Ambrus András

A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban

I. Alappozíciók, bevezető megjegyzések

1. A NORMA 98 (Nordic Conference on Mathematics Education) konferencián Kristiansandban Yerusalemi izraeli matematikadidaktikus a következő mondattal kezdte plenáris előadását: Én a 90% tanára vagyok! Elismerve a magyarországi iskolai matematikai tehetséggondozás világszínvonalát, az utóbbi években engem is jobban érdekelnek a matematikából átlagos, illetve annál gyengébb tanulók nehézségei, tanulási problémái.

2. Laurinda Brown, a Bristoli Egyetem tanára mondta magyarországi látogatása végén itteni megfigyelései, tapasztalatai alapján: Ti Magyarországon matematikát tanítotok, mi Angliában gyerekeket. Először nem igazán értettem a kritikát, később el kellett ismernem, hogy van igazság benne, hiszen nálunk főleg középiskolában a matematika formális, zárt rendszere dominál, figyelmen kívül marad a tanulók fejlettségi szintje, nehézségei. Amikor a konkrét és vizuális reprezentációk alkalmazása mellett érvelek, a tanulók szempontjait helyezem előtérbe.

3. Bürger bécsi matematikadidaktikus látogatásom alkalmával a következő mondattal kezdte egyetemi matematikadidaktika előadását: „Aki azt állítja, hogy a matematikát így és így kell tanítani, az sarlatán!" Gondolataimat ennek szellemében, mint egy alternatív – azért megszívlelendő – javaslatot mutatom be.

II. Elméleti megfontolások

1. Reprezentációk

A matematikai elvekkel, fogalmakkal, koncepciókkal való gondolkodáshoz, illetve kommunikálásukhoz szükséges, hogy valamilyen módon reprezentáljuk e fogalmakat. Kétfajta reprezentációt különböztet meg a pszichológiai szakirodalom.

Külső reprezentációk:

- szimbolikus (beszélt illetve írott nyelv),
- vizuális (képi),
- tárgyi (materiális).

Belső reprezentációk (mentális reprezentációk).

Ahhoz, hogy agyunk operálni tudjon a fogalmakkal, szükségünk van ezek belső reprezentációjára.

A külső reprezentációk megfigyelhetők, míg a belső reprezentációk közvetlenül nem figyelhetők meg. A belső reprezentációk minőségére a külső reprezentációk alapján következtetünk.

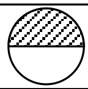
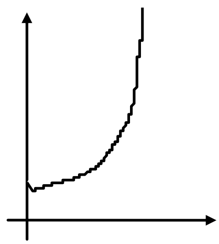
A pszichológiai tudományban a következő feltevéseket teszik a reprezentációkkal kapcsolatban

1. Egy fogalom, koncepció külső és belső reprezentációi között kapcsolat van. A belső reprezentációk között is kapcsolatok vannak. A külső reprezentációkat befolyásolja a belső reprezentáció jellege.
2. A belső reprezentációk közötti kapcsolat szimulálható a megfelelő külső reprezentációk közötti kapcsolatok létrehozásával. A belső reprezentációk közti kapcsolat az ismeretek egy hálózatát adja. A kapcsolatok teszik lehetővé egyik ismeretről a másik ismeretre való áttérést.

Megértés

Egy matematikai elvet, koncepciót, fogalmat akkor értünk meg, ha annak belső reprezentációja a reprezentációs hálózatunk részévé válik. A megértés fokát a kapcsolatok száma, erőssége, stabilitása jellemzi. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a megértés a matematikai fogalmak, elvek közötti kapcsolatok létrejöttét jelenti.

Példák

	Tárgyi	Képi	Szimbolikus
Természetes szám	Öt darab golyó	ooooo	V, 5, öt
Törtszám	Fél alma		fél, egy ketted, $\frac{1}{2}$
Függvény	Tavirózsa a megfigyelés kezdetekor 1 m^2 vízfelületet fed le. Havonta megduplázódik a lefedett terület. Vizsgáljuk az idő és lefedett terület kapcsolatát.	grafikon 	f: R→R, f(x) = 2^x
Eltolás	Egy szekrény eltolása a teremben	szerkesztések eltolással kapcsolatban	$T_{\underline{v}}$

Kapcsolatok a reprezentációk között

Egy külső reprezentáció – több belső reprezentáció

„–” jel lehet:
- az ellentett jele, pl. –(–5)
- a kivonás jele pl. 5 – 3
- előjel pl. –5

3x + 2 jelenthet:
- egy műveleti eljárást, egy bizonyos szám háromszorosához hozzáadunk kettőt;
- az előbbi műveleti sor eredményét, azaz egy számot;
- egy lineáris függvényt;
- egy formális algebrai kifejezést (jelkombinációt).

4x jelentheti az előbbi négy értelmezés mellett:
–négy darab egyenként x hosszúságú szakasz összegét;
–egy olyan téglalap területét, melynek oldalai 4, illetve x hosszúságúak.

Egy belső reprezentáció – több külső reprezentáció

Egész számok:
Z = {0,1,–1,2,–2...}
Z = {...–3,–2,–1,0,1,2,3...}

Függvények:
Megadásuk történhet táblázattal, grafikonnal, szimbólumokkal, szóbeli utasítással.

A képi reprezentációk memóriát befolyásoló jellemzői
A képiség, vizualitás hatékonyan megjegyezhető. A képeket a verbális memóriától elkülönítve kódolja agyunk, így egy második lehetőség is van a memóriában elraktározott információkhoz való hozzáférésre. A képek hatékony eszközei lehetnek a tanult anyag szervezésének, így megjegyzésének is.

2. Az emberi agy aszimmetriái

Hámori József *Az emberi agy aszimmetriái* című könyvében részletesen elemzi a bal, illetve jobb agyfélteke jellemzőit. Kutatásai és a nemzetközi kutatási eredmények összegzése alapján arra a következtetésre jut, hogy az emberek 85%-ánál az illető agyféltekére dominánsan jellemzőek az alább felsorolt tulajdonságok:

Bal félteke	Jobb félteke
– beszéd, nyelvhasználat	– néma, látó, térmanipuláló
– szekvenciális, digitális	– egyidejű, analóg
– logikus, analitikus	– szintetikus, holisztikus
– algebrikus	– geometrikus
– intellektuális	– ösztönös
– konvergens	– divergens
– következtető	– képzelőerő, kreativitás
– racionális	– irracionális
– absztrakt (gondolkodás)	– tárgycentrikus (gondolkodás)
– realisztikus, objektív	– impulzív, szubjektív
– humorérzék nincs	– humorérzék
– irányított	– szabad
– időérzék	– időtlen

A nyugati kultúrákban a verbális nyelv, az ésszerű, racionális, logikus gondolkodás és az elemzés túlhangsúlyozása a jellemző. (A részletek nagy hangsúlyt kapnak.) A keleti gondolkodás intuitív, meditatív, mitikus, néha irracionális (nyugati értelemben). Ezen típusú gondolkodás főleg a jobb agyféltekében lokalizált. Érdemes megjegyezni, hogy Japánban igyekeznek ötvözni a kétfajta gondolkodási stílust a matematikai problémamegoldás tanítása során.

Paivió duális kódelmélete szerint minden individuum két egymástól elválasztott kódoló rendszerrel rendelkezik (képi illetve verbális). Minél konkrétabb a feldolgozandó információ, annál jobb lehetőségek vannak a kétféle kódolásra.

Ipke Wachsmuth kétfajta gondolkodási módról beszél: L-modus illetve R-modus. Érdemes összevetni e két modust a Hámori-féle listával.

L-modus	R-modus
– részletekre való koncentráció	– részletek összerakása, összeillesztése
– gondolatok kanalizálása (egy szisztematikus megoldásra való törekvés)	– asszociáció (szabad asszociációk is)
– oksági gondolkodás (lineáris, idő szerepe)	– téri gondolkodás (nincs kapcsolata az idővel)
– megértés, következtetés (szavakkal, szimbólumokkal)	– szemléletesség fejlesztése
– szeriális feldolgozás	– párhuzamos információ-feldolgozás
– konvergens gondolkodás (teljesen tudatos)	– divergens gondolkodás (részben tudattalan)

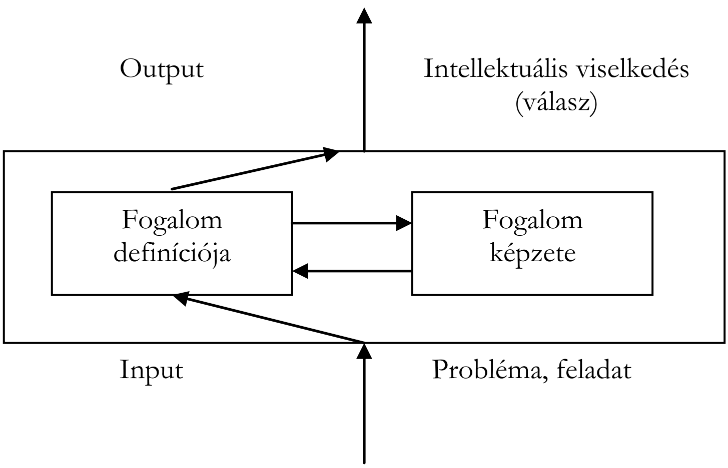
Összefoglalva: A balfélteke az irányított, rögzített információk kezelésében jár élen, míg a jobb félteke az új információk, problémák megoldásában, kezelésében előnyösebb. A problémamegoldás során mind az intuitív (divergens), mind a logikus gondolkodás szükséges, egyedül egyik sem elegendő. Kizárólag logikus gondolkodással szinte lehetetlen olyan célt elérni, amiről semmit sem tudunk. Persze a divergens gondolkodással kapott megoldásokat ellenőrizni kell, amit a bal félteke sokkal jobban tud végezni.

3. Fogalomképzet (concept image)

Shlomo Vinner izraeli matematikadidaktikus vezette be a fogalomképzet (concept image) elnevezést a matematikadidaktikai szakirodalomban. Fogalomképzetnek nevezzük a fogalom nevéhez kapcsolt teljes kognitív struktúrát, mely tartalmazza a vizuális reprezentációkat (képek, diagramok, grafikonok), mentális képeket (belső kapcsolatokat), konkrét tapasztalatokat, példákat, élményeket, tulajdonságokat, eljárásokat. A fenti felsorolásból kitűnik, hogy a képek, konkrét példák, konkrét tapasztalatok jelentős szerepet játszanak a hatékony fogalomképzet kialakításában.

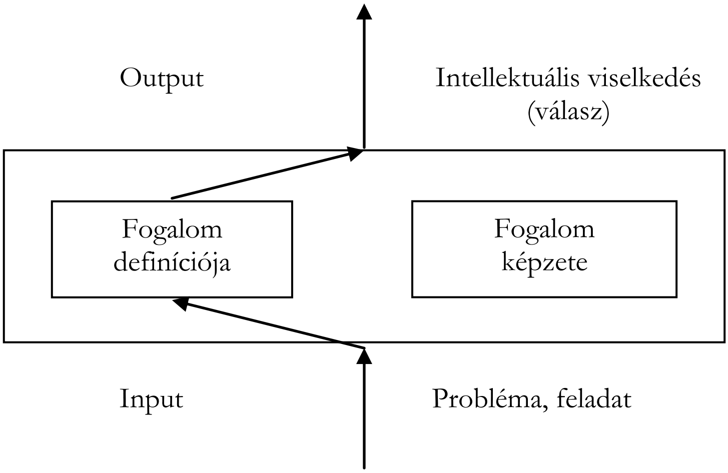
A fogalomképzet és fogalomdefiníció kapcsolata Vinner szerint a következő lehet:

I. Kölcsönös, kétirányú kapcsolat

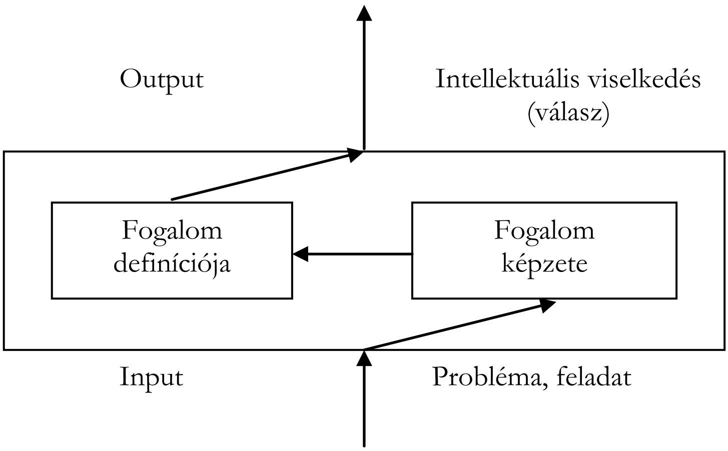


Ez az ideális eset, amikor a tanuló tudja a fogalom meghatározását, amely kölcsönös kapcsolatban van a fogalom kialakult képzetével is. Ez azt jelenti, hogy a problémamegoldás során a tanuló támaszkodik tapasztalataira, szemléletes képekre.

II. Tisztán formális okoskodás

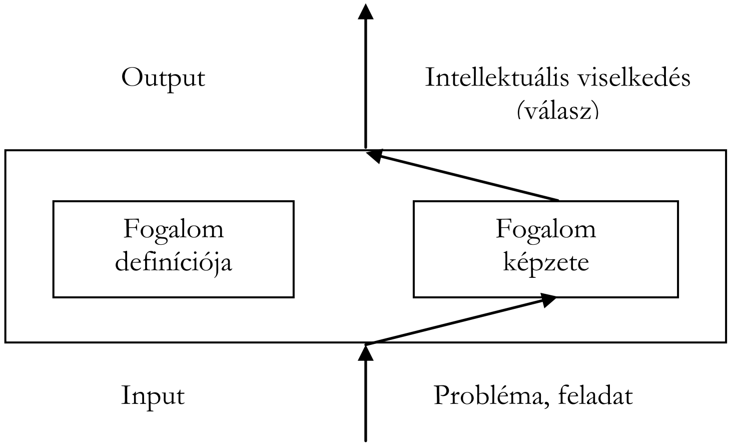


III. Intuitív okoskodásra épülő, de a formális meghatározást is figyelembe vevő következtetések



IV. Csak az intuícióra épülő okoskodás

A valóságban létezik egy negyedik variáns, amikor a tanuló csak a fogalom képzetére támaszkodik, a definíciót teljesen elhagyja. Érdekes, hogy sok esetben működik, eredményhez vezethet ez a felfogás is a problémák megoldása során.



4. Rövid távú munkamemória

Az emberi memória három fajtáját különbözteti meg a kognitív pszichológia: észlelési memória, munkamemória (rövid távú memória), hosszú távú memória.

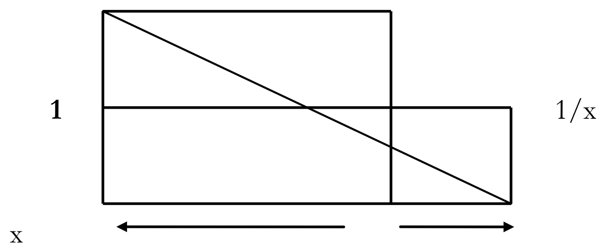
A munkamemória egyidejűleg 7 ± 2 információelemet tud tárolni kb. 15 másodpercig (rövid figyelemfókuszálás) Az információ-feldolgozás a munkamemóriában történik, a beérkező információk osztályozása majd a hosszú távú memóriába való továbbítása illetve a hosszú távú memóriából előhívott ismeretek révén.

A kognitív erőfeszítések minimalizálása miatt lényeges:

- az információk sűrítése,
- kapcsolatok kiépítése más mentális adatokkal.

A matematikai szimbólumok, képek, diagramok nagyon sok információt sűrítenek össze. Témánk szempontjából érdemes megemlíteni, hogy a képek mint címkék szolgálhatnak egy-egy teljes gondolkodási folyamathoz.

Például az $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ($x > 0$) ismert azonosság egy lehetséges bizonyításához az alábbi ábra mint címke szolgálhat. Felhasználjuk a párhuzamos szelők tételét, illetve a háromszög szögei és oldalai közötti összefüggést. (Nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.)



Tapasztalataim szerint az ilyen jellegű feladatok először nagyon szokatlanok a tanulók számára, tudatosan kell kialakítani bennük a vizuális elemek használatának képességét.

III. Világhírű magyar matematikadidaktikusok a konkrét, vizuális reprezentációk szükségességéről

Dienes Zoltán:

„*A perceptív (észlelési) változatosság vagy többszörös konkretizálás elve.*

Célszerű a fogalmi struktúrákat lehetőleg sok ekvivalens, de az észlelés számára különböző formában bemutatni a gyerekeknek, hogy a fogalmak kialakításában minél jobban érvényesülhessenek az egyéni különbségek, és hogy a gyerekek egy-egy fogalom absztrakt matematikai tartalmát minél inkább megragadhassák” (Dienes 1973).

„...a gyerekek inkább konstruktívan gondolkodnak, mint analitikusan. A gyerek előbb az egészet látja, előbb konstruál, és csak azután analizál. Rájöttem egy nagy ellentmondásra, arra, hogy az egész matematikatanítás az analízisre épül.
A »New Math« alapelve, hogy a matematika egy nyelv, s ha ennek a nyelvnek a szerkezetét a gyerek megtanulja, akkor a jelentését is érteni fogja, s tudja alkalmazni is. Olyan ez, mintha a kocsi húzná a lovat, mert előbb jön az absztrakció, azután a konkrétum. A valóságban ez éppen fordítva van, a konkréttól megyünk az absztrakt felé.

Az én szisztémám azon az elven alapszik, hogy a gyerek előbb konkrét tapasztalatainak alapján, valóságos játékok keretében, érzékletes tevékenykedés közben ismerje meg, fedezze fel a komplikált matematikai fogalmakat, struktúrákat. És nálam nemcsak arról van szó, hogy megtanuljuk a matematikát szűkebb értelemben, hanem egy teljesen újfajta lelki beállítódásról, arról is, *hogy megtanuljunk a legjobb módon tanulni. Mégpedig a tapasztalatokra építve tanulni!*

Attól még nem tanulok meg biciklizni, ha ismerem a bicikli szerkezetét, de ha tudok biciklizni, könnyebben megtanulom a szerkezetét is” (Győri 1973).

Varga Tamás:

„Absztrahálni csak konkrétumokból lehet, s ahhoz, hogy valaki jól tudjon absztrahálni, sokféle konkrétummal kell megismerkednie. A matematika nagyon absztrakt, éppen ez a fő erőssége, hiszen ez azt jelenti, hogy nagyon sokféle konkrét jelenség közös lényegét sűríti magába. Ehhez a nagyon absztrakthoz nagyon konkrét kiindulással tudjuk a legsikeresebben elvezetni a gyerekeket, úgy, hogy elegendő számú és elég változatos konkrét tapasztalatban részesítjük őket. Kezdő fokon, kisgyerekeknél ez a nagyon konkrét az érzékszervi-mozgásos élményeket jelenti. A manuális (mozgásos, tapintási, akaratot is bekapcsoló) tevékenység ennek egyik fő tere.

Kísérletünk alapelve: dolgokkal való műveletekből jutni el a jelekkel való műveletekhez.

Műveletek dolgokkal

↓

Műveletek jelekkel

Nyíl helyett cikk-cakkot is húzhattam volna annak jelzésére, hogy *ide-oda közlekedünk a kettő között, vissza-visszamegyünk a dolgokkal végzett manuális tevékenységhez, valahányszor a jelekkel végzett tevékenység értelmessé tétele ezt kívánja"* (Klein 1980).

Pólya György:

„...nem szabad semmi olyat elmulasztani, aminek valami esélye van arra, hogy a diákokhoz közelebb hozza a matematikát. A matematika nagyon absztrakt tudomány – éppen ezért nagyon konkrétan kell előadni" (Pólya 1977).

IV. Példák a konkrét, vizuális illetve szimbolikus reprezentációk használatára

A nemzetközi és hazai vizsgálatok szerint túl korán és túl gyorsan absztrahálunk, általánosítunk a matematikaórákon, ezzel elvesszük a tanulóktól a lehetőséget, hogy a konkrét példákból saját maguk ismerjék fel az összefüggéseket.

Egy német vizsgálat szerint a X. osztályos tanulók 20-30%-a éri el a formális műveletek szakaszának szintjét (Elschenbroich 2001).

Csíkos Csaba (Szegedi Tudományegyetem) egy 4000 fős mintát vizsgált V, VII, IX, XI. osztályos tanulók és tanáraik körében. Egyértelműen kiderült, hogy a diákok és tanáraik is magasabbra értékelték az értelem nélküli szimbolikus bizonyításokat, mint az empirikus bizonyításokat (konkrét esetek kipróbálása).

A szimbolikus reprezentációk egyoldalú, kizárólagos használatáról nehéz leszoktatni a tanulókat, egyetemi hallgatókat. Meg kell győzni őket, hogy önmagában gyakran nem elegendő egyetlen reprezentáció favorizálása, az hiányos, esetleg rossz megoldáshoz vezethet. Először két olyan feladatot mutatok be, melyek megoldásánál a szimbolikus reprezentációk kizárólagos alkalmazása hiányos megoldáshoz vezetett, és a vizuális, illetve, konkrét reprezentációk alkalmazása az átlagos tanulóknál is sikeres megoldáshoz vezetett. Ezután olyan feladatot mutatok be, ahol viszont a szimbolikus reprezentációk használata a kívánatos. Végül olyan feladat következik, melynél a vizuális és a szimbolikus reprezentációk használata is célszerű.

1. példa

Az „a" paramétertől függően hány megoldása van a következő egyenletrendszernek?

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

Megoldás

y^2-et kifejezve az első egyenletből és behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk:

$(x - a)^2 + x^2 = 1$, azaz $2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$

A diszkrimináns értékétől függően egyenletünknek 0, 1, 2 megoldása lehet. A diszkrimináns $D = 2 - a^2$.

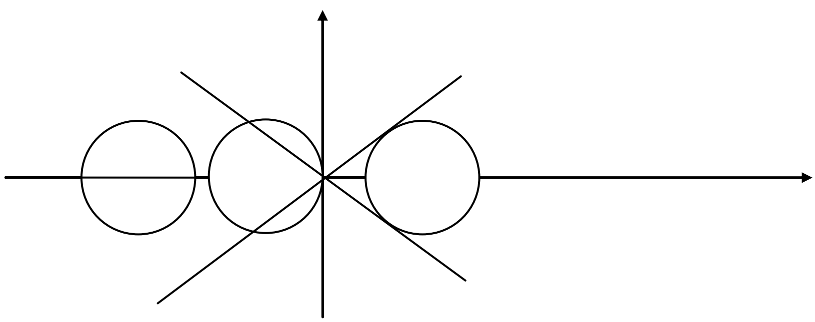
Ha $D = 2 - a^2 < 0$, azaz $a^2 > 2$ ($a > \sqrt{2}$ vagy $a < -\sqrt{2}$), az egyenletnek nincs megoldása.

Ha $D = 0$, azaz $a = -\sqrt{2}$ vagy $a = \sqrt{2}$, akkor az egyenletnek egy megoldása van x-re vonatkozólag, ezt behelyettesítve az első egyenletbe y-ra két megoldást kapunk ($y = \pm x$), tehát két megoldása van egyenletrendszerünknek.

Ha $D > 0$, azaz $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$, két megoldást kapunk x-re, tehát négy megoldása lesz egyenletrendszerünknek. De van egy speciális eset, amikor a megoldó képlet számlálója 0 értéket vesz fel, azaz az egyik x értéke 0 és a neki megfelelő y értéke is 0 lesz. Ez esetben tehát csak három megoldása lesz az egyenletrendszernek.

$a - \sqrt{2 - a^2} = 0 \Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a = -1$ vagy $a = 1$.

Geometriai megoldás



A geometriai megoldás jól mutatja a különböző eseteket: Az első egyenletnek a koordinátarendszer szögfelező egyenesei felelnek meg, a második egyenlet egy (a, 0) középpontú, egységnyi sugarú körnek az egyenlete. Balról jobbra mozgatva a kört, $a = -\sqrt{2}$ esetén lesz először megoldás, a kör érinti az egyenespárt (két megoldás). Tovább mozogva $a = -1$-ig négy megoldás van. Ha $a = -1$, akkor csak három megoldás van, hiszen a kör átmegy a két egyenes metszéspontján. Pozitív *a* esetén szimmetria okok miatt a megoldás hasonló, azaz 0-tól 1-ig négy megoldás van, $a=1$ esetén három, 1-től $\sqrt{2}$-ig négy, $a = \sqrt{2}$ esetén kettő, ennél nagyobb értékekre nincs megoldás.

Tapasztalatok szerint algebrai megoldás esetén a három megoldás esetét elhagyják a tanulók, de sajnos még az egyetemi hallgatók is. Eddig több mint 100 negyedéves matematika szakos hallgatót vizsgáltam meg, mindenki algebrai megoldást adott és mindenki kihagyta a három *megoldás lehetőségét! Nagyon meglepődtek, amikor bemutattam a képi (grafikus) megoldást, nem gondoltak rá, hogy olyan egyszerűen is meg lehet oldani a feladatot.*

2. példa

Ha az 1 számot hozzáadjuk négy egymást követő természetes szám szorzatához, akkor egy teljes négyzetet kapunk. Bizonyítsuk be!

I. megoldás (Szlovákia):

Legyen $a > 2$ természetes szám. Az $a - 2$, $a - 1$, a és $a + 1$ négy olyan természetes szám, amelyek kielégítik a feladat feltételeit. Szorzatukat jelöljük N-nel. Bizonyítsuk be, hogy az $N + 1$ teljes négyzet.

$N + 1 = (a - 2)(a - 1)\, a\, (a + 1) + 1 =$

$(a^2 - a)[(a - 2)(a + 1)] + 1 = (a^2 - a)[(a^2 - a) - 2] + 1 =$

$(a^2 - a)^2 - 2(a^2 - a) + 1 = (a^2 - a - 1)^2$

$a > 2$ esetén $a^2 - a - 1 = a(a - 1) - 1 > 1$, ezért

$a^2 - a - 1$ természetes szám

II. megoldás (Dezső Gábor, Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár):

Jelöljük a középső számot x-szel. $x = a + 0{,}5$ ahol *a* pozitív egész szám.

A négy szomszédos szám : $x - 1{,}5$ $x - 0{,}5$ $x + 0{,}5$ $x + 1{,}5$

$(x - 1{,}5)(x - 0{,}5)(x + 0{,}5)(x + 1{,}5) + 1 =$

$(x - 0{,}5)(x + 0{,}5)(x - 1{,}5)(x + 1{,}5) + 1 =$

$(x^2 - 2{,}25)(x^2 - 0{,}25) + 1 = x^4 - 2{,}5x^2 + 9/16 + 1 =$

$x^4 - 2{,}5x^2 + 25/16 = (x^2 - 5/4)^2$

$x^2 - 5/4 = (a + 0{,}5)^2 - 5/4 = a^2 - a + 0{,}25 - 1{,}25 =$

$a^2 - a - 1$ egész szám $a \geq 2$

$a = 1$-re 0-t kapunk, ami négyzetszám.

III. megoldás:

Problémafölvetés: Válasszon ki 4 szomszédos természetes számot, a szorzatukhoz adjon 1-et. Vizsgálja az így kapott számokat. Fogalmazzon meg egy sejtést! Sejtését bizonyítsa be!

Konkrét esetek vizsgálata:

$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 1 = 1^2$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = 25 = 5^2$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$

$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2$

$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 = 841 = 29^2$

Sejtés:

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=k^2$, ahol *k* természetes szám.

Beszorzás után kapjuk: $n^4+6n^3+11n^2+6n+1$.

Mely kifejezés négyzete ezen összeg? Átlagos képességű tanulók számára nehéz probléma. A háromtagú összeg négyzetére vonatkozó formula nem tanítási anyag. A konkrét számokkal való próbálkozás után többféle megoldást is kaptak tanulóim. Az első és utolsó tényező szorzata plusz 1 azaz $n(n+3)+1=n^2+3n+1$ vagy a két középső tényező szorzata –1
$(n+1)(n+2)-1=n^2+3n+1$.
E kifejezést négyzetre emelve kapjuk az eredeti kifejezésünket.

Nagyon tanulságosak e feladattal kapcsolatos tapasztalataim. Magyar és német középiskolás diákok számára is szokatlan volt a konkrét esetek vizsgálata, a sejtés önálló megkeresése. Nagy sikere volt annak a fázisnak, amikor azt a számot keresték a konkrét példák alapján, amelynek négyzete a kapott szorzatösszegnél 1-gyel nagyobb szám. Minden tanuló dolgozott, tudott valamit csinálni, és nem volt degradálva a szimpla másolásra („csökkentett üzemmódban" való munkára). Az egyetemi hallgatók körében hasonló tapasztalataim vannak.

Amikor az algebrai megoldás előnyösebb a geometriainál

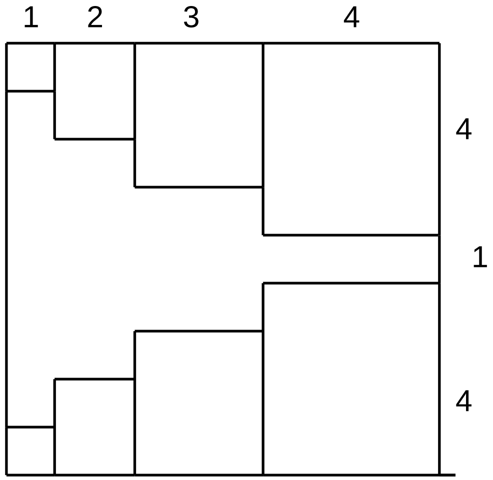
1. Derékszögű háromszög befogóinak hossza *a,* illetve *b*. Rajzoljunk mindkét befogóra kifelé egy-egy négyzetet. Kössük össze az átfogó végpontjait a négyzetek legtávolabbi csúcsával. Igazoljuk, hogy az így kapott két egyenes metszéspontja illeszkedik az átfogóhoz tartozó magasságra!

Derékszögű koordinátarendszerbe helyezve a háromszöget úgy, hogy a derékszögű csúcs az origóba, az egyik befogó az x tengely, a másik befogó az y tengely pozitív felére esik, a csúcsok koordinátái *a* és *b* segítségével kifejezhetők. A megfelelő egyenesek egyenleteit meghatározzuk, majd tekintjük ezen egyenesek metszéspontját, és megmutatjuk, hogy valóban rajta van a megfelelő magasságvonalon.

Amikor mindkét megoldási mód ajánlatos

Az első *n* pozitív egész szám négyzetének összege.

Komoly nehézséget jelent a megfelelő formula megsejtése. A geometriai interpretáció segíthet. Vizsgáljuk n=4-re a keresett összeget! Mérjük fel az ábrának megfelelően az 1, 2, 3, ill. 4 egység oldalú négyzeteket, majd egy egység kihagyásával mérjük fel ugyanezen méretű négyzeteket „tükrösen". Zárjuk le az alakzatot egy téglalappá. A téglalapban kétszer van jelen a keresett összeg, a „közbeeső" rész területe is a keresett összeget reprezentálja.



A két 4x4-es négyzet között négy db. egységnégyzet van. A két 3x3-as négyzet között három darab 3 egységnégyzetből álló sáv van. A két 2x2-es négyzet között két darab 5 egységnégyzetből álló sáv van, végül van egy 7 egységből álló sávunk is.

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 = 4$
$1 = 1$

A téglalap területe tehát háromszorosa a négyzetszámok összegének.
A téglalap egyik oldala 1 + 2 + 3 + 4, a másik oldala pedig $2 \cdot 4 + 1$. Az okoskodás kiterjeszthető bármely *n* természetes számra. Ebben az esetben a téglalap oldalai 1 + 2 + 3 + ... + n, illetve $2 \cdot n + 1$ lesznek. Felírva ez esetben a terület harmadrészét, kisebb átalakítások segítségével megkapjuk az ismert összegképletet.

Algebrai megoldásmód

Alkalmazzuk a két tag köbének különbségére vonatkozó azonosságot.

$$(1-1)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2 \cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1^2 - 1^3$$
$$1^3 = (2-1)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2 \cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1^2 - 1^3$$
$$2^3 = (3-1)^3 = 3^3 - 3\cdot 3^2 \cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 1^2 - 1^3$$
....
$$(n-1)^3 = n^3 - 3\cdot n^2 \cdot 1 + 3\cdot n\cdot 1^2 - 1^3$$

Összeadva ezen egyenlőségeket látható, hogy mindkét oldalon szerepel az első n–1 köbszám összege. Ezt elvehetjük a két oldalból. A jobboldali második oszlop tagjainak összegében szerepel a keresett összeg , a harmadik oszlop tagjainak összegében pedig az első n pozitív egész szám összege.

$$0 = n^3 - 3\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) + 3\left(1 + 2 + \ldots + n\right) - n$$

$$S = \frac{n^3 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ez a megoldási variáns jó lehetőséget biztosít a nevezetes azonosságok gyakorlására.

Természetesen a teljes indukciós bizonyítás tárgyalására is szükség van. E három bizonyítást különböző osztályokban kell tárgyalni. Célszerű összehasonlítani a módszereket, azok előnyeit, nehézségeit megbeszélni a felsőbb osztályokban. Fontos a kapott formula, hiszen sokszor fogják a tanulók alkalmazni összegek meghatározására, de legalább ennyire fontos a bizonyítási tevékenység, a különböző módszerek összevetése. Így jobban megmarad a tanulókban a módszer, a gondolkodási tevékenység lényege.

Felhasznált irodalom:

Ambrus A.: *Bevezetés a matematiakdidaktikába*. Budapest, 1995, Eötvös.

Dienes Z.: *Építsük fel a matematikát.* Budapest, 1973, Gondolat, 66. o.

Dienes Z. Ellopni a tüzet a matematika isteneitől. In *Ember és műveltség* Budapest, 1976, Gondolat, 88–104. o.

Elschenbroich, H. J.: Visuelles Lehren und Lernen In *Beiträge zum Mathematikunterricht div Verlag Franzbecker.* 2001, 169–172. o.

Győri, Gy. (szerk.) 1976

Hámori, J.: *Az emberi agy aszimmetriái*. Budapest– Pécs, 1999, Dialog Campus.

Klein, S.: *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata*. Budapest, 1980, Akadémiai Kiadó, 44–45. o.

Oláh Gy. (szerk.): *Határon túli matematikaversenyek*. Budapest, 1999, Typotex.

Paivio, A. – Begg, I.: *Psychology of language*. New Jersey, 1981, Prentice Hall.

Pólya Gy.: *A gondolkodás iskolája.* 236. o.

Wachsmuth, I.: Two modes of thinking – also relevant for the learning of mathematics. In *For the learning of mathematics. 2* (2) 38–45. o.