

BÜKKFÁK ÉVI NÖVEKEDÉSMENETÉNEK LEÍRÁSA SZIGMOID NÖVEKEDÉSI FÜGGVÉNYEKSEL

DESCRIPTION OF INTER-ANNUAL GIRTH GROWTH OF BEECH TREES BY SIGMOID GROWTH MODELS

Edelényi Márton¹, Pödör Zoltán², Jereb László³, Manninger Miklós⁴

¹Nyugat-magyarországi Egyetem, Faipari Mérnöki Kar, 9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky u. 9., edelenyim@inf.nyme.hu

²Nyugat-magyarországi Egyetem, Erdőmérnöki Kar, 9400 Sopron, Ady Endre út 5., podzol@emk.nyme.hu

³Nyugat-magyarországi Egyetem, Faipari Mérnöki Kar, 9400 Sopron, Bajcsy-Zsilinszky u. 9., jereb@inf.nyme.hu

⁴Erdészeti Tudományos Intézet, Ökológiai és Erdőművelési Osztály, 1027 Budapest, Frankel L. u. 1., manningerm@erti.hu

Összefoglalás. Tanulmányunkban azt vizsgáljuk, hogy mátrai bükkök éven belüli kerületnövekedési adataira az erdészeti szakirodalomban leggyakrabban alkalmazott három szigmoid függvény (logisztikus, Gompertz-, Richards-függvény) közül melyik illeszkedése a legmegfelelőbb. Az illesztett függvény jóságát az Akaike-súllyal (w), az illeszkedést pedig a korrigált determinációs együtthatóval jellemeztük. A hat fa 10 évnyi adatát évek és fák szerinti bontásban, illetve összevontan is értékeltük. Ezek alapján megállapítható, hogy mindhárom függvény jól használható ilyen típusú illesztési feladatokhoz, de a legjobb eredményt a Richards-függvény adja az Akaike-súlyt tekintve.

Abstract. Three widely used sigmoid growth models (logistic, Gompertz, Richards) were compared on inter-annual girth growth data of six dominant or co-dominant beech trees. In Mátra To choose the best model, we examined two statistical criteria: the Akaike-weight (w) and the modified coefficient of determination. The results were grouped by years (2002-2011) and trees, and the aggregated values were evaluated as well. We came to the conclusion that all the three models can be applied to the growth curve, but Richards model gave the best Akaike-weight.

Bevezetés. A természetben és a mesterséges környezetben számos olyan jelenséget ismerünk, melynek időbeli alakulása kezdetben exponenciális jellegű, azonban egy bizonyos szint fölött a folyamatok megfordulnak, lelassulnak. Erre példát szolgáltathatnak különböző gazdasági folyamatok is, de a fák éven belüli növekedésmenete is így jellemezhető.

Az erdészeti kutatásban többen is használtak a fák éven belüli növekedésmenetére illesztett görbéket, illetve azokból származtatott adatokat. Bouriaud et al (2005) lucfenyő növekedésmenetére illesztettek Gompertz-függvényt, s az így kapott görbét a mérethez tartozó dátum pontos meghatározására használták. Cufar et al. (2008) bükkfák évgyűrű-kialakulását, időbeli növekedését vizsgálták Gompertz-függvénnyel. Deslauriers et al. (2009) nemesnyár-fajták átmérő- és hossznövekedési adataira illesztettek Gompertz-függvényt, és ennek segítségével számolták ki az átlagos évi növekedést. Seo et al. (2011) erdeifenyők növekedésmenetét elemezték Gompertz-függvénnyel, miközben a függvényt az adatok szűrésére is alkalmazták. Jezik et al. (2011) szintén a Gompertz-függvényt alkalmazták bükkfák átmérőnövekedésének jellemzésére. A változás sebességét (a függvény első deriváltját) szintén vizsgálták, és mindkét esetben szoros illeszkedést állapítottak meg.

Sigmoid növekedési görbéket más irányú kutatásokban is alkalmaztak. Deslauriers és Morin (2005) balzsamfenyők sejtképzésének elemzéséhez Gompertz-függvényt használt. McCarthy és Weetman (2006) kor- és méreteloszlásokat vizsgáltak boreális erdőkben, és az újulat kor-átmérő, valamint kor-magasság viszonyát elforgatott Chapman-Richards szigmoid görbével közelítették. Petritan et al (2009) egy idős bükkös felújulási szintjének éves átmérő- és hajtáshossz-növekedését vizsgálták a

megvilágítás függvényében. A növekedési modellek közül a logisztikust, a Michaelisz-Menten-, a Gompertz- és a Chapman-Richards-függvényt hasonlították össze, és közülük a determinációs együttható (R^2) és az Akaike információs kritérium alapján a logisztikust találták a legjobbnak.

Tanulmányunkban azt vizsgáljuk, hogy mátrai bükkök éven belüli kerületnövekedési adataira a kiválasztott függvények közül melyik illeszkedése a legmegfelelőbb. Ismertetjük a felhasznált adatokat, az alkalmazott növekedési függvényeket, az illesztés módját és eredményeit.

Felhasznált adatok. A vizsgálatokhoz az Erdészeti Tudományos Intézet által működtetett intenzív erdészeti monitoring mátrai bükkösének 2002-2011 közötti adatait használtuk fel. A 100 éves bükkös kerületmérő szalaggal felszerelt kimagasló vagy uralkodó szintű fái közül a hat legjobb növekedést mutató fát választottuk ki. A heti gyakoriságú mérések eszköze a mellmagasságban felszerelt és Járó Zoltán által módosított Liming-féle szalag volt. Az éves adatsorból a vegetációs időszakot magába foglaló április 1. és október 31. közötti időszak adatait vontuk be az elemzésbe, hogy kizárólag a növekedéssel, a szervesanyag-képzéssel összefüggő méretváltozásokat vizsgáljuk. A bükk fafaj mellett azért döntöttünk, mert a legtöbb fafajtól eltérően évi növekedésmenete elég egyenletes, nincsenek benne nagy ugrások, törések, tehát függvény illesztésére jó lehetőséget teremt.

Közelítő függvények, illesztés, modellkiválasztás. A vizsgálatba bevont fák éven belüli növekedésmenete „S” alakot leíró, ún. telítődési (sigmoid) függvényekkel közelíthető (1. ábra). A telítődési függvények jellemzője, hogy a rövid, lassú kezdeti növekedés után egy intenzívebb szakasz következik, ami után a lassú, befejező nö-

vekedés egy telítődési ponthoz tart. A dinamikus növekedési folyamat a görbe inflexiós pontján fordul át a lassabb növekedésre. A telítődési függvénynek három jellegzetes, biológiai jelentéssel is bíró pontja van: az intenzív növekedés kezdete (λ), a növekedés meredeksége (μ), valamint a telítődési érték (A).

Az erdészeti kutatásban több növekedési függvényt is alkalmaznak, amelyekről először Zeide (1993) készített összefoglaló értékelést. Az alkalmazott függvényeket rendszerint az inflexiós pontok száma szerint lehet csoportosítani. Az 1. ábra alapján látható, hogy a bükkfák növekedésmenetét egy inflexiós pontú függvényekkel lehet közelíteni, melyek közül hármat választottunk ki: a logisztikus y_L , a Gompertz- (y_G) és a Richards-függvényt (y_R).

A telítődési görbék egy jelentős része (pl. a logisztikus) szimmetrikus görbét határoz meg, azonban sok esetben a vizsgált folyamatok nem ennyire szabályosak. A Gompertz-görbe nem szimmetrikus, inflexiós pontja előrébb, mintegy a telítődési szint harmadánál található. A Richards-függvény inflexiós pontjában felvett függvényértéket a ν paraméter értéke határozza meg.

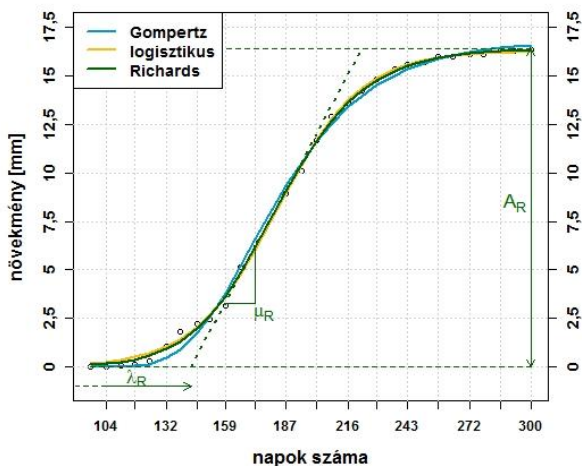
Az eredeti függvényparamétereknek csak matematikai jelentése van, kezdeti értéküket nehéz meghatározni, ezért Zwietering et al. (1990) a növekedési folyamat jellemzőit (λ, μ, A) kifejezte az alapmodell paramétereinek függvényeként, majd visszahelyettesítette azokat az eredeti képletbe:

$$y_L = \frac{a}{1 + e^{b-ct}} \rightarrow \frac{A}{1 + e^{(2+(\lambda-t)4\mu/A)}}$$

$$y_G = ae^{-e^{-(b-ct)}} \rightarrow Ae^{-e^{-(1+(\lambda-t)\mu\epsilon/A)}}$$

$$y_R = a(1 + ve^{k(\tau-t)})^{-1/\nu} \rightarrow A(1 + ve^{(1+\nu)e^{\mu/A(1+\nu)}(1+1/\nu)(\lambda-t)})^{-1/\nu}$$

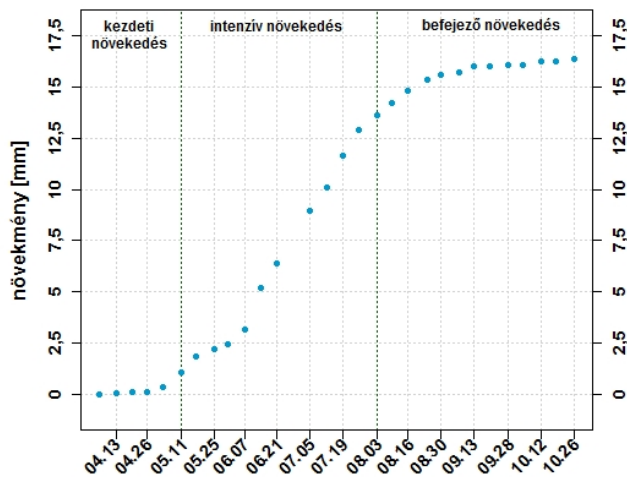
A mintaadatokra az illesztést az R szoftver (R Development Core Team, 2012) grofit csomagjával vé-



2. ábra:

A 2010-es növekedésmenetre illesztett függvények

geztük el. A grofit csomag magába foglalja a fenti függvényeket, a nemlineáris legkisebb négyzetes (Gauss-Newton) illesztést alkalmazza, és a kezdeti értékeket automatikusan határozza meg (Kahm et al., 2010). A modellek rangsorolása az Akaike módosított információs



1. ábra:

Az éven belüli növekedésmenet görbéje (22-es fa, 2010)

kritériumon alapuló súly (w) szerint történt. A kritérium információelméleten alapul, kompromisszumot keres a paraméterbecslésből származó torzítás (bias) és a variancia között, továbbá bünteti a több paraméter használatát. A w értéke valószínűségként is értelmezhető, azt mutatja, hogy az adott adatok alapján a modell mennyire közelíti jól a folyamatot (Burnham, Anderson, 2002). Az R szoftverben a w értékét az AICcmodavg bővítménnyel számoltuk (Mazerolle, 2012). Az illeszkedés jóságát a korrigált determinációs együtthatóval (R^2) jellemeztük, ami a w -hez hasonlóan figyelembe veszi a paraméterek számát is.

1. táblázat: A 2010-es növekedésmenetre illesztett függvények paramétereit és modellértékelési jellemzőit

22-es fa adatai (2010)	λ	μ	A	w	R^2
Gompertz (G)	141	0,20	16,84	0,00	0,9971
logisztikus (L)	145	0,21	16,27	0,24	0,9987
Richards (R)	143	0,21	16,39	0,76	0,9989

Eredmények. A vizsgált függvényeket a 22-es fa 2010-es növekedésmenetén szemléltetjük (2. ábra). Az ábrán bejelöltük a Richards-függvény paramétereit is. A 2010-es évhez tartozó számítási eredményeket összefoglaló 1. táblázat alapján az látszik, hogy az Akaike-súly szerint ($w=0,76$) a Richards-függvény adja a legideálisabb illesztést. Az illeszkedések jóságát a statisztikában elfogadot R^2 értékkel jellemezve mindegyik modell elég pontos közelítést ad. A kapott paraméterértékek elemzésekor megállapítható, hogy a növekedés kezdetére pár nap különbség jön ki: a Gompertz-függvény szerint indul be a növekedés a legkorábban ($\lambda=141$), míg a logisztikus függvény szerint a legkésőbb ($\lambda=145$). A növekedés

mértékét jelző paraméter (A) esetében a legnagyobb értéket a Gompertz-, a legkisebbet a logisztikus függvény adja. A legnagyobb és a legkisebb érték között a különbség mindössze 0,57 mm, ami nem túl jelentős, alig 4%-nyi eltérés. A növekedés meredeksége (μ) mindhárom modell esetében gyakorlatilag azonosnak tekinthető.

Gompertz-, illetve a Richards-függvény adta a legjobb eredményeket. Látható az is, hogy csupán egyetlen olyan év volt (2006), amikor a logisztikus függvény jobb eredményt adott a másik két modellhez képest. A vizsgált 10 évben négy alkalommal a Richards-, két esetben a Gompertz-, egyszer a logisztikus függvény mutatta a leg-

2. táblázat: Modellillesztési eredmények évek szerinti bontásban

évek alapján ($n=6$)		2003	2002	2004	2005	2006	2007	2008*	2009	2010	2011
G	legjobb modell	0	3	0	2	1	3	3	3	4	4
	w átlag	0,06	0,53	0,26	0,34	0,19	0,44	0,37	0,45	0,49	0,56
	\hat{R}^2 átlag	0,9958	0,9956	0,9978	0,9979	0,9918	0,9970	0,9986	0,9966	0,9978	0,9978
L	legjobb modell	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0
	w átlag	0,00	0,00	0,00	0,01	0,36	0,03	0,00	0,04	0,04	0,00
	\hat{R}^2 átlag	0,9880	0,9899	0,9967	0,9967	0,9929	0,9953	0,9953	0,9942	0,9959	0,9960
R	legjobb modell	6	3	6	4	2	3	4	3	2	2
	w átlag	0,94	0,47	0,74	0,65	0,45	0,53	0,63	0,51	0,47	0,44
	\hat{R}^2 átlag	0,9968	0,9958	0,9983	0,9983	0,9933	0,9973	0,9987	0,9968	0,9982	0,9980

A hat fa összes növekedésmenetére vonatkozó számítások eredményeit a 2-4. táblázatokban foglaljuk össze. A 2. táblázatban évek (2002-2011), a 3. táblázatban fák szerinti bontásban adjuk meg az adatokat, míg a 4. táblázat összevontan tartalmazza az összes esetre vonatkozó eredményeket.

A legjobbnak nevezett modell kiválasztása, ahogyan azt már korábban említettük, az Akaike módosított információs kritériumon alapuló súly (w) alapján történt. A modellek jóságát és illeszkedését jellemző paraméterek (w és R^2) átlagos értékén az adott modell teljes mintaszámra (hat fára vagy 10 évre) vonatkozó értékeinek átlagát értjük, tehát nem csak azoknak az átlagát, mikor az adott modell a legjobb illeszkedést adta. Ezek alapján vizsgálható, hogy:

- az egyes években a három modell közül melyik hány faegyednél mutatta a legjobb illeszkedést (évek szerinti bontás)
- az egyes faegyedek esetében a 10 év alatt melyik görbe hány alkalommal bizonyult jobbnak a többinél (fák szerinti bontás).

A 2. táblázat adatai alapján például megállapítható, hogy 2002-ben mind a hat fánál a Richards-függvény volt a legjobb modell. Ugyanakkor 2009-ben 3-3 fára a

jobb illeszkedést a fák többségére. Három évben pedig a Gompertz- és Richards-függvény is azonos számú (3-3) fára bizonyult a legjobbnak. Az Akaike-súly átlagát figyelembe véve az évek többségében (7 esetben) a Richards-függvény volt a legjobb, míg a többi esetben a Gompertz. A logisztikus modell egyik évben sem volt jobb, mint a másik kettő.

A fák szerinti bontásban (3. táblázat) a Richards négyeszer (4, 19, 22 és 26-os fák), a Gompertz két esetben (2, 21-es fák) tekinthető a legjobbnak. Az Akaike-súlyokból képzett átlagok szempontjából egyértelműen a Richards-függvény adja a legjobb eredményt.

Az elvégzett 60 illesztés összevont eredményei alapján (4. táblázat) megfogalmazható, hogy a három vizsgált függvény közül a logisztikus adta a leggyengébb eredményeket, a Gompertz- 23, míg a Richards-függvény 35 esetben bizonyult a legjobbnak. Ugyanakkor az illeszkedés jóságát tekintve a logisztikus függvény is alkalmas az ilyen jellegű feladatra.

Konklúzió. A vizsgálatba bevont három függvény mellett más hasonló modelleket is említ a szakirodalom, azonban a kiválasztottak fordulnak elő leggyakrabban az ilyen jellegű feladatokban. A függvények illesztésével célunk az volt, hogy az egyébként diszkrét adatsorokat folytonossá tegyük. Ez lehetőséget nyújt arra, hogy a hiányzó értékeket pótolhassuk, megkönnyíti a kiugró adatok ellenőrzését, minősítését, illetve ha szükséges, akkor javítását. Az előállított görbe jellegzetes szakaszainak, pontjainak (pl. intenzív növekedés kezdete és vége, inflexiós pont) egzakt meghatározása segítséget nyújthat a növekedés és a környezeti tényezők összefüggéseinek vizsgálatához is.

A vizsgálatokból megállapítható, hogy a korrigált determinációs

3. táblázat: Modellillesztési eredmények fák szerinti bontásban

fák alapján ($n=10$)		2	4	19	21	22	26*
G	legjobb modell	6	2	4	6	2	3
	w átlag	0,41	0,26	0,48	0,50	0,16	0,41
	R^2 átlag	0,9973	0,9946	0,9970	0,9972	0,9974	0,9967
L	legjobb modell	1	1	0	0	1	0
	w átlag	0,07	0,07	0,00	0,01	0,11	0,03
	R^2 átlag	0,9950	0,9926	0,9919	0,9935	0,9975	0,9940
R	legjobb modell	3	7	6	4	7	8
	w átlag	0,52	0,67	0,52	0,50	0,73	0,56
	R^2 átlag	0,9977	0,9951	0,9973	0,9974	0,9985	0,9969

együtthatható alapján a három módszer között nincs számottevő különbség, bármelyik alkalmas lehet az illesztési feladatok elvégzésére. A módszerek között az Akaike-súly alapján már jelentősebb eltérés figyelhető meg. A vizsgált bükkfák növekedésmentére mind a legjobb modell gyakorisága, mind az Akaike-súly alapján a legjobb illeszkedést a Richards-függvény mutatja.

4. táblázat: Összevont modellillesztési eredmények

összes együtt (n=60) *	G	L	R
legjobb modell	23	3	35
w átlag	0,37	0,05	0,58
R ² átlag	0,9967	0,9941	0,9971

Irodalom

- Bouriaud, O., Leban J.-M., Bert, D. and Deleuze, C., 2005: Intra-annual variations in climate influence growth and wood density of Norway spruce. *Tree Physiology* 25, 651–660
- Burnham, K. P. and Anderson, D. R., 2002: Model Selection and Multi-Model Inference. *Springer Verlag*
- Cufar, K., Prislan, P., de Luis, M. and Gricar, J., 2008: Tree-ring variation, wood formation and phenology of beech (*Fagus sylvatica*) from a representative site in Slovenia, SE Central Europe. *Trees* 22, 749–758
- Deslauriers, A. and Morin, H., 2005: Intra-annual tracheid production in balsam fir stems and the effect of meteorological variables. *Trees* 19, 402–408
- Deslauriers, A., Giovannelli, A., Rossi, S., Castro, G., Fragnelli, G. and Traversi, L. 2009: Intra-annual cambial activity and carbon availability in stem of poplar. *Tree Physiology* 29, 1223–1235
- Jezik, M., Blazeneca, M., Strelcova, K. and Ditmarova, L., 2011: The impact of the 2003–2008 weather variability on intra-annual stem diameter changes of beech trees at a submontane site in central Slovakia. *Dendrochronologia* 29, 227–235
- Kahm, M., Hasenbrink G., Lichtenberg-Frate, H., Ludwig, J. and Kschischo, M., 2010: Fitting Biological Growth Curves with R. *Journal of Statistical Software* 33, 1–21
- Mazerolle, M. J., 2012: Model selection and multimodel inference based on (Q)AIC(c). <http://CRAN.R-project.org/package=AICcmodavg>
- McCarthy J. W. and Weetman, G., 2006: Age and Size Structure of Gap-Dynamic, Old-Growth Boreal Forest Stands in Newfoundland. *Silva Fennica* 40, 209–230
- Petritan, A. M., von Lupke, B. and Petritan, I. C., 2009: Influence of light availability on growth, leaf morphology and plant architecture of beech (*Fagus sylvatica* L.), maple (*Acer pseudoplatanus* L.) and ash (*Fraxinus excelsior* L.) saplings. *European Journal of Forest Research* 128, 61–74
- R Development Core Team, 2012: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, <http://www.R-project.org>
- Seo, J.-W., Eckstein, D., Jalkanen, R., and Schmitt, U., 2011: Climatic control of intra- and inter-annual wood-formation dynamics of Scots pine in northern Finland. *Environmental and Experimental Botany* 72, 422–431
- Zeide, B., 1993: Analysis of Growth Equations. *Forest Science* 39, 594–616
- Zwietering, M. H., Jongenburger I., Rombouts F. M., and Van't Riet K., 1990: Modeling of the Bacterial Growth Curve. *Applied and Environmental Microbiology* 56(6), 1875–1881