

# Az Inverziós Fourier-transzformáció néhány meglepő tulajdonsága

M. I. M. ABDELAZIZ<sup>1,2</sup>, VASS P.<sup>1</sup>, DOBRÓKA M.<sup>1,@</sup>

<sup>1</sup>Miskolci Egyetem, Geofizikai Intézeti Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros

<sup>2</sup>Department of Geology, Mansoura University, 35516 Mansoura- El Gomhouria St., Egypt

@E-mail: dobroka@uni-miskolc.hu

Az időtartományban mért jelek frekvenciatartománybeli feldolgozásának alapját a Fourier-transzformáció (FT) képezi. Ennek számítógépen megvalósítható speciális esete a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) széles körben alkalmazott eljárás, ám az eredményeinek felhasználásakor figyelembe kell venni, hogy a mérési zajokra nagyon érzékenyen reagál. A Fourier-transzformációt inverziós feladatként értelmezve, a zajokkal szemben rezisztens viselkedést biztosító módszer állítható elő. Az eljárás alapja a komplex spektrum sorfejtéses diszkrétizációja, amelynek együtthatóit túlhatarozott inverz feladat keretében határozzuk meg. Bemutatjuk az Hermite-függvényrendszerrel diszkrétizált frekvenciaspektrum meghatározására szolgáló inverziós Fourier-transzformáció két alapvető algoritmusának a legkisebb négyzetek elve szerinti inverziós Fourier-transzformáció (LSQFT) és a Steiner-súlyokkal robusztifikált, az iteratív újrásúlyozás elve szerinti Fourier-transzformáció (IRLSFT) figyelemre méltó új tulajdonságait: a zajcsökkentő hatást, a nem egyenközűen, (vagy akár véletlenszerűen) mintavételezett, ill. hiányos adatrendszer feldolgozására való alkalmasságot.

## M. I. M. Abdelaziz, Vass, P., Dobróka, M.: Inversion-based Fourier Transformation – several benefits

Fourier transform (FT) plays a determining role in geophysical data processing. The discrete Fourier transform (DFT) is extensively used as a computer application. The Fourier transform itself is very sensitive for the noise contaminating the measurement data. Interpreting the Fourier transform as an inverse problem a new FT method can be constructed providing sufficient resistance to noises. The essential step of the inversion-based Fourier transformation procedure is the series expansion of the complex spectrum. The expansion coefficients play the role of the unknown parameters to be determined in the framework of an overdetermined inverse problem. We present the most important features of the inversion-based Fourier transform methods: the noise reduction capability and its applicability in processing non equidistantly sampled or even incomplete datasets.

*Beérkezett:* 2022. július 22.; *elfogadva:* 2022. szeptember 12.

## 1. Bevezetés

A geofizikai adatfeldolgozás területén a Fourier-transzformáció igen fontos szerepet játszik, hiszen segítségével az idő/tér-tartományban mért jel viselkedését a frekvencia/térfrekvencia-tartományban tanulmányozhatjuk. A geofizikai mérési gyakorlatban a komplex frekvenciaspektrum meghatározására – diszkrét időtartománybeli adatsorok esetén – alkalmazott eszköz a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT), ill. annak speciális számítógépes változata, a gyors Fourier-transzformáció (FFT). Ezek az algorit-

musok a jel spektrumát igen pontosan közelítik abban az esetben, ha a mintavételi közt és a regisztrálási tartományt megfelelően választjuk meg, ill. ha a vizsgált jelünk (mért adatrendszer) hibáktól mentes. A mérési adataink azonban mindig valamilyen zajjal terheltek, és erre a Fourier-transzformáció (valamint annak diszkrét implementációja) igen érzékenyen reagál. Mivel a Fourier-transzformáció lineáris leképezés, az idő/tér-tartományban jelentkező zaj is közvetlenül leképeződik a frekvenciatartományba. Ennek eredményeképpen a számított frekvenciaspektrum is zajos lesz. A zaj hatásának csökkentésére a digitális

jelfeldolgozásban különböző szűrési technikák alkalmazása szokásos. A ME Geofizikai Tanszékének kutatói a sorfejtéses inverzió módszerét fejlesztették ki, amellyel a mérésből eredő zaj mértéke hatékonyan redukálható. Az eljárást számos területen alkalmazták, így pl. geoelektromos problémák megoldására (Baracza et al. 2018, Gyulai et al. 2013, Gyulai et al. 2012).

A sorfejtéses inverzió alkalmazásának egyik első eredményeként sikerült a Fourier-transzformációt túlhatározott lineáris inverz feladat megoldására visszavezetni egydimenziós esetben (Dobróka, Vass 2006). Az eljárás lényege, hogy a frekvenciaspektrumot alkalmasan megválasztott függvényrendszer szerinti sorfejtéssel közelítve, a véges tagból álló sor tagjai sorfejtési együtthatóinak, az inverz feladat ismeretlen paramétereinek a meghatározása révén juthatunk el a kívánt célhoz. A programok formájában is kifejlesztett algoritmusok a legkisebb négyzetek (LSQ) és az iteratív újraszűrés (IRLS) módszereit használták fel az inverz feladat megoldásához. Az utóbbi változat rezisztenciája a kiugró zajokkal szemben már az első tesztek során megmutatkozott. Az értelmezési tartománya miatt kedvezőnek mutató Hermite-függvények rendszere alkalmazásával kapcsolatban akkor még gondot jelentett a tagfüggvények inverz Fourier-transzformáltjainak számítása, amit numerikus integrálással kezeltünk. Később ennek a problémának a hatékonyabb megoldására találtunk analitikus formulát, amellyel azonban még nem közvetlenül lehetett számítani a kívánt integrálok értékeit. Az Hermite-polinomokat alkotó hatványfüggvények és a függvényrendszer súlyfüggvénye szorzatainak inverz Fourier-transzformáltjait tudtuk számítani közvetlenül, és rekurziós algoritmussal képeztük ezekből a tagfüggvényekre vonatkozó integrálok értékeit. Ennek az eljárásnak az alkalmazása azonban már jelentősen javított a gyorsaságon és az eredmények minőségén (Vass, Dobróka 2009a, Vass, Dobróka 2009b). Az addig elért eredmények összegzéséből készült doktori értekezés (Vass 2010) részletesen ismerteti az Hermite-függvénysor alkalmazásán alapuló módszereket (HLSQFT, HIRLSFT Cauchy-súlyozással), valamint az intervallumonként konstans függvényekre és a Dirac-féle delta-függvények sorozatára épülő inverziós Fourier-transzformációs algoritmusokat is.

Vizsgálatok tárgyát képezte a későbbiekben a HLSQFT algoritmuson alapuló módszer (Vass 2012) és a HIRLSFT algoritmus továbbfejlesztéseként kidolgozott ún. Steiner-súlyokat alkalmazó változat zajcsökkentő képessége (Szegedi, Dobróka 2012, Szegedi, Dobróka 2014a). A számítási pontosság és gyorsaság szempontjából újabb és jelentős javulást hozott a skálázott Hermite-függvények inverz Fourier-transzformáltjainak közvetlen számítására szolgáló analitikus formulák matematikai levezetése. Ennek kulcsa az Hermite-függvények speciális tulajdonságában rejlik, ugyanis ezek a függvények az inverz Fourier-transzformáció sajátfüggvényei (Dobróka et al. 2012).

Az alkalmazási lehetőségek irányába mutató fejlesztés új lendületet kapott. Kiemelhető a Hilbert-transzformált előállítás (Szegedi, Dobróka 2014b), valamint az inverziós

alapú kétdimenziós Fourier-transzformáció kifejlesztése (Szegedi 2015). Ennek két változatát vezették be a skálázott Hermite-függvényrendszer kétdimenziós kiterjesztésén alapulva. Az inverz feladat megoldásában az LSQ és az IRLS módszereket használó változatok rövidítései: 2D HLSQFT és 2D HIRLSFT. Az utóbbinak – az újra súlyozáshoz alkalmazott különböző súlyszámítási megoldások szerint – további változatai léteznek (pl. Cauchy-súlyozás, Steiner-súlyozás). Sikeresen alkalmazták a Steiner-súlyokkal működő 2D HIRLSFT algoritmust mesterségesen felvett mágneses hatóra számított mágneses anomália-pólusra redukálásában, először egyenközzel mintavételezett adatrendszerek esetében (Dobróka et al. 2017). Ezt követően a nem egyenközzel mintavételezett adatrendszereknél végzett vizsgálatok is sikeres eredményeket hoztak zajmentes és zajos viszonyok modellezése esetén egyaránt (Nuamah, Dobróka 2018, Nuamah, Dobróka 2019).

Az inverziós Fourier-transzformáció továbbfejlesztésének és alkalmazásának legújabb tudományos eredményei, a Legendre-polinomok rendszerén alapuló sorfejtés bevezetése egydimenziós és kétdimenziós esetekben (LLSQFT, LIRLSFT, 2D LLSQFT, 2D LIRLSFT), az Hermite-függvények rendszerén alapuló régebbi változat (HLSQFT) skálaparaméterének optimalizálására szolgáló algoritmus kidolgozása, valamint további sikeres vizsgálatok a HLSQFT és a HIRLSFT egy- és kétdimenziós változataival (Nuamah 2020). Az utóbbiak közül kiemelkednek a valódi mágneses anomália-térképből származó adatrendszereken végzett pólusra redukálási tesztek (Vass, Nuamah, 2021).

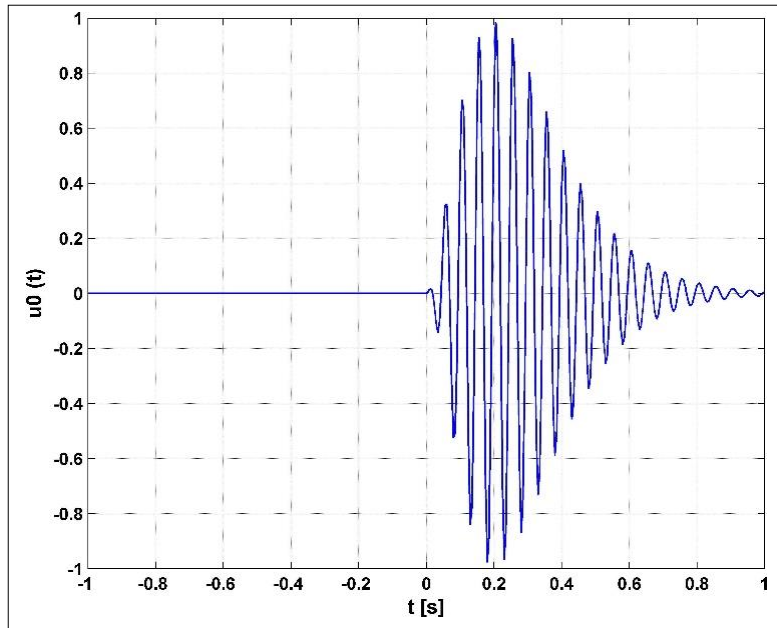
Az inverziós feladatmegoldáson alapuló Fourier-transzformációs algoritmusok (HLSQFT, HIRLSFT) jelentős zajnyomó tulajdonságot mutatnak mind 1D (Vass, Dobróka 2009b), mind 2D (Dobróka et al. 2017) esetben. A spektrum sorfejtéses diszkretizálásának köszönhetően az inverziós Fourier-transzformáció nem igényel egyenközzel mintavételt (Vass, Nuamah 2020). Ezt a tulajdonságot részleteiben tovább vizsgálta PhD-értekezésében Abdelaziz (2022), kutatásait hiányos adatrendszerekre is kiterjesztve. A jelen publikációban az inverziós Fourier-transzformáció tulajdonságait összefoglalóan mutatjuk be, így röviden megemlítjük a korábbi publikációkban már közölt eredményeket is. Ahol erre lehetőség van, ott összehasonlítjuk az új eredményeket a DFT alkalmazásával származtatott eredményekkel.

## 2. Az inverziós Fourier-transzformáció tulajdonságai egydimenziós jel esetében

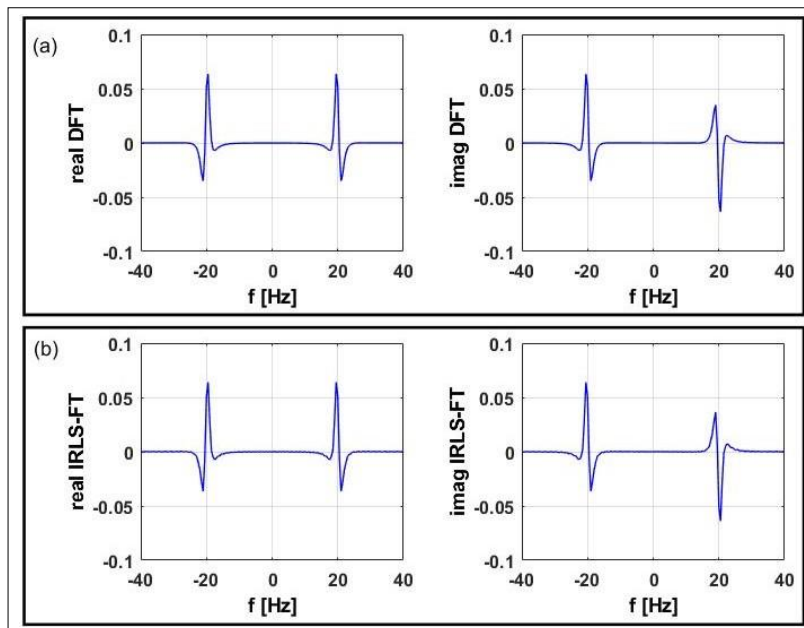
Alábbi vizsgálataink céljából egy idősort generálunk a Morlet-wavelet

$$u(t) = kt^n e^{-\lambda t} \sin(\mu t + \Phi)$$

formulája szerint. A reguláris mintavétel 0,005 másodpercenként történik a  $[-1, +1]$  intervallumon  $N = 401$  pontban (1. ábra). A jel DFT és HIRLSFT módszerekkel számított spektrumát a 2. ábra mutatja.



1. ábra | Egyenközűen mintavételezett zajmentes jel  
 Figure 1 | Noise-free wavelet in the time domain



2. ábra | Az 1. ábrán bemutatott jel frekvenciaspektrumának valós és képzetes részei két eltérő módszerrel számítva: (a) DFT, (b) HIRLS-FT.  
 Figure 2 | Real and imaginary components of the frequency spectrum for the signal shown in Fig. 1. The results are obtained by the application of two different methods: (a) DFT, (b) HIRLS-FT

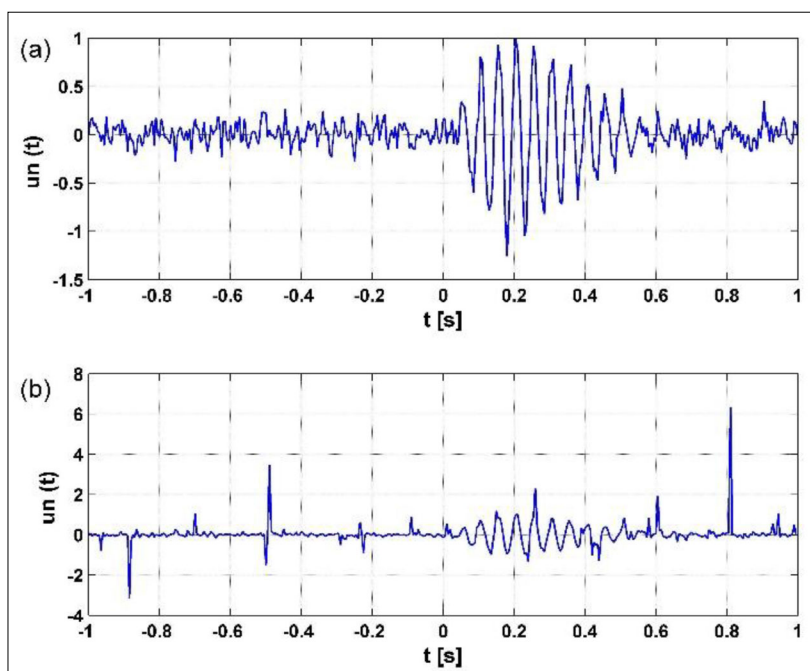
Numerikus vizsgálataink pontosságát ezekhez az alapokhoz viszonyítjuk a

$$d = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [u^{\text{alap}}(t_i) - u^{\text{vizsgált}}(t_i)]^2}$$

távolságformula alapján. A frekvenciatartományban a távolságot hasonlóan számítjuk:

$$D = \left[ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( \text{Re}[U^{\text{vizsgált}}(f_i)] - \text{Re}[U^{\text{alap}}(f_i)] \right)^2 + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left( \text{Im}[U^{\text{vizsgált}}(f_i)] - \text{Im}[U^{\text{alap}}(f_i)] \right)^2 \right]^{1/2}$$

A zajérzékenység vizsgálatára az adatrendszert 0,01 szórással, zéró várható értékű Gauss-eloszlás alapján generált



3. ábra (a) Gauss-zajjal terhelt adatrendszer, (b) Cauchy-zajjal terhelt adatrendszer

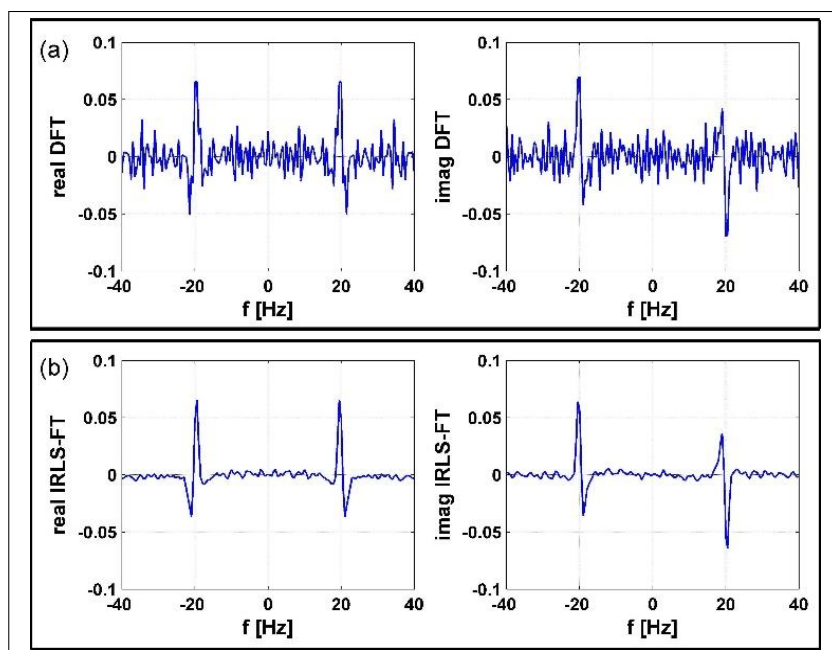
Figure 3 (a) Gaussian noise-contaminated wavelet in the time domain, (b) Cauchy noise-contaminated wavelet in the time domain

zajjal terheltük (3a ábra). Kiugró adatokat tartalmazó adatrendszer szimulálására Cauchy-eloszlást követő zajt adtunk a jelhez. Az így kapott zajos jel 3b ábrán látható.

A zajmentes adatrendszertől számított távolság a Gauss-zajjal terhelt adatrendszer esetében  $d = 0,1032$ . A kiugró adatokat tartalmazó adatrendszernél már jóval nagyobb,  $d = 0,4554$  értéket kaptunk.

### 2.1. Az inverziós Fourier-transzformáció zajérzékenysége egydimenziós esetben

Az inverziós Fourier-transzformáció egyes változatainak (HLSQFT, HIRLSFT) zajérzékenységét PhD-értekezésükben Vass (2010) és Szegedi (2015) részletesen vizsgálták, itt csupán egy példával szemléltetjük ezt a tulajdonságot.



4. ábra (a) A Cauchy-zajjal terhelt adatrendszer DFT spektruma, (b) A Cauchy-zajjal terhelt adatrendszer IRLSFT spektruma

Figure 4 (a) DFT spectrum of the Cauchy noise-contaminated signal, (b) IRLSFT spectrum of the Cauchy noise-contaminated signal

A Gauss-eloszlású zajos adatrendszer spektrumának távolságát a zajmentes jel spektrumától vizsgálva, a DFT módszer alkalmazásával  $D = 0,0041$ -es értéket kapunk, míg az IRLSFT használatával az érték  $D = 0,0027$ -re csökken. (Mivel a vizsgálatok során a spektrum diskretizációja Hermite-függvényekkel történik, a módszerek rövidített neveiben a H-betűt elhagyjuk.)

A kiugró zajjal terhelt adatrendszer spektrumának számításában a két eljárás jelentősen eltérő eredményt ad a 4. ábra tanúsága szerint. A Cauchy-eloszlású zajos adatrendszer spektrumát a DFT módszer  $D = 0,0182$ , míg az IRLSFT  $D = 0,0021$  távolsággal adja vissza a zajmentes jel spektrumához képest, azaz a Steiner-súlyokkal robusztifikált inverziós Fourier-transzformáció közel egy nagyságrenddel jobb zajelnyomást mutat a hagyományos DFT-hez viszonyítva.

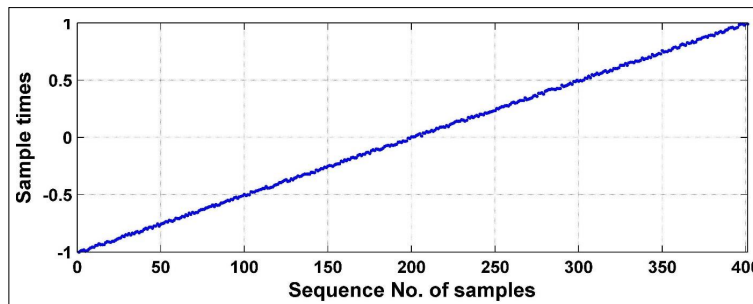
A terepi munkában gyakran előfordul, hogy egyes helyeken a mérés nem végezhető el. Ekkor egy közeli, de az egyenközű mintavételtől eltérő pontban mérünk (nem egyenközű mintavétel), vagy a mérési pontot kihagyjuk

(hiányos adatrendszer). Mindkét esetet vizsgáljuk meg az inverziós Fourier-transzformáció szempontjából!

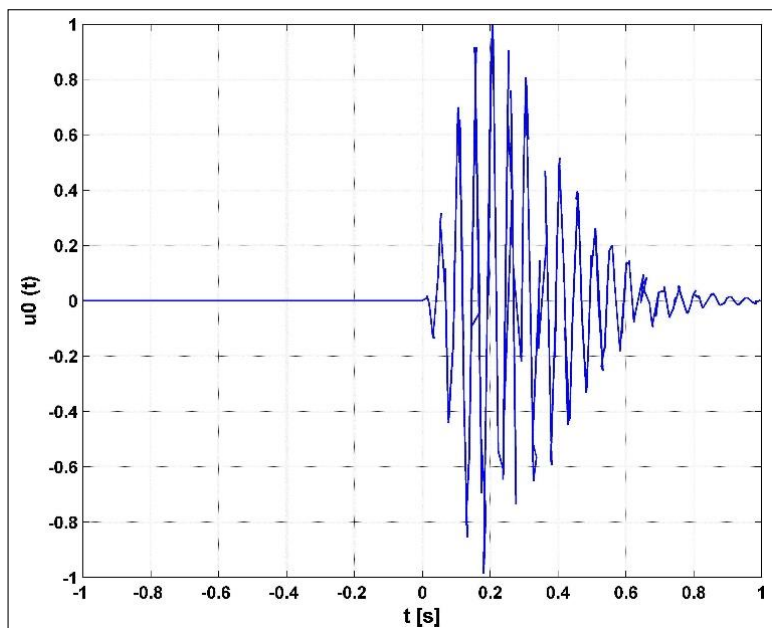
2.2. Az inverziós Fourier-transzformáció viselkedése nem egyenközűen mintavételezett egydimenziós adatrendszer esetén

Ezt a problémát Nuamah (2020) PhD-értekezésében részletesen vizsgálta, a főbb eredményeket Nuamah és Dobróka (2019) publikálta. A jelen dolgozatban csupán két példán keresztül mutatjuk be az IRLS-FT viselkedését egydimenziós (1D) adatrendszer esetén: a) az egyenközű rendszerben definiált pontoktól jobbra és balra a mintavételi közökön belül véletlenszerűen felvett mérési pontok, ill. b) teljesen véletlen (ún. random walk) mérési elrendezés esetén.

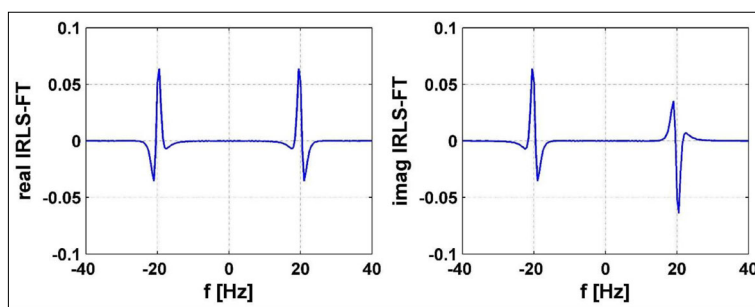
Az a) esetben a mintavételi pontok véletlen ingadozását az 5. ábra, a nem egyenközű mintavételhez tartozó zajmentes időfüggvényt a 6. ábra mutatja



5. ábra | Nem egyenközűen felvett mintavételi pontok  
Figure 5 | Plot of randomly sampled measuring points



6. ábra | Nem egyenközűen mintavételezett időfüggvény  
Figure 6 | Non-regular sampling wavelet in the time domain



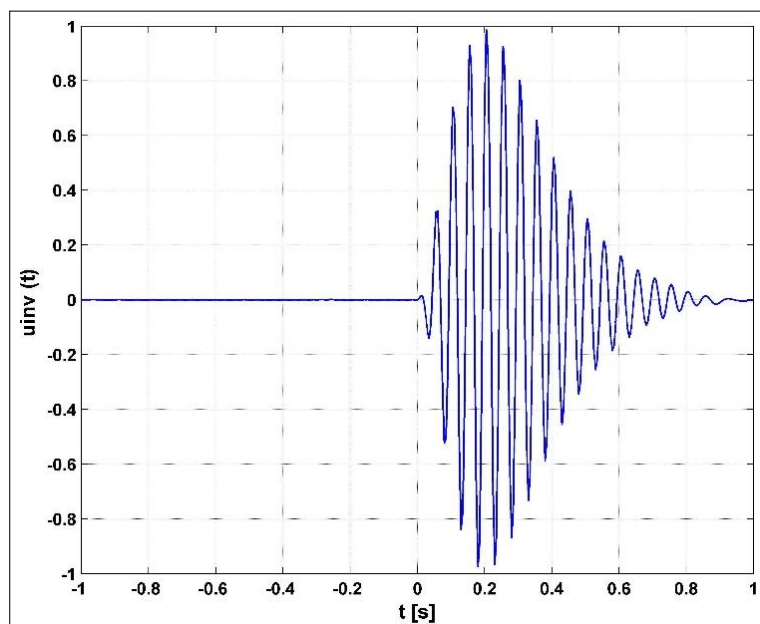
7. ábra | Nem egyenközűen mintavételezett időfüggvény IRLSFT-spektruma

Figure 7 | IRLSFT spectrum of the signal non-regularly sampled in time domain

A 6. ábrán látható idősor IRLSFT inverziós Fourier-transzformáltját számítva a sorfejtési együtthatókat állítjuk elő, melyek ismeretében a bázisfüggvényeként választott Hermite-függvények segítségével a spektrumot tetszőleges frekvencián számíthatjuk. A 7. ábra a számított spektrumot szemlélteti. Mint látható, a kép megegyezik a 2b ábrán bemutatott eredménnyel, azaz az időtartományban jelentke-

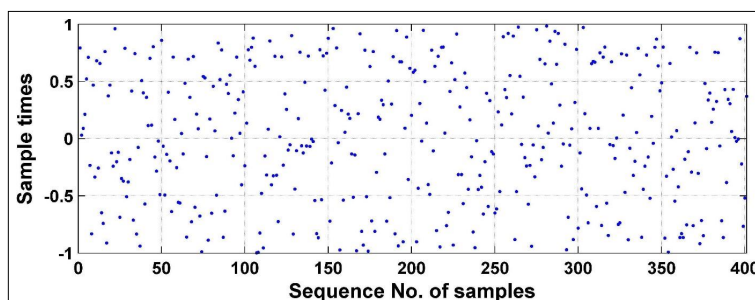
ző nem egyenközű mintavétel az eredményt érdemben nem befolyásolta a frekvenciatartományban.

A számított spektrum alapján inverz Fourier-transzformációval az időfüggvény is előállítható, amit a 8. ábrán egyenközű mintavétellel számítva mutatunk be. Az eredmény így az 1. ábrával hasonlítható össze. A két idősor között az adattávolság  $d = 0,00018$ .



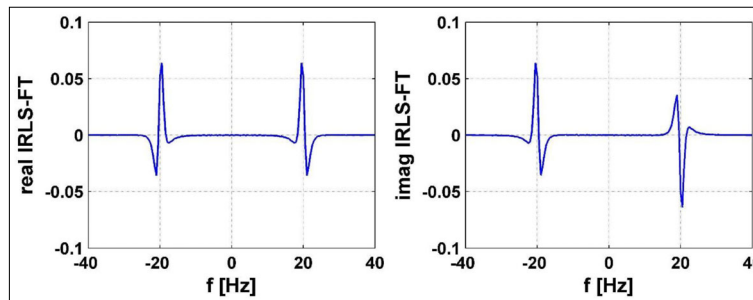
8. ábra | Az IRLSFT-vel számított spektrumból időtartományba visszatranszformált jel

Figure 8 | The wavelet signal transformed back in time domain from the spectrum computed by IRLSFT



9. ábra | A random walk mérési rendszerben felvett mintavételi pontok

Figure 9 | The randomized measuring points used for random walk wavelet generation



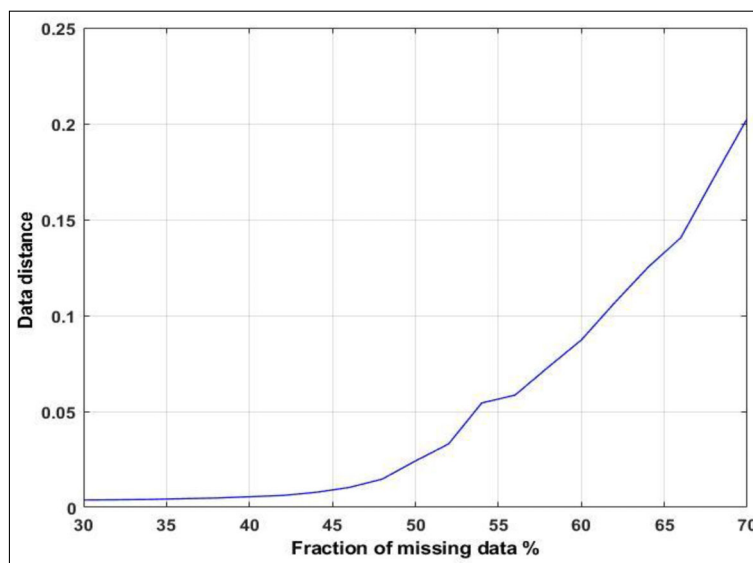
10. ábra | A random walk mérési rendszerben mintavételezett időfüggvény IRLSFT-spektruma  
 Figure 10 | IRLSFT spectrum of the randomly sampled signal

A nem egyenközű mintavételezés b) esetében minden mintavételi pontot a  $[-1, 1]$  intervallumban felvett (egyenletes eloszlású) véletlen számként állítottunk elő (random walk). A mintavételi pontokat a 9. ábra, az IRLSFT eljárással (frekvenciatartományban egyenközű) számított spektrumot a 10. ábra mutatja. A spektrum alapján inverz Fourier-transzformációval az időfüggvényt is előállíthatjuk, ennek távolsága az 1. ábrán felvett jeltől  $d = 0,00024$ .

### 2.3. Az inverziós Fourier-transzformáció viselkedése hiányosan mintavételezett egydimenziós adatrendszer esetén

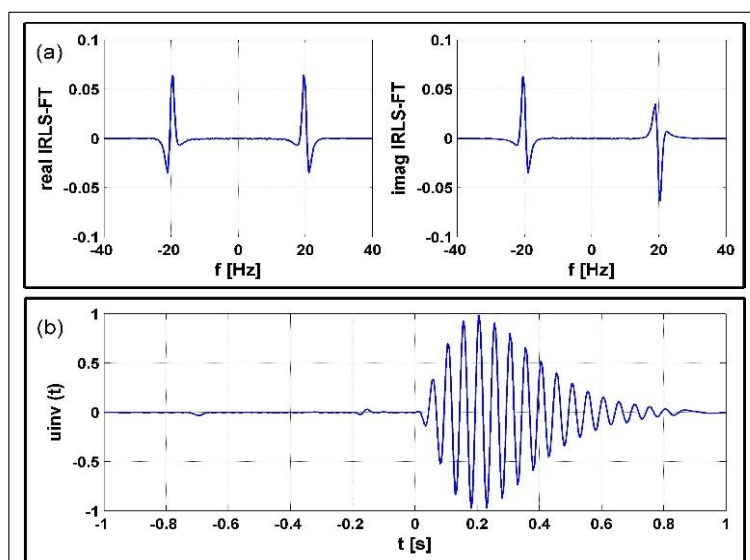
A terepi munkában előfordulhat, hogy egyes helyeken a mérési adat hiányzik. A hiányos adatrendszer Fourier-transzformáltjának meghatározása egyenközű és teljes adatrendszert igénylő eljárással (pl. FFT) nem lehetséges. Az alábbiakban megvizsgáljuk az inverziós alapú Fourier-transzformáció (IRLSFT) alkalmazhatóságát ilyen esetben. Elsőként tételezzük fel, hogy a hiányos adatrendszer

létező elemei egyenközű mintavételi pontokból származnak! Numerikus vizsgálataink számára az 1. ábrán bemutatott adatrendszer elemei közül véletlenszerűen kiválasztott pontokban töröljük az adatok meghatározott hányadát, majd az így előálló hiányos adatrendszeren alkalmazuk az IRLSFT eljárást  $M = 120$  ismeretlen sorfejtési együtthatóval. A túlhatározott inverz feladat megoldásaként kapott sorfejtési együtthatók ismeretében a bázisfüggvényeként választott (120-ad rendű) Hermite-függvények segítségével a spektrumot tetszőleges frekvencián számíthatjuk. A frekvenciatartományban egyenközűen előállított spektrumon inverz Fourier-transzformációt végrehajtva megkaphatjuk az idősor elemeit a hiányzó mérési pontokban is (rekonstruáltuk a hiányzó adatokat). Ezzel egyenközűen mintavételezett teljes adatrendszert kapunk, melynek adattávolságát az eredeti (1. ábrán szereplő) idősortól meghatározhatjuk. A vizsgálatot elvégezve a hiányzó mérési adatokat különböző arányban tartalmazó adatrendszereken, a 11. ábrán látható eredményre jutunk. Az ábra tanúsága szerint 50%-os adathiányig az IRLSFT eljárás elfogadható eredményt ad



11. ábra | Az IRLSFT-vel kapott eredmények adattávolsága a bemeneti adatsorok %-os adathiányának függvényében az egyenközű mintavételből képzett adathiány esetére

Figure 11 | Data distance of the results obtained by the application of IRLSFT versus missing data fraction of the regularly sampled incomplete input datasets



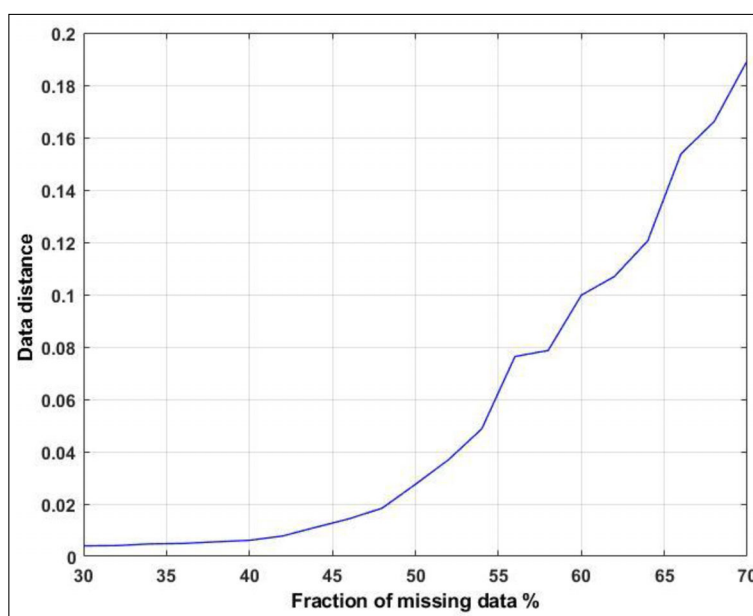
12. ábra | (a) 50%-os adathiánynál kapott IRLSFT-spektrum, (b) a rekonstruált időfüggvény  
 Figure 12 | (a) IRLSFT spectrum computed for data defect of 50%, (b) the reconstructed wavelet signal in time domain

(a távolság az egyenközűen mintavételezett hiánytalan és a rekonstruált adatrendszer között kisebb, mint 0,023). Nagyobb adathiánynál a görbe meredeken emelkedik, ennek oka, hogy az adatok számának csökkenésével az inverz feladat túlhatározottsága is csökken. Az 50%-os adathiánynál kapott spektrumot és a rekonstruált adatrendszert a 12. ábra mutatja be (a túlhatározottság mértéke:  $200/120 = 1,67$ ).

Hasonló vizsgálatot végezhetünk a 9. ábra szerinti random walk mérési elrendezésben mért adatrendszeren is. Az eredményt a 13. ábra mutatja, melyen jól látható, hogy

a hiányzó adatok inverziós Fourier-transzformációval történt rekonstrukciója csupán kis mértékben függ az eredeti (teljes) adatrendszer mintavételezésének egyenközű vagy véletlen voltától.

A terepi gyakorlatban előfordulhatnak olyan (a mintavételi távolság többszörösét kitevő méretű) objektumok (pl. tavak), amelyek területe a mérések szempontjából nem hozzáférhető. Ilyenkor az egyébként egyenletesen mintavételezett adatrendszerben kiterjedt tartományon (vonal menti mérésnél egy kiterjedt szakaszon) keletkezik adathiány.



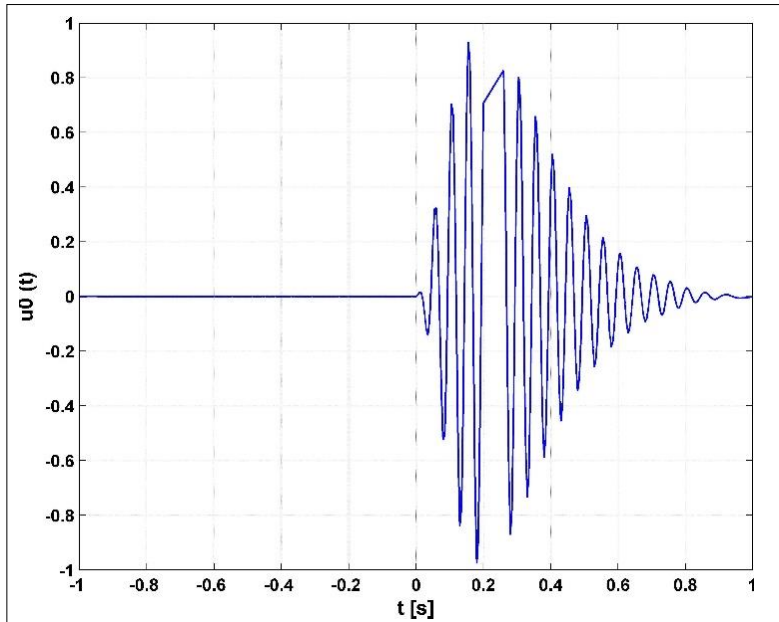
13. ábra | Az IRLSFT-vel kapott eredmények adattávolsága a bemeneti adatsorok %-os adathiányának függvényében a random walk mintavétel esetére  
 Figure 13 | Data distance of the results obtained by the application of IRLSFT versus missing data fraction of the non-regularly sampled incomplete input datasets



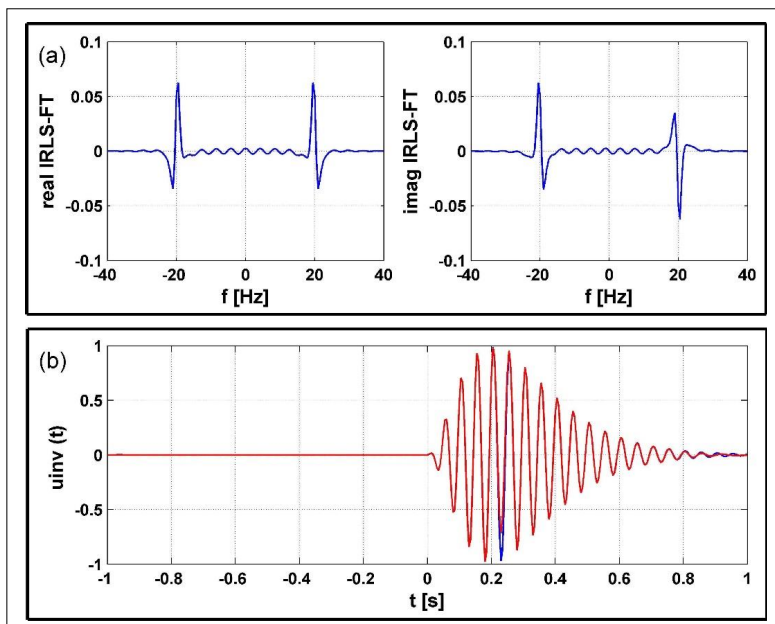
2.4. Az inverziós Fourier-transzformáció viselkedése szakaszosan hiányos egydimenziós adatrendszer esetén

A probléma vizsgálatához szükséges adatrendszert az 1. ábrán bemutatott jelből állítottuk elő a [0,2, 0,26] intervallum adatainak törlésével (14. ábra).

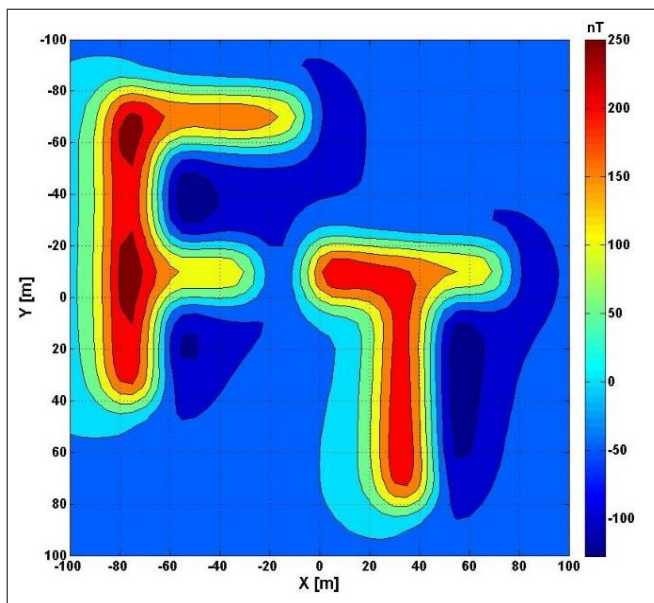
Amikor a szakaszon hiányos adatrendszeren alkalmazzuk az IRLSFT eljárást, az előző esetekhez hasonlóan a túlhatározott inverz feladat megoldásaként kapott sorfejtési együtthatók ismeretében a bázisfüggvényeként választott Hermite-függvények segítségével a spektrumot tetszőleges frekvencián számíthatjuk. A frekvenciatartományban egyenközűen előállított spektrumon (15a ábra)



14. ábra | A [0,2, 0,26] intervallumon hiányos adatrendszer  
 Figure 14 | The block-incomplete sampled wavelet with missing data in the interval [0.2, 0.26]

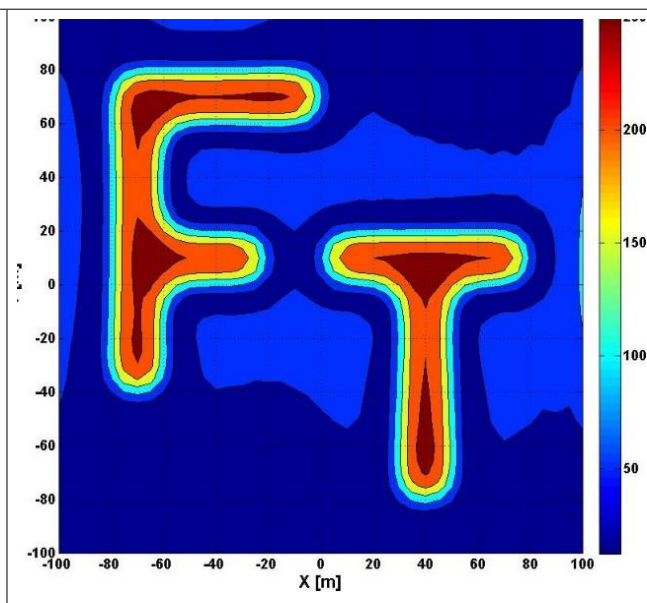


15. ábra | (a) A [0,2–0,26] intervallumon hiányos adatrendszer IRLSFT-spektruma, (b) az inverziós Fourier-transzformációval rekonstruált jel (piros szín) és a hiánytalan eredeti jel (kék szín) időtartományban  
 Figure 15 | (a) IRLSFT spectrum of the block-incomplete sampling wavelet with missing data in the interval [0.2, 0.26]. (b) The wavelet signal reconstructed by the inversion Fourier transform (red colour) and the complete original signal (blue colour) in time domain



16. ábra Egyenközűen mintavételezett 2D zajmentes mágneses adatrendszer

Figure 16 2D noise-free synthetic magnetic datasets for the regularly sampled grid

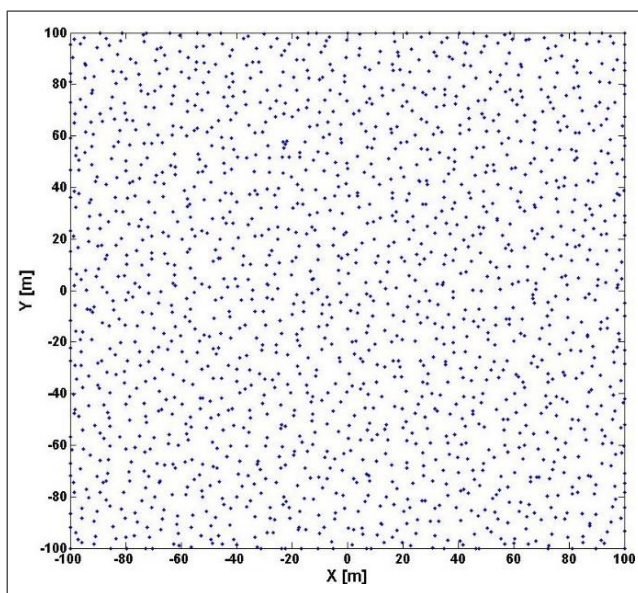


17. ábra Az egyenközűen mintavételezett 2D zajmentes mágneses adatrendszer pólusra redukálásának eredménye DFT alkalmazása esetén

Figure 17 The reduced-to-pole magnetic map of the regularly sampled noise-free magnetic data set when DFT is applied

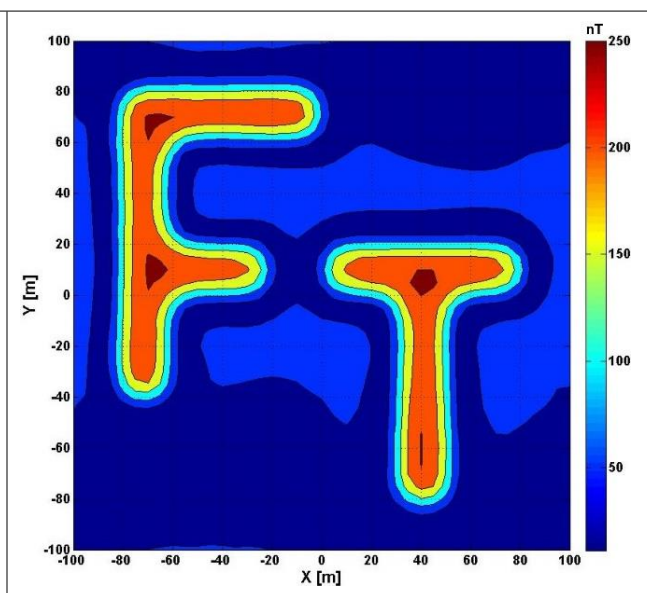
inverz Fourier-transzformációt végrehajtva megkaphatjuk az idősor elemeit a hiányzó mérési pontokban is (rekonstruáltuk a hiányzó adatokat). Ezáltal egyenközűen mintavételezett teljes adatrendszert kapunk, melyet a 15b ábrán piros színnel ( $u_{inv}(t)$ ) szemléltetünk. Az eredeti (1. ábrán szereplő) idősort kék színnel ugyancsak feltüntetve látható, hogy a rekonstruált görbe azt elfedi,

kivételt csupán a 0,25 sec környékén tapasztalunk. Az ábra tanúsága szerint az IRLSFT eljárással a szakaszon hiányos adatrendszer is sikeresen feldolgozható. További vizsgálatok azt mutatják, hogy míg a [0,2, 0,23] intervallumon hiányos adatrendszer rekonstrukciója hibátlan (a kék szín sehol sem jelentkezik), addig a [0,2, 0,3] intervallumon hiányos adatrendszer rekonstrukciója elfogad-



18. ábra Random walk mérési pontok

Figure 18 A plot of the randomly sampled magnetic measuring points



19. ábra A véletlenszerűen mintavételezett 2D zajmentes mágneses adatrendszer pólusra redukálásának eredménytérképe 2D IRLSFT alkalmazása esetén

Figure 19 The reduced-to-pole magnetic map of the randomly sampled magnetic data set when 2D IRLSFT is applied

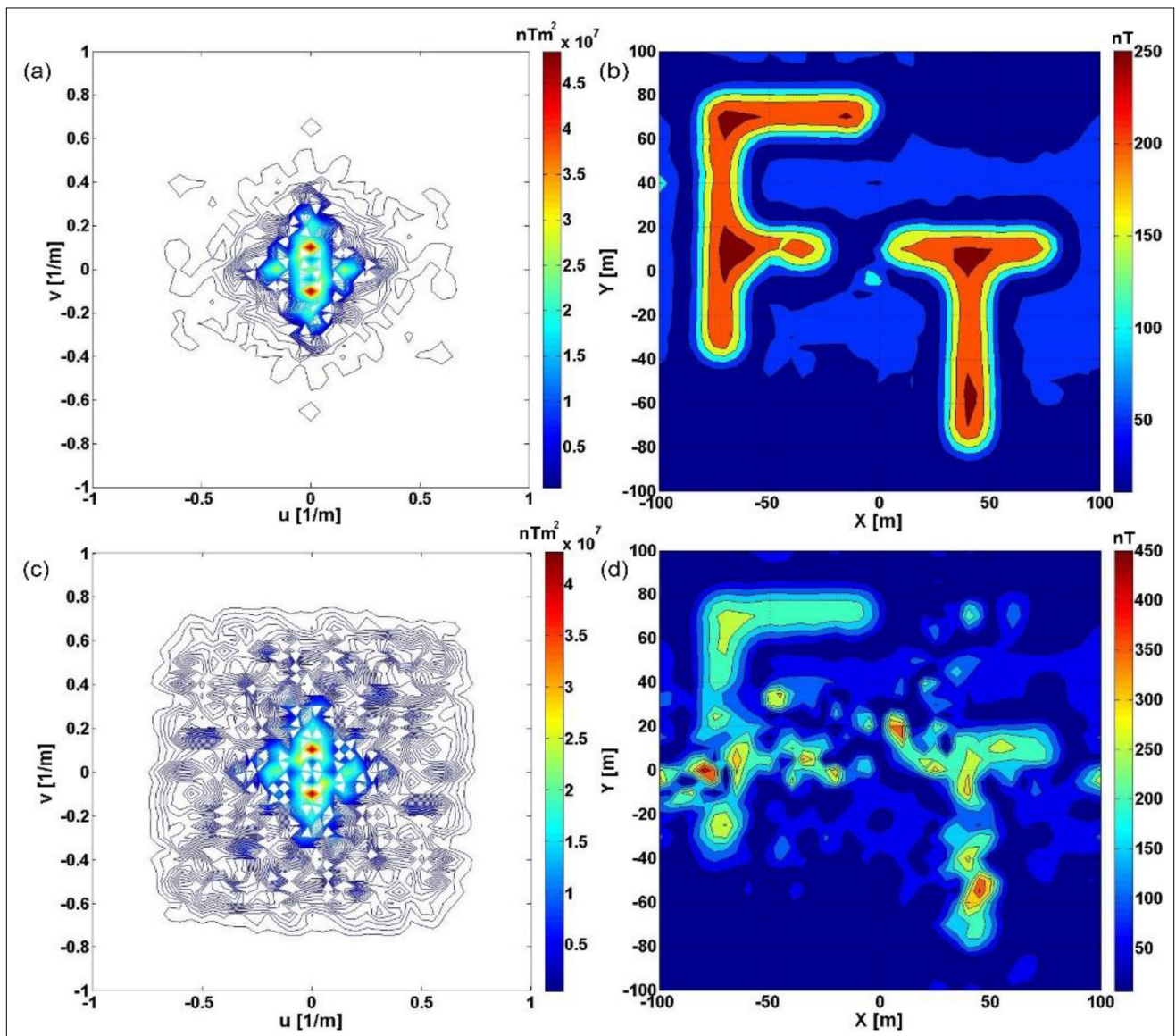
hatatlan torzításokat mutat mind a frekvencia-, mind az időtartományban.

### 3. Az inverziós Fourier-transzformáció tulajdonságai kétdimenziós esetben

A Fourier-transzformáció mint inverz feladat kétdimenziós (2D) problémára is megfogalmazható (Szegedi 2015). A 2D IRLSFT részletes algoritmusát és az eljárás zajelnyomó képességének vizsgálatát Dobróka és munkatársai (2017) közölték. A nem egyenközűen mintavételezett 2D adatrendszerek inverziós Fourier-transzformációját PhD-

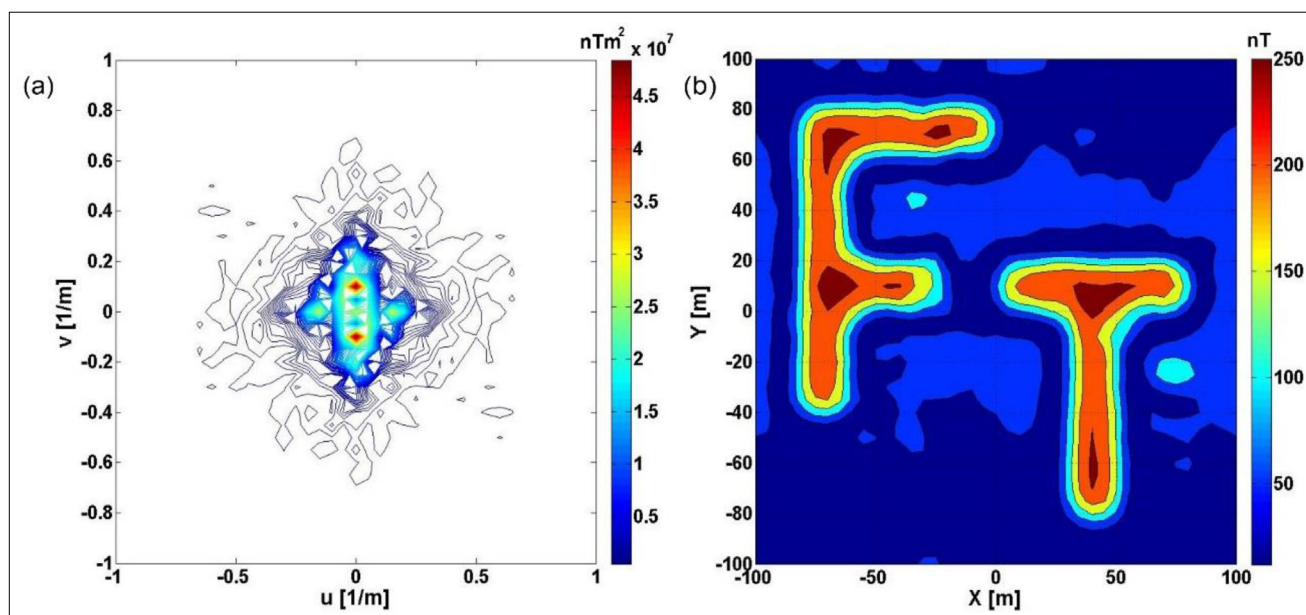
értekezésében Nuamah (2020) vizsgálta. A 2D IRLSFT eljárást nem egyenközűen mintavételezett mágneses adatok pólusra redukálásában Vass és Nuamah (2021) publikálta.

A következőkben a hiányos 2D adatrendszerek inverziós Fourier-transzformációjának néhány eredményét mutatjuk be Abdelaziz (2022) PhD-értekezésének alapján. A vizsgálathoz szintetikus adatrendszert számítunk, amely  $x$  és  $y$  irányban egyaránt  $[-100\text{ m}, 100\text{ m}]$  kiterjedésű mérési területen FT alakú, 200 nT intenzitású anomáliát produkáló ható, 5 m-es térközű szabályos mintavételi rendszerben előállított ( $N = 41 \times 41 = 1681$ ) adatát tartalmazza a 16. ábra szerint. Az adatrendszert DFT



20. ábra (a) 2D IRLSFT amplitúdóspektrum az egyenközűen mintavételezett bemenő adatok 50%-át elhagyva, (b) A spektrális szűrés alapján előállított pólusra redukált mágneses térkép, (c) 2D IRLSFT amplitúdóspektrum az egyenközűen mintavételezett bemenő adatok 60%-át elhagyva, (d) A spektrális szűrés alapján előállított pólusra redukált mágneses térkép

Figure 20 (a) 2D IRLSFT amplitude spectrum of the regularly sampled magnetic dataset with input data defect of 50%, (b) reduced-to-pole magnetic map coming from frequency domain filtering (c) 2D IRLSFT amplitude spectrum of the regularly sampled magnetic dataset with input data defect of 60%, (d) reduced-to-pole magnetic map coming from frequency domain filtering



21. ábra (a) 2D IRLSFT amplitúdóspektrum a random walk mintavételezéssel kapott bemenő adatok 50%-át elhagyva, (b) a spektrális szűrés alapján előállított pólusra redukált mágneses térkép

Figure 21 (a) 2D IRLSFT amplitude spectrum of the randomly sampled magnetic dataset with input data defect of 50%, (b) reduced-to-pole magnetic map coming from frequency domain filtering

alkalmazásával pólusra redukálva a 17. ábrán látható eredményt kapjuk.

A mágneses adatrendszer a 18. ábrán látható random walk elrendezésben feltételezett mérési pontokon is előállítottuk majd az  $N = 1681$  adat alapján 2D IRLSFT alkalmazásával pólusra redukálást végeztünk  $x$  és  $y$  irányban  $M_x = M_y = 25$  Hermite-függvényt választva a sorfejtéshez. (Az ismeretlenek száma  $M = 25 \times 25 = 625$ , azaz az inverz feladat erősen túlhatározott.) Az inverz probléma megoldásával a 2D spektrum számítható és a pólusra redukált térkép tetszőleges mérési elrendezésen, így egyenközűen is meghatározható. Eredményül a 19. ábrán bemutatott mágneses térképet kapjuk, amely igen közel van az egyenközű mintavétellel kapott, 17. ábrán megjelenített képhez.

A 16. ábra egyenközűen mintavételezett adataiból két hiányos adatrendszer állítunk elő az adatok 50, ill. 60%-ának elhagyásával. A 2D IRLSFT eljárással számított spektrumot és a pólusra redukált mágneses térképet a 20. ábrán láthatjuk ( $u$  és  $v$  a térfrekvenciák  $x$  és  $y$  irányban). Az eredmény alapján megállapíthatjuk, hogy 50%-os adathiány esetén az inverziós Fourier-transzformáció eredményesen alkalmazható. Az inverzióba foglalt adatok száma  $N = 825$ , az ismeretlenek száma  $M = 625$ , a probléma tehát túlhatározott ( $N/M = 1,32$ ). Az adatok 60%-át elhagyva a kapott eredmény minősége azonban már nem fogadható el. Az inverzióba foglalt adatok száma  $N = 641$ , az ismeretlenek száma  $M = 625$ , s így a probléma csak csekély mértékben túlhatározott ( $N/M = 1,02$ ).

Hiányos adatrendszer a 18. ábrán bemutatott random walk elrendezésben mért adatokból is előállíthatunk. Az adatok 50%-ának elhagyásával kapott amplitúdóspektrumot és a pólusra redukált eredményt a 21. ábrán mutatjuk be.

Mint látható, a pólusra redukált mágneses térkép igen közel van az egyenközűen mintavételezett zajmentes mágneses adatok 50%-ának elhagyásával kapott adatrendszer pólusra redukálásának eredménytérképéhez (20b ábra).

#### 4. Összefoglalás

A Fourier-transzformáció (FT) nagyon hasznos eszköznek minősül a jelfeldolgozás területén, ennek speciális eseteként kezelhető diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) jó eredményeket ad kedvező jel/zaj viszonytal jellemezhető esetekben. Nagyon érzékenyen reagál ugyanakkor az adatokat terhelő hibák megnövekedésére. A Fourier-transzformáció inverziós feladatra történő visszavezetésével, lehetővé válik a méréseket terhelő zajok hatásának csökkentése a frekvenciaspektrum számításakor. A Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszékén kidolgozott inverziós Fourier-transzformációs eljárás középpontjában álló spektrális modell az Hermite-függvényrendszer szerinti sorfejtésen alapul, és a sorfejtési együtthatók játsszák a túlhatározott inverz feladat ismeretlenjeinek szerepét.

A legkisebb négyzetek elve szerinti inverziós Fourier-transzformáció (LSQFT) és a Steiner-súlyokkal robusztifikált (IRLSFT) zajjelnyomó tulajdonságait, ill. alkalmazhatóságát nem egyenközűen mintavételezett adatrendszerek Fourier-transzformációjában a Tanszék munkatársai sokoldalúan vizsgálták. Ezeket az eredményeket a jelen publikációban összefoglalóan ismertettük, kiegészítve a legújabb kutatások eredményeivel, amelyek a hiányosan mintavételezett adatrendszerek inverziós Fourier-transzformációjának lehetőségeire mutatnak rá. Vizsgálá-

taink eredményeit 1D és 2D adatrendszeren demonstráltuk.

## Köszönetnyilvánítás

A közleményben bemutatott kutatást az Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatta az K-135323 számú (OTKA-) projekt keretében.

## A tanulmány szerzői

Mahmoud I. M. Abdelaziz, Vass Péter, Dobróka Mihály

## Hivatkozások

Abdelaziz M. I. M. (2022): Inversion-based method development to improve the interpretation of potential field geophysical data. PhD thesis, University of Miskolc

Baracza E., Turai E., Nádasi Á., Gyulai Á. (2018): CGI inversion method presented through a field case. *Geosciences and Engineering: A Publication of the University of Miskolc*, 6/9, 40–52.

Dobróka M., Vass P. (2006): Fourier Transform as a Robust Inverse Problem, European Association of Geoscientists & Engineers, Conference Proceedings, Near Surface 2006 – 12th EAGE European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Sep. 2006, cp-14-00134, ISBN: 978-90-73781-62-7, <https://doi.org/10.3997/2214-4609.201402756>

Dobróka M., Szegedi H., Vass P., Turai E. (2012): Fourier transformation as inverse problem – an improved algorithm. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47/2, 185–196, DOI: 10.1556/AGeod.47.2012.2. <http://link.springer.com/article/10.1556/AGeod.47.2012.2.7>

Dobróka M., Szegedi H., Vass P. (2017): Inversion-based Fourier transform as a new tool for noise rejection, *Fourier Transforms: Fourier Transform – High-tech Application and Current Trends*, InTech, Rijeka, Croatia, Print ISBN 978-953-51-2893-9, Online ISBN 978-953-51-2894-6, <http://dx.doi.org/10.5772/62751>

Gyulai Á., Baracza M. K., Tolnai É. (2013): The application of joint inversion in geophysical exploration. *International Journal of Geosciences*, 4/2, 283–289.

Gyulai Á., Turai E., Baracza K. (2012): A CGI inverzió eredményének elemzése egy terepi példán. *Magyar Geofizika*, 53/4, 264–274.

Nuamah D. O. B., Dobróka M. (2018): Reduction to pole of non-equidistantly measured magnetic data using an inversion-based Fourier transformation algorithm. *Geoscience and Engineering Journal*, 6/9, 32–39. HU ISSN 2063-6997

Nuamah D. O. B., Dobróka M. (2019): Inversion-based Fourier transformation used in processing non-equidistantly measured magnetic data. *Acta Geod. Geophys.*, 54, 411–424. <https://doi.org/10.1007/s40328-019-00266-4>

Nuamah D. O. B. (2020): Inversion-based Fourier transform algorithm used in processing non-equidistantly measured magnetic data. PhD thesis, University of Miskolc

Szegedi H., Dobróka M. (2012): Robusztus Fourier-transzformáció Steiner-súlyok alkalmazásával. *Magyar Geofizika*, 53/1, 21–28, ISSN 0025-0120.

Szegedi H., Dobróka M. (2014a): On the use of Steiner's weights in inversion-based Fourier transformation – robustification of a previously published algorithm. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 49/1, 95–104, Print ISSN 2213-5812, Online ISSN 2213-5820, DOI: 10.1007/s40328-014-0041-0, <http://link.springer.com/article/10.1007/s40328-014-0041-0>

Szegedi H., Dobróka M. (2014b): Hilbert-transzformált előállítás inverziós alapú robusztus Fourier transzformációval. *Magyar Geofizika*, 55/1, 21–29.

Szegedi H. (2015): Inverziós módszerfejlesztés a Fourier-transzformált zajérzékenységének csökkentésére. PhD-értekezés, Miskolci Egyetem

Vass P., Dobróka M. (2009a): Robust Fourier Transform Algorithm Using Inversion Tools, European Association of Geoscientists & Engineers, Conference Proceedings, Near Surface 2009 – 15th EAGE European Meeting of Environmental and Engineering Geophysics, Sep. 2009, cp-134-00053, ISBN: 978-90-73781-72-6, <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20147040>

Vass P., Dobróka M. (2009b): Sorfejtéses inverzió I. Fourier-transzformáció mint inverz feladat. *Magyar Geofizika*, 50/4, 141–152, ISSN 0025-0120.

Vass P. (2010): A Fourier-transzformáció mint inverz feladat. PhD-értekezés, Miskolci Egyetem

Vass P. (2012): Random-noise reduction capability of the Hermite polynomial based least squares Fourier transform method, *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 47/3, 328–343, DOI: 10.1556/AGeod.47.2012.3.4, <https://link.springer.com/article/10.1556/AGeod.47.2012.3.4>

Vass P., Nuamah D. O. B. (2020): Nem egyenközü hálózat szerint mintavételezett mágneses anomália pólusra redukálása Inverziós Fourier-transzformációval. *Magyar Geofizika*, 61/2, 66–74.