgál számos egyszerűsítő feltétel mellett.

A sokszereplős játékok tárgyalását matematikailag nagyban egyszerűsíthetjük, ha az egészet párkölcsönhatások összegeként tárgyaljuk, melyek tulajdonságait egy nyereménymátrix írja le[1]. A mátrix a játékosok által választható tiszta stratégiák „következményét”, nyereményét tartalmazza. Az evolúciós játékelméleti modellekben[2],[3] a játékosok ugyanazt a stratégiát használják játékostársaikkal szemben egy adott időben és az így kapott nyereményeiket növelhetik azzal, hogy egyszerre vagy egymást véletlen sorrendben követve egy másik tiszta stratégiát választanak.

A játékelméleti modellekben a játékosok képviselhetnek embert, növényt, állatot vagy baktériumot, és ennek megfelelően szolgálhatnak elméleti háttérként a közgazdasági, biológiai és szociológiai jelenségek számszerű vizsgálatánál. Az említett tudományterületek fejlődését a statisztikus fizika eszközei jelentős mértékben segítették, mert már évtizedek óta használunk olyan módszereket, amelyek segítségével meghatározható egy sokrészecskés rendszer makroszkopikus viselkedése, ha ismerjük a részecskék közötti párkölcsönhatást. Különösen szoros kapcsolat létezik a statisztikus fizika és az evolúciós játékelméleti modellek között, ha a kölcsönhatást úgynevezett potenciál játékkal írjuk le. Ismert, hogy az összes szimmetrikus kétstratégiás mátrixjáték ilyen. A következőkben áttekintjük a mátrixjátékok matematikai leírását és a fizikai vonatkozásokat egy konkrét példa, a kétstratégiás társadalmi dilemmák tárgyalásával.

2. Matematikai eszköztár

Általános szimmetrikus párkölcsönhatás esetén a kölcsönhatást jellemző $n \times n$ -es mátrix alakja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

[1] NEUMANN J. MORGENSTERN O, .: *A Theory of Games and Economic Behaviour.* Princeton, 1944, Princeton University Press.

[2] *Nowak M.A.: Evolutionary Dynamics. Cambridge, MA, 2006, Harvard University Press.*

[3] Szabó G., Fáth G.: Evolutionary games on graphs. Phys. Rep., 2007. 446. sz. 97-216. o.

Ennek jelentése, hogy a_{ij} az az elem, mely az egyik játékos i-dik, a másik játékos j-dik döntési opciójának választásakor írja le előbbi nyereményét a játék során. A kölcsönhatást, vagy játékot azért nevezzük szimmetrikusnak, mert mindkét játékos számára ugyanezen **A** mátrix adja meg a lehetséges kimeneteleket. A játékelméleti modellek lényege, hogy a játékosok nyereményét saját döntésük mellett partnerüké is befolyásolja, ezért célszerű definiálni a stratégia fogalmát, ami azt adja meg, hogy a játékos az adott *n* lehetőség közül melyiket választja. Mátrixos jelölésben ezt egy *n* dimenziós oszlopvektorként foghatjuk fel, melynek tiszta stratégiák esetén csak egy nem 0 eleme van:

$$\boldsymbol{s}_x, \boldsymbol{s}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezek után egyszerűen felírhatjuk azt a nyereményt, amit x és y játékos kap a játék végén, hiszen az csak a saját stratégiájától, a társáétól, valamint a mátrixtól függ:

$$u_x = \boldsymbol{s}_x^T \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{s}_y, \text{ és } u_y = \boldsymbol{s}_y^T \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{s}_x .$$

A játékelmélet esszenciális része, hogy két független döntés határozza meg a végkimenetelt. Éppen ezért, ha matematikai állításokat szeretnénk tenni, elengedhetetlen, hogy definiáljunk olyan egyensúlyi helyzeteket, melytől valamilyen szempontból nem érdemes, nem logikus eltérni, tehát várhatóan ezt választják majd a játékosok. Egy ilyen bevezethető fogalom a Nash-egyensúly. Akkor beszélünk Nash-egyensúlyról, ha a döntés egyoldalú megváltoztatásával semelyik játékos sem képes növelni a saját nyereményét, tehát az önző és racionális játékosok erre a stratégiapárra jutnak el. Megmutatható, hogy minden párkölcsönhatásban létezik legalább egy Nash-egyensúly[4].

Egy másik, főképp a biológiában alkalmazott egyensúlyfogalom az evolúciósan stabil stratégia (ESS) fogalma. Amennyiben a játékoso-

[4] Nash J.: Equilibrium points in n-person games. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1950. 36. sz. 48-49.o.

kat egyedekkel azonosítjuk, ahol mindenki a szomszédjaival verseng a túlélésért, akkor egy ESS-t választó populációval szemben nem tud sikeres lenni egy „mutáns", aki eltér az ESS-től[5].

Az evolúció egyik fontos tulajdonsága, hogy időben zajlik, tehát az evolúciós játékelméletben a résztvevők nem folyton egy stratégiát játszanak, időről időre változtatnak rajta, hogy jobban járjanak. Nem mindegy azonban, milyen matematikai szabály szerint váltanak, mert ez nagyban befolyásolja a rendszer viselkedését. Lehetséges például determinisztikus[6], vagy sztochasztikus[7] alapon történő utánzása a jól teljesítő szomszédnak. A sztochasztikus dinamika, az úgynevezett logit szabály a fizikai rendszerekkel mutat párhuzamot, a játékok egy meghatározott csoportja (potenciáljátékok) esetén a statisztikus fizikából ismert jelenségeket figyelhetünk meg[8,9,10]. A determinisztikus, vagyis imitációs dinamika ehhez képest a biológiai modellekkel mutat rokonságot, egy populáció evolúcióját írja le.

A munka során a térben oly módon helyeztük el a játékosokat, hogy egy négyzetrács pontjaiba kerüljenek, tehát mindenkinek négy szomszédja volt, akikkel játékokat folytatott. Mindkét fentebb említett evolúciós dinamika mellett vizsgálat alá került a rendszer, $n=3$ különböző választható stratégiával. A nyereménymátrix paraméterezésében a kétstratégiás társadalmi dilemmák jelölésrendszerét használtuk, ezért, valamint a fizikai analógiák mélyebb megértése végett a következőkben tekintsük át a potenciáljátékok elméletét, továbbá az ezek egy speciális eseteként kezelhető kétstratégiás társadalmi dilemmákat.

[5] Smith J.M., Price G.R.: The logic in animal conflict. Nature, 1973. 246. sz. 15-18. o.

[6] Nowak M.A., May R.M.: The spatial dilemmas of evolution. *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 1993. 3. sz. 73-78. o.

[7] Szabó G., Tőke C.: Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice. *Phys. Rev. E.* 1998. 58. sz. 69-73. o.

[8] Blume L.E.: The statistical mechanics of strategic interactions. *Games Econ. Behav.* 1993. 5. sz. 387-424. o.

[9] Blume L.E.: The statistical mechanics of best-response strategy revision. *Games Econ. Behav.* 1995. 11. sz. 111-145. o.

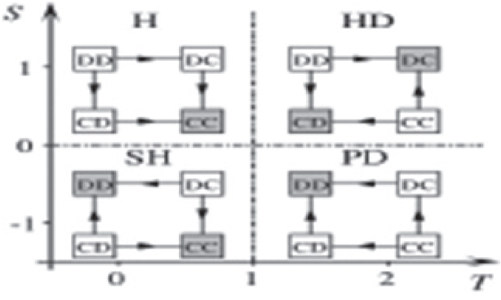
[10] Monderer D., Shapley L. S.: Potential games. *Games Econ. Behav.* 1996. 14. sz. 124-143. o.

2.1. Kétstratégiás társadalmi dilemmák, potenciáljátékok

A legismertebb társadalmi dilemma a fogolydilemma, melynek lényege, hogy olyan helyzetet teremt, melyben a két szereplő választás elé kerül: együttműködnek, vagy versengenek (élősködnek). A játék mátrixa olyan, hogy az önző és racionális játékosoknak a Nash-egyensúly azt diktálja, hogy élősködjenek, holott külön-külön és együttesen is jobban járnának, ha mindketten az együttműködést választanák. A 2×2-es játékok általános társadalmi dilemma jelölésében a nyereménymátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T \\ S & 1 \end{pmatrix},$$

ahol a két paraméter: T (temptation, kísértés az élősködésre) és S (sucker's payoff, a balek nyereménye) értéke adja meg, hogy milyen jellegű lesz a játék. A nyeremények és a stratégiák megnevezése a fogolydilemma játékra vonatkozik, de ugyanezekkel a paraméterekkel más játékokat is leírhatunk. A Nash-egyensúlyok szempontjából négy lényegi lehetőséget különböztetünk meg: H (harmónia), SH (stag hunt, szarvasvadászat), HD (hawk-dove, héja-galamb játék) és PD (prisoner's dilemma, fogolydilemma), melyek mind egy-egy szemléletes háttértörténetről kapták a nevüket. Hogy átláthatóbb legyen, hogy melyik játék milyen stratégiákat részesít előnyben, célszerű ábrázolni őket a T-S paraméterek értékeitől függően:



1. ábra*: Négy folyamábra a játékok jellemzésére a T-S paramétersíkon. Szaggatott vonalak választják el a tartományokat, szürke négyzetek jelzik a Nash-egyensúlyokat. A stratégiák: D-élősködés, C-együttműködés*

A folyamábrák csúcsai (szürke vagy fehér négyzetek) stratégiapárok: megmutatják, hogy milyen választással él a két játékos. Az irányított élek a lehetséges egyoldalú stratégiaváltásokat ábrázolják és a Nash-egyensúlyok logikáját követik: minden stratégiapártól nyíl mutat oda, ahova az adott játékosnak érdemes váltania, mert növelheti nyereményét. Azok a négyzetek, amelyekből nem mutat ki nyíl, egyensúlyiak lesznek, mert nem érdemes váltani róluk. Látható, hogy sehol sem alakul ki olyan helyzet, hogy irányított hurok jelenne meg a folyamábrán. Ez a tulajdonság általánosan nem igaz a játékokra, csak akkor, ha az adott nyereménymátrix egy potenciáljátékhoz tartozik.

Az eddig szemléletesen bevezetett kritériumot a potenciál létezésére érdemes formálisan is felírni. A matematikai feltétel egy olyan **V** mátrix[11],[12] létezése, amire teljesül az alábbi egyenlőség:

$$V_{kj} - V_{ij} = A_{kj} - A_{kj} \quad \forall i, j, k \, .$$

Ez azt fejezi ki, hogy ha az első játékos *k*-dik stratégiája helyett az *i*-diket választja, nyereményváltozása megegyezik a potenciál megváltozásával. A potenciál létezéséhez hasonló feltételnek kell teljesülnie a második játékos stratégiaváltásaira is. Ebből következik, hogy szimmetrikus játéknál **V** is szimmetrikus, ha létezik. Kétstratégiás esetben a játék szimmetriájából következik a potenciál létezése[13],[14], nagyobb n esetén viszont ez nem feltétlenül igaz.

Szemléltetésként nézzük meg a kétstratégiás társadalmi dilemmák potenciálmátrixát, ami az eddigiek alapján algebrai úton levezethető:

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0 & S \\ S & 1 + S - T \end{pmatrix} .$$

A potenciálmátrix sok szempontból praktikus leírása a játéknak. Először is, mivel a nyereményváltozásokat tartalmazza, összefüggés-

[11] Blume L.E.: The statistical mechanics of strategic interactions. *Games Econ. Behav.* 1993. 5. sz. 387-424. o.

[12] Monderer D., Shapley L. S.: Potential games. *Games Econ. Behav.* 1996. 14. sz. 124-143. o.

[13] Monderer D., Shapley L. S.: Potential games. *Games Econ. Behav.* 1996. 14. sz. 124-143. o.

[14] Galam S., Walliser B.: Ising model versus normal form game. *Physica A*. 2010. 389. sz. 481-489. o.

be hozható a változtatás kifizetődését vizsgáló Nash-egyensúllyal: a mátrix legnagyobb eleme mindenképpen Nash-egyensúly lesz. Másrészt pedig ennek segítségével definiálhatunk egy olyan mennyiséget, ami párhuzamba állítható a klasszikus fizikából ismert potenciális energiával, és abban segít, hogy a játékelméleti modellt fizikai rendszerekre alkalmazzuk:

$$U(S) = \frac{1}{2}\sum_{x,\delta_x} s_x \cdot V s_{x+\delta_x},$$

ahol $S = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$, tehát mind az N db játékos stratégiaválasztását tartalmazza. Mindenkire összegezve a saját stratégiája és a szomszéd stratégiája által kiválasztott elemét a potenciálmátrixnak megkapjuk a rendszer teljes energiáját. Ez teljesen analóg a negatív potenciális energia fogalmával a fizikában. A fent leírt, potenciálmátrix által kitüntetett Nash-egyensúly pedig a sokrészecskés rendszerek alapállapotával állítható párhuzamba.

A statisztikus fizikában az alapállapot általában a nulla hőmérsékletű rendeződést jelenti, tehát célszerű itt is bevezetni valami módon a rendszer hőmérsékletét. Ezt az időfejlesztésen belül tesszük meg, ugyanis a fizikailag fontosabb logit szabály (sztochasztikus dinamika) úgy épül fel, hogy a játékosok számára nem magától értetődő a kifizetődőbb stratégiára váltani: minél nagyobb a hőmérséklet (zaj), annál kevésbé fog mindenki az optimális stratégia felé törekedni, megjelenik a rendezetlenség a modellben. Ez matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy az s'_x stratégiára való váltás *valószínűségét* adjuk meg az alábbi képlettel:

$$w(s'_x) = \frac{e^{\frac{\tilde{u}(s'_x)}{K}}}{\sum_{s_x} e^{\frac{\tilde{u}(s_x)}{K}}},$$

ahol a nevezőben lévő összeg az összes lehetséges stratégián végigmegy (tehát a legjobb kereséséhez minden opciót figyelembe vesz), és a zaj mértékét *K* adja meg. A képlet azt az elvárásunkat is teljesíti, hogy nulla hőmérsékleten alapállapotú legyen a rendszer, mert ilyenkor biztosan a legjobb stratégiát választja majd minden játékos. Általánosan is belátható, hogy az egyes stratégiaprofilok valószínűségét ennél a dinamikai szabálynál a Boltzmann-eloszlás adja[15], tehát a játékelméleti modell potenciáljátékoknál tökéletesen alkalmas statisztikus fizikai rendszerek leírására. Ezen felül még egy érdekes párhuzamot találunk: a kétstratégiás társadalmi dilemma és a mágnesesség egyik elméleti modellje között. Ennek részleteire helyszűke miatt itt nem térünk ki, de fontos megjegyeznünk, hogy a játék által definiált $U(S)$ mennyiség itt a mágneses energiával állítható párhuzamba, a *D* és *C* stratégiák pedig felfelé vagy lefelé álló mágneses spineknek feleltethetők meg.

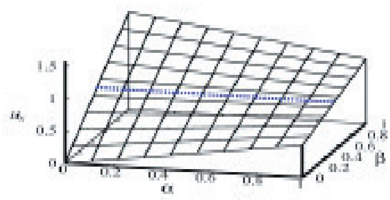
2.2 Kevert stratégiák és biológiai rendszerek

Az eddigiekben feltettük, hogy a játékosok mindig *tiszta stratégiát* választanak, tehát az adott döntési lehetőségeikből előre leszögezett módon választanak egyet. A játékelméleti modellekben azonban nagyon fontos szerepet játszanak a *kevert stratégiák* is. Annak a játékosnak a döntése, aki kevert stratégiát alkalmaz, sosem ennyire meghatározott. Egy lehetséges mód például, hogy minden fogolydilemma játék előtt feldob egy pénzérmét, és amennyiben fejet dobott, élősködni fog, ha írást, akkor együttműködik. Ez a véletlen faktor a maga számára és ellenfele számára is kiszámíthatatlanságot hoz a játékba. Ez egy nagyon nagy jelentőségű változtatás, mert bizonyos játékokban „nincs jó döntés", nem létezik tiszta Nash-egyensúly, csak kevert. Ilyen többek között a közismert kő-papír-olló játék is, ahol bármelyik választásomat legyőzheti az ellenfél, és megmutatható, hogy a legjobban akkor járok, ha azonos esélyt adok mindegyik lehetőségemnek (például egy dobókocka segítségével). Ellenfelemre ugyanez igaz, ennek a játéknak ez a (kevert) Nash-egyensúlya.

Nem kell azonban elszakadnunk a kétstratégiás dilemmáktól, hogy a kevert stratégiák fontosságát szemléltetni tudjuk. A matematikai képletek mellőzésével most egy ábrán mutatjuk meg azt, hogy

[15] Blume L.E.: The statistical mechanics of strategic interactions. *Games Econ. Behav.* 1993. 5. sz. 387-424. o.

a héja-galamb tartományban hogyan jelennek meg a kevert Nash-egyensúlyok is.



2. ábra: *Az egyik játékos nyereménye annak függvényében, hogy a két résztvevő milyen valószínűséggel működik együtt a játékban, a paraméterek T=1,5 és S=0,5 értékeinél*

Azt láthatjuk, hogy amennyiben *x* játékos α valószínűséggel kooperál, míg *y* β eséllyel működik együtt, akkor hogyan alakul előbbi nyereménye. A kék szaggatott vonal azt jelöli, hogy ha a második játékos éppen ½ (a konkrét érték függ T, S paraméterektől) valószínűséggel választja az együttműködést, akkor az első mindegy miképp dönt, nem növelheti nyereményét. Ez éppen a Nash-egyensúly definíciója. Pontos számolásokkal megmutatható, hogy a héja-galamb mellett a csak a szarvasvadászat tartományban jelenik még meg kevert Nash-egyensúly, de ezek mégsem teljesen ekvivalensek, amint az alábbiakban látni fogjuk.

A kevert stratégiát a fentiekben valószínűségi alapon értelmeztük, de lehetőség van másképpen is megfogalmazni: statisztikai módon, ami a biológiai modellekhez áll közelebb. Eszerint egy populáció az evolúciós versengésben akkor játszik kevert stratégiát, ha bizonyos, a keverési valószínűségekkel meghatározott hányada választja az egyik, a maradék a másik stratégiát (kétstratégiás játékoknál). Ez a megfogalmazás, illetve az ehhez kapcsolódó evolúciósan stabil stratégia fogalma különbözteti meg a HD és az SH tartományok kevert egyensúlyait. Amint korábban ismertettük, egy stratégia evolúciósan stabil, ha az azt választó populációval szemben bármilyen mutáció, eltérés életképtelen. Jelen esetben ez csak a héja-galamb tartományban lesz igaz a kevert egyensúlyi helyzetre.

A matematika nyelvén a fenti kritérium úgy fogalmazható meg, hogy az α^* egyensúlyi keverési valószínűségre és valamely β valószínűséggel kevert „mutánsra" $u_y(\alpha^*,\beta) < u_x(\alpha^*,\alpha^*)$ és

$u_y(\alpha^*,\beta) < u_x(\alpha^*,\beta)$, tehát a többségi populáció önmagával

játszva is jobban teljesít, és a mutánssal szemben sem veszít.

Ez az egyensúlyfogalom meghatározó szerepet tölt be azoknál a játékoknál, ahol az időfejlődés nem sztochasztikus, hanem determinisztikus, tehát az imitációs szabály esetén[16], amint ezt később látni fogjuk.

Az eddigiekben áttekintettünk minden olyan fogalmat, ami a kibővített evolúciós játékelméleti probléma megértéséhez szükséges lehet. A következőkben a matematikai alapoktól elkezdve röviden áttekintjük a vizsgált probléma fizikával való párhuzamait, majd a kevert stratégia jelentőségét a biológiai rendszerekhez közelebb álló tárgyalásmódban.

3. Kevert stratégiával bővített társadalmi dilemma

Ahhoz, hogy egy konkrét esetben kicsit részletesebben is megismerhessük az evolúciós játékelmélet módszereit, most tekintsünk egy olyan játékot, melyben három stratégia közül lehet választani! Az első kettő legyen a társadalmi dilemmából már ismert *D* és *C* stratégiák, a harmadik pedig egy olyan tiszta stratégia, mely az előző kettő kevert stratégiájaként áll elő. Jelöljük ezt *M*-mel (mixed, kevert), ekkor az a játékos, aki az *M* stratégiát választja, az minden játékban α valószínűséggel fog együttműködni, $1-\alpha$ eséllyel pedig élősködni. Azért célszerű így hozzáadni a kevert stratégiát a rendszerhez, mert matematikailag ez egyszerűen kezelhető: felírhatjuk ez alapján a játékot jellemző nyereménymátrixot, melynek természetesen az eddig is meglévő *T* és *S* értékei mellett már α is a paramétere lesz.

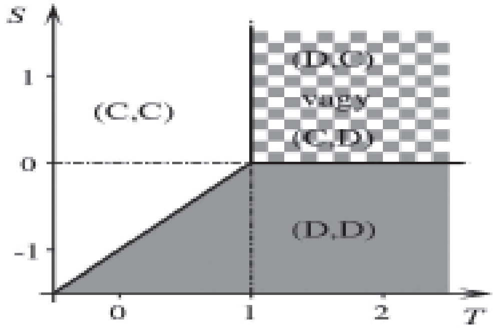
Az áttekinthetőség végett most nem szerepeltetjük a számoláso-

[16] Cressman R.: *Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games*. Cambridge MA, 2003, MIT Press.

kat, mindenesetre rövid úton belátható, hogy a társadalmi dilemmák ily módon kibővített változata tetszőleges α érték mellett potenciáljáték marad. Ez lényegi eredmény, mert ebből következik, hogy a fizikai párhuzamok itt is vizsgálhatók, és felírható a potenciálmátrix:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & S & \alpha S \\ S & 1-T+S & S+\alpha(1-T) \\ \alpha S & S+\alpha(1-T) & \alpha^2(1-T-S)+2\alpha S \end{pmatrix}.$$

Megfigyelhetjük, hogy a bal felső sarok teljesen megegyezik a kétstratégiás potenciálmátrixszal. Ezek után érdekes kérdés, hogy mennyiben változtatja meg a rendszert az a tény, hogy hozzávettünk egy kevert stratégiát. Azt várjuk, hogy komoly különbséget jelent, elvégre egy olyan stratégiával bővítettük a rendszert, ami bizonyos tartományokban Nash-egyensúly. Ehhez képest a potenciálmátrix maximális elemei által kitüntetett Nash-egyensúlyokban semmilyen eltérést nem találunk a kétstratégiás esethez képest: bármilyen α értéket választunk, a legnagyobb mátrixelem mindig a bal felső 2×2-es részen van. Ez annyit jelent, hogy ez a játékelméleti modell majdnem ugyanazt a fizikai rendszert írja le, amit a kétstratégiás esetben már megismertünk. Amint a 3. ábra is mutatja, az alacsony hőmérsékletű rendeződésben nem jelenik meg a kevert stratégia, csak a két eddig is meglévő.



3. ábra*: Az alapállapotok kialakulása attól függően, hogy a T-S sík melyik pontján vagyunk. Nincs eltérés a kétstratégiás rendszerhez képest: nincs α-függés és a kevert stratégia teljesen hiányzik a fázisdiagramról*

Ezek a számolások ugyanakkor csupán a nulla hőmérsékletű határesetre vonatkoztak. Mivel bővítettük a rendszert a korábbihoz képest, ezért magasabb hőmérsékleteken a kevert stratégiának is meg kell jelennie, így érdemes megvizsgálni, ez pontosan hogyan történik meg. Mivel ott már egzakt számolásokat nem tudunk végezni, térjünk át a számítógépes szimulációk tárgyalására.

3.1. Szimulációk logit szabálynál – a fizikai rendszer

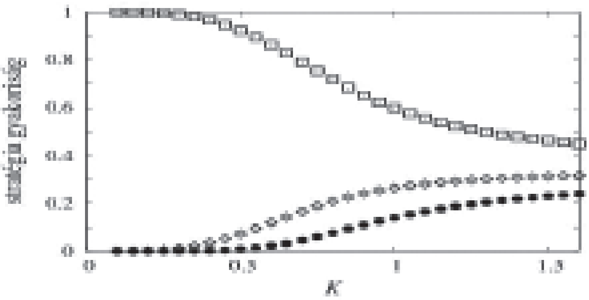
Azokban a fizikai rendszerekben, ahol a részecskék és kölcsönhatások nagy száma miatt egzakt számítások nem készíthetők, bevett módszer a számítógépes szimulációk alkalmazása. A korábbiakban, amikor az időbeli fejlődésről volt szó, minden alkalommal a stratégiaváltás *valószínűségét* említettük. Ahhoz, hogy ezt kezelni tudjuk, egy olyan számítógépes programra van szükség, ami tartalmaz véletlenszám-generátort. Az ilyen szimulációs programokat Monte Carlo (MC) szimulációknak nevezik.

Ahogy az előző fejezet végén említettük, a szimulációkra azért van szükség, hogy magasabb hőmérsékleteken is tudjunk állítást tenni a rendszerről, ahol a zaj mértéke már lehetővé tesz némi rendezetlenséget. A várakozásunk az, hogy a hőmérséklet növelve egy idő után már minden rendezettséget nélkülözni fog a rendszerünk. Ennek fizikai tartalma az, hogy alacsony hőmérsékleten nincs nagy hőmozgás, a rendszer energiája majdnem tisztán mágneses. Ahogy növeljük a hőmérsékletet, a hőmozgás egyre inkább felülírja ezt a mágneses rendet, míg végül teljesen eltünteti. Ennek pontos lefolyása a hőmérséklet függvényében egy négyzetrácson egzaktul ismert[17] tehát a szimulációk eredményeit összevethetjük a számolt megoldással, így ellenőrizhetjük, mennyire pontos a játékelméleti megközelítés által adott leírás a fizikai rendszerekre. Ennek részleteibe itt nem megyünk bele, de megtalálhatók a jelen munka alapjául szolgáló TDK-dolgozatban[18]. Szemléltetésképpen ugyanakkor egy ábrát részletes magyarázattal közzéteszünk. A 4. ábrán az látható, hogy egy rendezett alapállapotból kiindulva (a paraméterek olyanok, hogy a 3. ábra tisztán fehér tarto-

[17] Onsager L.: Crystal statistics. I. a two-dymensional model with an order-disorder transition. *Physical Review.* 1944. 65. sz. 117-149. o.

[18] Hódsági K.: Evolúciós társadalmi dilemma játék vizsgálata négyzetrácson egy harmadik kevert stratégiával. TDK-dolgozat.

mányába esnek) hogyan jelennek meg nem teljesen optimális stratégiák, ahogy a zajt növeljük. Bár a rendezetlenség nő, a stratégiák aránya magas hőmérsékleten sem egyezik meg teljesen, tehát valamiféle rendezettség megmarad végig: ennek az az oka, hogy a jelen paraméterértékek olyan fizikai rendszerrel teszik analóggá a modellünket, melyben van külső mágneses tér, ami energiai szempontból előnyben részesíti a vele párhuzamosan álló spineket (a 4. ábrán ez a *C* stratégia).



4. ábra: *Egyes stratégiák gyakorisága a négyzetrácson a hőmérséklet függvényében. Üres négyzettel az együttműködők, üres rombusszal a kevert stratégia ($\alpha = 0{,}5$), teli körrel pedig az élősködők aránya van feltüntetve. T=0,7, S=-0,6.*

Az előző esetben a 3. ábrának egy olyan területét választottuk ki, ahol alapállapotban homogén (csak *C*) rendeződés van. Ez fizikailag olyan, mintha ferromágneses anyagot vizsgálnánk. Ehhez képest a 3. ábra jobb felső sarka minőségileg más, itt sakktábla-szerű rendeződést látunk, ennek fizikai analógiája az antiferromágnesesség. Az antiferromágneses rend eltűnése egészen más lefolyást követ, mint amit ferromágneses esetben láttunk. Ez a fentinél több érdekességet tartogat, de a megértéséhez jóval több részlet szükségeltetne, mint ami az eddigiekben ismertetésre került, így ennek kifejtését mellőzzük (az érdeklődők azonban egy mindenki számára megérthető leírását a mágnesség és a közösségi döntéshozás között fennálló kapcsolatnak az idézett cikkben megtalálják[19]), helyette áttérünk a biológiai rendszerekhez közelebb álló imitációs dinamikára.

[19] Jávor M., Geszti T.: Kollektív döntéseket hozni - hogyan látja ezt a szociofizika. *Fizikai Szemle.* 2016. 66. (2) sz. 59-64. o.

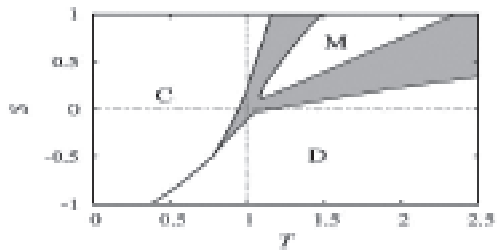
3.2. Szimulációk imitációs szabálynál – a biológiai rendszer

Az imitációs dinamika egy igazán jelentős eltérést tartalmaz a logit szabályhoz képest: egy játékos azért, hogy nyereményét növelje, nem variálhatja tetszőlegesen a stratégiáját, hanem csak olyanra válthat, ami jelen van a rendszerben. Ez megmagyarázza az imitációs jelzőt, hiszen a szomszéd utánzására épít, és az is érthetővé válik, hogy miért alkalmazzák széleskörűen az evolúcióbiológusok. A számolások elvégzéséhez a stratégiaváltás valószínűségét természetesen itt is fel kell írni formálisan:

$$w\left(s_x \leftarrow s_y\right) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\tilde{u}_x(s_x) - \tilde{u}_y(s_y)}{\kappa}}}.$$

Ez tehát az a valószínűség, amivel egy véletlenszerűen választott x játékos átveszi szintén véletlenszerűen választott y szomszédjának stratégiáját. A nyereménykülönbséget azonosítva az energiával itt is találunk fizikai párhuzamot: a Fermi–Dirac-statisztikát ismerhetjük fel. A zaj fogalmát (ha biológiai rendszerekre akarjuk értelmezni) az evolúciós visszacsatolás erősségeként foghatjuk fel: minél kisebb a zaj, annál erősebb a szelekció.

A lényegi újdonság, amit az okoz, hogy a játékosok csak a rendszerben lévő stratégiára válthatnak az, hogy megjelennek az úgynevezett abszorbeáló állapotok. Mivel ha egy stratégia kihalt a rendszerből, már nem térhet vissza, elképzelhető olyan folyamat, melynek a végén csak egy stratégia marad meg, ekkor a rendszer nem változik többé, ezt nevezzük abszorbeáló állapotnak. Ezt kihasználva elkészíthetünk egy fázisdiagramot, ami azt tartalmazza, hogy a nyereménymátrix *T-S* paramétereitől függően melyik stratégia fog dominálni, melyik lesz képes abszorbeáló állapot kialakításra, „egyeduralomra". Fontos megjegyeznünk, hogy itt már nem érvényes a 3. ábra fázisdiagramja, hiszen az fizikai rendszereknél releváns. Ez azt is jelenti, hogy nem mindegy, milyen α érték mellett futtatjuk a szimulációkat. Az alábbi eredményeket $\alpha = 0{,}5$ esetén kaptuk. Korábbról emlékezhetünk, hogy ekkor van kevert Nash-egyensúly a héja-galamb, illetve a szarvasvadászat tartományokban, azonban csak előbbiben lesz ez evolúciósan stabil. Jelen dinamika mellett, ami biológiai rendszerekre alkalmazható jobban, az ESS fogalmát várjuk meghatározóbbnak, és várakozásainkat igazolják az eredmények:



5. ábra: *Fázisdiagram imitációs dinamikánál, a zaj K=0,3. A kevert stratégia dominál azon a részen, ahol evolúciósan stabil. Szürkével jelölve az együttélés tartományai, ahol semelyik stratégia nem képes dominálni.*

A lényegi különbség a 3. és az 5. ábra között a kevert stratégia megjelenése a rendszerben. Ez igazolja azt a várakozásunkat, hogy a kevert egyensúlyok létezése miatt egy ilyen stratégia hozzáadása komoly eltérést jelent a kétstratégiás esethez képest. Sikeresen szemléltettük azt is, hogy a játékelméletben bevezethető különféle egyensúlyfogalmak közül mindig a körülmények és a dinamika választják ki az adott rendszerre vonatkozó legfontosabbat. Ez megerősíti azt az elképzelést, hogy a játékelmélet, és különösen az evolúciós játékelmélet működőképes keretrendszert biztosíthat több tudományterület számára és eszköztárát sok modellnél alkalmazni lehet.

4. Kitekintés

Az eddigiekben megismerkedtünk az evolúciós játékelmélet módszereivel egy konkrét probléma – a kevert stratégiával bővített társadalmi dilemma – tanulmányozásán keresztül. A terület távlatai egyértelműek: a modellt bővíthetjük további stratégiák hozzáadásával, választhatunk az általunk vizsgálni kívánt területre alkalmas dinamikát az időfejlesztéshez, vagy akár a játékosok elhelyezkedését is megváltoztathatjuk. Jelen munkában végig egy négyzetrács pontjaiban elhelyezkedő játékosokkal foglalkoztunk, de szociológiai vizsgálatokhoz például jó választás lehet a szociális hálózatokat jól modellező Barabási–Albert-modell szerint fejlődő gráfok vizsgálata. És ez még mindig csak ízelítő abból a sokszínűségből, amit ez a viszonylag egyszerű matematikai eszközökkel operáló tárgyalásmód lehetővé tesz.

Bibliográfia

Neumann J. Morgenstern O, .: *A Theory of Games and Economic Behaviour.* Princeton, 1944, Princeton University Press.

Nowak M.A.: *Evolutionary Dynamics.* Cambridge, MA, 2006, Harvard University Press.

Szabó G., Fáth G.: Evolutionary games on graphs. *Phys. Rep.*, 2007. 446. sz. 97-216. o.

Nash J.: Equilibrium points in n-person games. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* 1950. 36. sz. 48-49.o.

Smith J.M., Price G.R.: The logic in animal conflict. *Nature*, 1973. 246. sz. 15-18. o.

Nowak M.A., May R.M.: The spatial dilemmas of evolution. *Int. J. Bifurcat. Chaos.* 1993. 3. sz. 73-78. o.

Szabó G., Tőke C.: Evolutionary prisoner's dilemma game on a square lattice. *Phys. Rev. E.* 1998. 58. sz. 69-73. o.

Blume L.E.: The statistical mechanics of strategic interactions. *Games Econ. Behav.* 1993. 5. sz. 387-424. o.

Blume L.E.: The statistical mechanics of best-response strategy revision. *Games Econ. Behav.* 1995. 11. sz. 111-145. o.

Monderer D., Shapley L. S.: Potential games. *Games Econ. Behav.* 1996. 14. sz. 124-143. o.

Galam S., Walliser B.: Ising model versus normal form game. *Physica A.* 2010. 389. sz. 481-489. o.

Cressman R.: *Evolutionary Dynamics and Extensive Form Games*. Cambridge MA, 2003, MIT Press.

Onsager L.: Crystal statistics. I. a two-dymensional model with an order-disorder transition. *Physical Review.* 1944. 65. sz. 117-149. o.

Hódsági K.: Evolúciós társadalmi dilemma játék vizsgálata négyzetrácson egy harmadik kevert stratégiával. TDK-dolgozat.

Jávor M., Geszti T.: Kollektív döntéseket hozni - hogyan látja ezt a szociofizika. *Fizikai Szemle.* 2016. 66. (2) sz. 59-64. o.

Abstract: the aim of this work is to familiarize the reader with the importance, potentials and methods of the field called evolutionary game theory at an introductory level. To reach this goal we examine the physical relevance of this framework through a certain problem: a social dilemma game that had two strategies originally with an added mixed strategy. After introducing the mathematical methods and earlier results of this field by sketching the very basics, we discuss the data derived from simulations on this certain physical system by comparing it to the expectations. While gathering the similarities and differences between the extended system and the original one we also take a step to investigate our problem with the so-called imitation dynamics used mostly by evolutionary biologists. Here we find a more obvious difference between the two- and three-strategy games as the added mixed strategy plays an essential role.

Keywords: *evolutionary game theory, social dilemma, potential games, mixed strategy, logit rule, imitation dynamics, evolutionary stable strategy*