

A matematika és a zene

Öt évvel ezelőtt a Matematika Határok Nélkül versenyen a következő feladat szerepelt: „Aurélie pánsípot szeretne készíteni tíz sípból, melyek a dó-ré-mi-fá-szó-lá-ti-dó-ré-mi megszólaltatására alkalmasak. A legmélyebb hang megszólaltatására szolgáló síp 16 cm hosszú. Ha egy tetszőleges hosszúságú sípot megfelezünk, egy oktávval magasabban szóló hangot kapunk (pl. dó-dó). Ha egy tetszőleges hosszúságú síp $2/3$ -át vesszük, így egy kvinttettel magasabban hangzó síphoz jutunk (pl. dó-szó vagy ré-lá). Számítsátok ki a 10 síp hosszát, állítsátok nagyság szerinti sorrendbe, és rajzoljátok le eredeti nagyságban Aurélie pánsípját! Az egyes sípok átmérője 1 cm.”

A mi tanügyi rendszerünkben szenvedő diáknak és sodródó tanárnak szinte lehetetlen a feladatot megoldani. A versenyzőknek alapvető szolmizációs ismeretek szükségesek, és az, hogy rájöjjenek, az oda-vissza irányú oktáv és kvint lépésekkel el lehet jutni a dúr skála minden egyes fokához. A matematika részéről a törtekkel való műveletek mellett szükség lenne az egyiptomi törtek ismeretére és még sok-sok mindenre, ami a modern tankönyvbe még nem került be. Ellenben kimaradt az, hogy a diákokban lezajló felfedező tevékenység a tanulás legfontosabb része. Újra fel kéne fedezni, hogy a matematika művészet és a művészet matematika.

A fenti feladat megoldási vázlata a következő számítási sorrendet javasolja: dó-szó-ré 2-ré-lá-mi 2-mi-ti és dó-dó 2-fá.

A fizika törvénye szerint a frekvencia és a cső hossza fordítottan arányos, így ha egy tetszőleges hosszúságú sípot megfelezünk, egy oktávval magasabban szóló hangot kapunk (pl. dó-dó), tehát az oktávra jellemző hányados $2/1$. Ha egy tetszőleges hosszúságú síp $2/3$ -át vesszük, akkor egy kvinttettel magasabban hangzó síphoz jutunk (pl. dó-szó vagy ré-lá), tehát a kvintre jellemző hányados $3/2$. Hasonlóan a kvartra jellemző hányados $4/3$.

A dúr hangsor jellegzetessége a 2 egész, 1 fél, 3 egész, 1 fél azaz: CD hk (nsz), DE hk (nsz), EF hk (ksz), FG hk (nsz), GA hk (nsz), AH hk (nsz), HC hk (ksz) (ahol hk = hangköz és nsz = nagyszekund valamint ksz = kisszekund). Ha a CDEF (nsz – nsz – ksz) hangsort egy kvinttel feljebb ismétljük, akkor megkapjuk a GAHC hangsort. És íme a meglepetés!

Matematikailag ez egy csodálatos algebrai struktúra, amelyben a művelet a hangközök összetétele: nsz + nsz + ksz + nsz = (tiszt) kvint és nsz +

$nsz + ksz + nsz + nsz + nsz + ksz =$ oktáv. Az eredeti fél oktáv terjedelme a CF pedig $nsz + nsz + ksz =$ kvart. Hangközök összetétele esetén az arányszámok összeszorzódnak: kvint + kvart = oktáv, azaz $(3/2)(4/3) = (2/1)$.

A következő három hétfokú hangsor ismeretes: Püthagorasz (1, $9/8$, $81/64$, $4/3$, $3/2$, $27/16$, $243/128$, 2), Mayer (1, $9/8$, $81/64$, $4/3$, $3/2$, $27/16$, $15/8$, 2) és Baumgartner-Bolyai Farkas (1, $9/8$, $81/64$, $4/3$, $3/2$, $5/3$, $15/8$, 2).

A zenetudósokat évszázadokon át foglalkoztatja az a kérdés, hogy két félhang valóban egy egész hang, vagyis $ksz + ksz = nsz$? A zongorán alkalmazott egyenlő lebegésű temperálás igennel felel a kérdésre, mert a zongorán az oktáv az egyetlen tisztán maradó hangköz, még a kvint se tiszta. A hegedű húrjai kvintekben vannak hangolva, és az ebből adódó rezonanciák nemcsak hallatszanak, de meg látszanak is a húrokon. Tehát a hegedű nemmel felel a kérdésre. De a kérdés egyértelmű megválaszolása még várat magára.

Az algebrai struktúrákat már sikeresen használják a matematikával kapcsolatos más területeken is. Wigner Jenő 1931-ben *Csoportelméleti módszer a kvantummechanikában* címmel jelentette meg azt a könyvét, amiért 1963-ban megkapta a Nobel-díjat. Lánosz Kornél pedig sikeresen alkalmazta a struktúrák elméletét a fizikában.

Ha a matematika mai szintjén kifejlesztett struktúrák elméletének megkapják a zenei alkalmazását, akkor nemsokára olyan számítógépek kerülnek a forgalomba, amelyek megrendelésre végtelen sok „népdalt” és „szimfóniát” gyártanak. Hogy ennek a zenének mennyi kötődése lesz még a lélekhez, azt ma még nem tudjuk. De a 250 éve született Mozarttól tudjuk azt, hogy az igazi zene az isteni eredetű.