

Zsigmond Mária

Egy lehetőség nem-euklidészi geometria tanítására gimnáziumban

2002 a matematikusok világában Bolyai-év volt. A nagy géniusz születésének 200. évfordulójára emlékeztek. Az akkori hetedikes tanítványaimtól érdeklődtem, mit tudnak Bolyai Jánosról. Néhányan mondták, hogy nagy matematikus volt, de, hogy miben is rejlik nagysága – természetesen – nem tudták. Akkor határoztam el, hogy régi vágyam megvalósításaként néhány érdeklődő tanítványomnak megmutatom, hogy az általunk megszokott geometrián kívül más geometriák is léteznek. A gömbi geometria alkalmas arra, hogy az euklidészi geometria alapjait már ismerő tanulónak egy másik valóság iránti érdeklődését kiváltsa. Szemléltetésként labdát és filctollat használtam. Miután rácsodálkoztak a gömbi geometria érdekességeire, vállalták, hogy ismereteiket továbbadják iskolánk nyolcadikosainak is. Így került színre Bolyai rövid életrajza és a gömbi geometria. Próbák alatt elmélyítették a számukra új geometriáról szerzett ismereteiket, kellékként kartonra elkészített szemléltető ábrákat ragasztottunk a falra. A továbbiakban az összeállítást lehetőségként közlöm 10 tanulóra elosztva, de többel vagy kevesebbrel is megoldható.

A kissé baloldalra húzott katedránál ül, és könyvei között elmélyülten ír a Bolyait jelképező fiú. Mögötte áll a hetedik tanuló, mellettük folytatólagosan körívben a többiek. Paganini-virtuóz hallszik, majd halkul és elhallgat.

Narrátor: Bolyai János, a legnagyobb magyar matematikus Kolozsváron született 1802. december 15-én. Édesapja, Bolyai Farkas matematikatanár, fiát különleges gonddal nevelte és irányította a matematika felé. A rendkívüli értelmet mutató fiút ő maga oktatta nemcsak matematikára, de vívásra, hegedűjátékra, zenei ismeretekre. A négyéves Bolyai János már megnevezte azokat az egyszerű mértani alakzatokat, melyeket apja krumpliból vágott ki neki. Még tizenöt éves sem volt és apját sokszor helyettesítette a matematikaórákon. Ekkor már az öreg Bolyai semmi újra nem taníthatta fiát. Az ifjú elsőik között is első volt. Szép latinsággal írt és beszélt, rendelkezett német nyelvtudással, kémia, fizika, csillagászat terén nagy jártasságra tett szert.

Mintaképe, mestere az apja volt. Tőle nem csupán ismereteket kapott, hanem a gondolkodás szigorát is. Ő ismertette meg a megoldásra váró problémákkal, ő plántálta bele a matematika iránti tiszteletet és érdeklődést.

1823-ban befejezte akadémiai tanulmányait, alhadnagyi ranggal a temesvári erődítési igazgatósághoz kapott beosztást. Ebben az évben írta apjának a szállóigévé vált mondatot:

Bolyai Jánost jelképező fiú: A semmiből egy új, más világot teremtettem.

1. tanuló: Hogy megértsük Bolyai új világát, tudnunk kell, hogy a mértanórákon tanult euklidészi geometrián kívül más geometriák is léteznek. Az a mértan, ami a papírlap síkján, a tábla síkján megvalósul, különbözik attól, ami pl. a gömbfelületen

valósul meg. A geometria egész felépítésében fontos szerepe van az egyenes meghatározásának. Ahol az egyenes másféle vonal, mint amit megszoktunk a papírlapon, ott mások a geometria törvényei is.

2. *tanuló:* Vegyük szemügyre a Föld felszínén érvényes geometriát és tekintsük a Földet szabályos gömb alakúnak. Ha a Földön húzzuk az egyenest, akkor mindkét irányban hosszabbítva találkoznak, és tulajdonképpen az egyenes egy kör. A Földön egyenesen haladó jármű tulajdonképpen *gömbi főkör* mentén halad. Így a gömbfelület geometriájában az *egyenesek* a főkörök. Az Egyenlítő és a délkörök egyenesek. (Mutatja az 1. ábrán.)

3. *tanuló:* Mi az a főkör?

2. *tanuló:* A főkör egy olyan kör a gömbön, melynek középpontja a gömb középpontjában van.

3. *tanuló:* Akkor a szélességi köröket nem nevezhetjük egyeneseknek?

2. *tanuló:* Nem bizony! Hiszen azok nem főkörök. Azok görbe vonalak.

4. *tanuló:* Érdekes. Így a gömb felületén bármely két egyenes metszi egymást mégpedig két pontban. (Az 1. ábrához megy és bejelöli a metszéspontokat.)

5. *tanuló:* Mondanánk ilyent az osztályban! (Mutatja ceruzákkal két egyenes kölcsönös helyzetét.)

6. *tanuló:* Ha minden két egyenes metszi egymást, akkor párhuzamosokról szó sem lehet.

3. *tanuló:* Még milyen furcsaságai vannak ennek a geometriának?

4. *tanuló:* Hát például egy egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok összessége nem két egyenes, hanem két görbe. (Mutatja a 2. ábrán és a labdán.)

5. *tanuló:* Vegyünk a gömbön egy olyan háromszöget, melynek két csúcsa az Egyenlítőn, a harmadik pedig az Északi- vagy Déli-sarkon van. AC és BC a hosszúsági körök ívei, ezért az Egyenlítőre merőlegesek. (Mutatja a 3. ábrán.)

4. *tanuló:* Hát akkor ebben a háromszögben már két szög összege 180 fok. A háromé több 180 foknál.

5. *tanuló:* Ha nincsenek párhuzamosak, egyetlen négyszög sem lehet paralelogramma. S ha egy négyszögnek minden szöge 90 fok, akkor legfennebb három oldala lehet egyenes, a negyedik föltétlenül görbe. (Mutatja a 4. ábrán és a labdán.)

6. *tanuló:* Ha pedig minden oldala egyenes, legfennebb három derékszöge lehet. (Az 5. ábrához megy, és mutatja.) AD és BC délkörök ívei merőlegesek az AB egyenesre. Ha DC egyenes merőleges BC-re C-ben, akkor AD-re nem lehet merőleges. (A labdán is megmutatja.)

7. *tanuló:* Tehát a négyszög szögeinek összege nem 360 fok.

8. *tanuló:* Eddig megszokott több mint kétezer éves geometriánkat Euklidészről euklidészi geometriának nevezzük. A gömbön érvényes geometria a gömbfelületi vagy szférikus geometria. Bolyai geometriája a hiperbolikus geometria. Az euklidészitől eltérő geometriákat nem-euklidészi geometriáknak hívjuk.

9. *tanuló:* És melyik az igazi?

7. *tanuló:* Mindenik. A neki megfelelő körülmények között.

6. *tanuló*: A Bolyai-geometria a gömbfelületi geometria szimmetrikusának tekinthető. Vannak azonos törvényei és ellentétesek.

8. *tanuló*: Bolyai János felfedezése apja művének függelékeként látott napvilágot. Így ír a nagy matematikus:

Bolyai Jánost jelképező fiú: Nem biztos, hogy a négyszög szögeinek összege 360 fok, mert a háromszög szögösszege sem 180 fok.

9. *tanuló*: A gömbi geometriában a három derékszöget tartalmazó négyszög negyedik szöge tompa. A Bolyai-geometriában hegyes.

7. *tanuló*: Egy lényeges különbség, hogy a Bolyai-geometriában egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át egynél több párhuzamos húzható. A gömb felületén viszont egy se. Euklidészi terünkben pedig csak egy.

8. *tanuló*: Az euklidészi geometria, a gömbfelületi geometria számunkra szemléletesek. Olyan felület, amelyen a Bolyai-féle hiperbolikus geometria érvényesül, nincsen a környezetünkben. Csupán matematikai tényként létezik, elvont, de ugyancsak a valós világot írja le.

9. *tanuló*: A Bolyai-geometria forradalmi felfedezés a matematika történetében, óriási gyakorlati jelentősége van a relativitás elméletében. A relativitáselmélet szerint valós világunk csak kis mértékben euklidészi, nagyobb mértékben már nem: alakja a benne lévő anyag sajátosságaitól függ, tehát változhat is. A világtér különböző valóságos alakjai különféle matematikai terekkel írhatók le.

1. *tanuló*: Bolyai Jánosnak nagy harcot kellett vívnia, hiszen az elvont hiperbolikus teret a matematika is tapasztalatot nélkülöző úton ragadhatta meg.

Narrátor: A világ nagy matematikusa három évvel és néhány hónappal élte túl apját. Mikor szíve utolsót dobant, szobájában egy jóra való szolgálóleány ült az asztal mellett és levelet írt.

7. *tanuló* felolvassa Szöcs Júlia levelét, melyet Bolyai bátyjához írt:
...A Kapitány úr nincs többé.

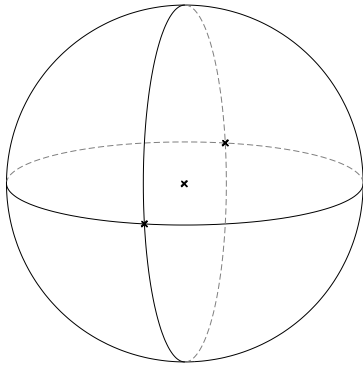
2. *tanuló* elmondja Babits Mihály *Bolyai* című versét.
Egyre hangosabb Paganini-muzsika.

Felhasznált irodalom:

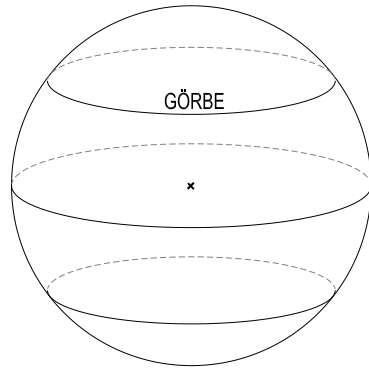
Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC*. Budapest, 1980, Tankönyvkiadó.

Bitay László: *Matematikatörténeti mozaik*. Kolozsvár 1984, Dacia.

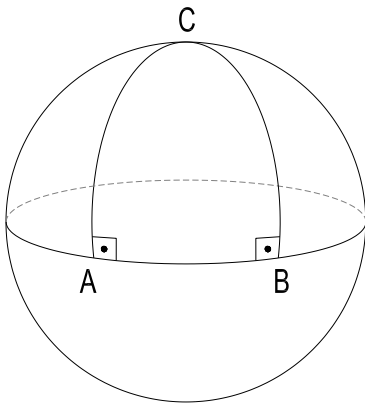
Bizám György: „Semmiből egy új, más világot teremtettem”. In Freud Róbert (szerk.): *Nagy pillanatok a matematika történetében*. Budapest, 1981, Gondolat.



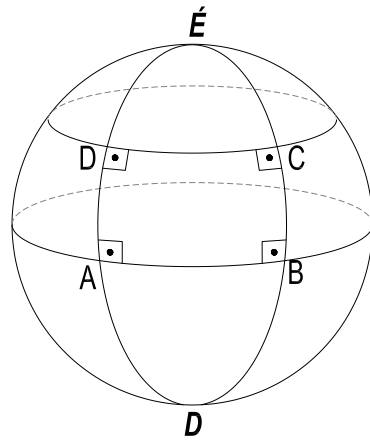
1.ábra



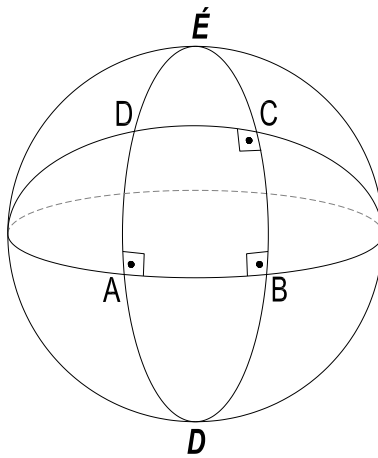
2.ábra



3.ábra



4.ábra



5.ábra