MAGYAR GEOFIZIKA
62. évf. (2021) 1. szám, 27–31

TANULMÁNY

Umow kísérlete a földmágneses kvadrupólus paramétereinek meghatározására

Visszatekintés

Márton P.

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Geofizikai és Űrtudományi Tanszék
H-1117 Budapest, Pázmány Péter stny. 1/C
E-mail: archeomag@caesar.elte.hu

Visszatekintve Umow kísérletére a földmágneses kvadrupólus paramétereinek meghatározására megállapítható, hogy mind az általa felállított egyenletek, mind a megoldásukra kidolgozott algoritmus matematikailag hibátlanok, és így az általa idézett paraméterek az 1829 epochára nem lehetnek ezen algoritmussal történő számítás eredményei. Megállapítható továbbá, hogy Umow földmágneses kvadrupólusa nem teljesen azonos a mai értelemben vett földmágneses kvadrupólussal, noha a kettő erőssége és egyik pólusa egyenlő, de az Umow-féle kvadrupólus másik pólusa az utóbbinak tükörképe. Ez a különbség azonban könnyen eltüntethető az alapegyenletek kis módosításával, úgyhogy Umow algorimusával számolva is ugyanazon eredményekre lehet jutni, mint a később kidolgozott módszerekkel.

Márton, P.: Note on Umow's experiment of calculating the parameters of the geomagnetic quadrupole

It is shown in this note that Umow's ingenious algorithm of calculating the parameters of the geomagnetic quadrupole is mathematically faultless and the controversial result quoted by him for 1929 could not be obtained by the use of it. It is also shown that the quadrupole obtained by his algorithm must be fitted to what is now generally understood under this term. Namely, either pole of his quadrupole can be taken to be one pole, but then the other pole of his quadrupole must be reversed in order to become the other pole. Finally, it is argued that by a little change in the basic equations, Umow's algorithm will give the correct quadrupole parameters, so that it can still be a useful alternative besides other direct analytical or iterative methods of solution.

Beérkezett: 2021. április 22.; *elfogadva:* 2021. május 9.

Bevezetés

A gömbfelületi harmonikus függvények Maxwell-féle póluselméletét, az ún. multipólus-analízist, először Umow (1904a,b) kísérelte meg a földmágneses potenciálfüggvény kis rendszámú (n = 1, 2, 3) komponenseire alkalmazni. A földmágneses potenciálfüggvény n-ed rendű komponensének multipólus-analízise során, egy multipólus-erősséget és további $2n$ paramétert határoznak meg, amelyek n db egységvektor irányának poláris és azimutális koordinátái. Winch (1968) megfogalmazásában ez más szavakkal azt jelenti, hogy az n-edik földmágneses potenciál komponens $2n + 1$ harmonikus koefficiensét $2n + 1$ másfajta paraméterrel helyettesítik. Minthogy ez általában csak többismeretlenes, nemlineáris egyenletek megoldásával lehetséges, multipólus-analízist általában iterációs eljárással végeznek. Például: Winch and Slaucitajs (1966), James (1968), Márton (2020). Umow fent említett kísérlete azért figyelemre méltó, mert ő a földmágneses potenciál első három komponensének (n = 1, 2, 3) analízisét direkt analitikai módszerrel közelítette meg. Az n = 1 eset (földmágneses dipólus) azonban triviális, ui. Gauss óta a földmágneses pólus erőssége (1 paraméter), mind pedig poláris (ϑ_1) és azimutális (λ_1) koordinátái (2 adat) közismert, zárt formulákkal számíthatók ki az elsőrendű Gauss-koefficiensek értékeinek felhasználásával.

ISSN 0025-0120 (print), ISSN 2677-1497 (online)

Ebben a visszatekintésben az $n = 2$ (földmágneses kvadrupólus) esetre fókuszálunk, felidézve és kommentálva Umownak erre vonatkozó eredményeit.

A földmágneses kvadrupólus

Umow a földmágneses potenciálfüggvény másodrendű tagjának és egy kvadrupólus mágnes potenciálfüggvényének összevetésével a következő egyenleteket vezette le és oldotta meg.

$$(2/3\mathrm{M})g_{20} = xy - (1/2)\cos\Delta, \tag{1.1}$$

$$(2/3\mathrm{M})g_{21} = y\cos\lambda_1 + x\cos\lambda_2, \tag{1.2}$$

$$(2/3\mathrm{M})h_{21} = y\sin\lambda_1 + x\sin\lambda_2, \tag{1.3}$$

$$(4/3\mathrm{M})g_{22} = \cos\sigma, \tag{1.4}$$

$$(4/3\mathrm{M})h_{22} = \sin\sigma, \tag{1.5}$$

ahol g_{20}, g_{21}, h_{21}, g_{22}, h_{22} a földmágneses potenciál másodrendű tagjának állandói (Gauss-koefficiensek) Gauss–Laplace-normalizáció mellett. A (ϑ_1, λ_1) és a (ϑ_2, λ_2) változók a kvadrupólus pozitív irányú tengelyei felszíni metszéspontjainak (az ún. pólusoknak) poláris ($0 < \vartheta_{1,2} < 180°$) és azimutális ($0 < \lambda_{1,2} < 360°$) koordinátái. A tengelyek sorrendje közömbös. További változók az (1.1)–(1.5) egyenletrendszerben: $x = \mathrm{ctg}\vartheta_1$, $y = \mathrm{ctg}\vartheta_2$, $\Delta = \lambda_2 - \lambda_1$, és állandók: $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{arctg}(h_{22}/g_{22})$, valamint $M = (4/3)[g_{22}^2 + h_{22}^2]^{1/2}$. Az utóbbi két állandó értékének figyelembevételével az ismeretlenek meghatározásához az (1. 1)–(1. 5) egyenletrendszer első három egyenlete elegendő. Umow megmutatta, hogy az x és az y változó kiküszöbölése után a Δ, illetve a $z = 1 - \cos\Delta$ változóra egy harmadfokú egyenlet áll elő, amelynek egyetlen olyan valós megoldása van, amely a szükséges $\mathrm{abs}(\cos\Delta \le 1)$ feltételt kielégíti. Ezen Δ és σ összevetésével adódik λ_1 és λ_2, majd az (1.2) és (1.3) egyenletekből álló lineáris egyenletrendszer megoldásával x és y, azaz ϑ_1 és ϑ_2 értéke. Végül a kvadrupólus erőssége: $M_E = M/2\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2$. (E paraméter helyett Umow a kvadrupólus momentumát, $\delta_2 = M/\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2$ kifejezést használja, amelynek dimenziója gauss·cm^4, számértéke pedig egységnyi földsugár mellett M_E kétszerese.)

A probléma fenti megoldási lépéseinek ismertetését Umow egy számpéldával kísérte, amelyhez kiindulási adatokként Neumayer és Petersen által az 1885 epochára kiszámított Gauss-koefficienseket (l. Umow (1904a)) használta fel. Ezeket és a kvadrupólus eredményül kapott paramétereit az *1. táblázat* bal oldalán a harmadik oszlopban mutatjuk be.

Idézett két dolgozatában Umow az 1829 epochára vonatkozó kvadrupólus paramétereket is közöl ($\vartheta_1 = 33{,}25°$, $\lambda_1 = 186{,}02°$, $\vartheta_2 = 73{,}75°$, $\lambda_2 = 167{,}93°$ és $\delta_2 = 0{,}005011$ gauss·cm^4), amelyeket megkíséreltünk reprodukálni az általa szintén megadott Neumayer és Petersen-féle Gauss-koefficiensek mellett (*1. táblázat* bal oldali második oszlop felső része). Megoldási algoritmusa szerint haladva, a következő értékeket számítottuk ki:

$$A = (2/3M)^2[g_{21}^2 + h_{21}^2] = 3{,}0760,$$

$$n = (2/3M)^2[g_{21}\sin(\sigma/2) - h_{21}\cos(\sigma/2)]^2 = 1{,}3373\,,$$

$$a = 1 + (4/3M)g_{20} = 1{,}0953\,.$$

A $z = 1 - \cos\Delta$ változó harmadfokú egyenlete így állítandó fel:

$$z^3 - (a+2)z^2 - (A - 2a)z + 2n = 0\,,$$

azaz a fenti állandókkal

$$z^3 - 3{,}0953z^2 - 0{,}8854z + 2{,}6747 = 0\,.$$

Az egyetlen, $0 \le z \le 2$ feltételt kielégítő valós megoldásra $z_0 = 0{,}9247$ adódik. Innen $\Delta = \lambda_2 - \lambda_1 = 85{,}68$, amit σ értékével összevetve kapjuk, hogy

$$\lambda_2 = 0{,}66° \quad \text{és} \quad \lambda_1 = -85{,}02°\ (= 274{,}98°)\,.$$

Az (1. 2) és (1. 3) egyenletből képezhető lineáris egyenletrendszerből

$$y = (2/3M)\,[g_{21}\sin\lambda_2 - h_{21}\cos\lambda_1]/\sin(\lambda_2 - \lambda_1) = -0{,}048772,$$

$$x = (2/3M)\,[h_{21}\cos\lambda_1 - g_{21}\sin\lambda_1]/\sin(\lambda_2 - \lambda_1) = -1{,}74951,$$

azaz

$$\vartheta_2 = \mathrm{arctg}(1/y) = 92{,}79° \quad \text{és} \quad \vartheta_1 = \mathrm{arctg}(1/x) = 150{,}25°\,.$$

Végül a kvadrupólus erőssége $M_E = 1708$ (10^{-5} gauss)-ra, illetve momentuma $\delta_2 = M/\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 = 0{,}03416$ gauss·cm^4-re jön ki (*1. táblázat* bal oldali második oszlop).

Az *1. táblázat* 2. és 3. oszlopában feltüntetett eredményekből látható, hogy az 1829 epochára itt kiszámolt adatok (2. oszlop felső adatok és/vagy alsó adatok) teljes összhangban vannak az eredetileg Umow által mintegy 60 évvel későbbi epochára kapott adatokkal (3. oszlop alsó adatok és/vagy felső adatok). Ezek egymást kölcsönösen megerősítik, tehát Umow idézett dolgozataiban az 1829 epochára közölt adatok idegenek, azaz nem állhattak elő az (1.1)–(1.5) egyenletrendszernek a fenti algoritmussal történő megoldásával.

Összevetés a jelenlegi számításokkal

A földmágneses potenciálfüggvény másodrendű tagjának Gauss-koefficiensei a jelenleg általánosan elfogadott Schmidt-féle normalizáció mellett, a korábbi szerzők és Umow által is használtakkal a következőképpen fejezhetők ki (McDonalds, Gunst 1967):

$$\begin{aligned} &g_2^0 = -(2/3)g_{20}\,,\ g_2^1 = -(1/\sqrt{3})g_{21}\,,\ h_2^1 = -(1/\sqrt{3})h_{21}\,,\\ &g_2^2 = -(1/\sqrt{3})g_{22}\,,\ h_2^2 = -(1/\sqrt{3})h_{22}\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

1. táblázat Gauss-koefficiensek és a megfelelő földmágneses kvadrupólusok kiszámított paraméterei két epochára. Bal oldalon az Umow-, jobb oldalon egy iterációs módszerrel kapott eredmények állnak. A bal oldali első oszlopban jelzett módon az eredeti (vagyis a kiszámított) és az azzal ellentétes tengelyirányokkal rendelkező kvadrupólus szögparaméterei is fel vannak tüntetve. Ezek fizikailag azonos mágnesek. A pólusok sorrendje közömbös

Table 1 Gauss coefficients and calculated parameters of corresponding geomagnetic quadrupoles for two epochs. Left side: results by use of Umow's algorithm, right side: results by use of an iterative method

(10^{-5} gauss)	Epocha 1829	Epocha 1885	(nT)	Epocha 1829	Epocha 1885	Megjegyzés
g_{20}	121,0	790,6	g_2^0	−80,7	−527,1	
g_{21}	– 4453,7	−4979,8	g_2^1	2571,3	2875,1	
h_{21}	72,0	1299,9	h_2^1	−41,6	−750,5	
g_{22}	124,9	-566,7	g_2^2	−144,2	654,4	
h_{22}	– 1263,7	−1220,4	h_2^2	1459,2	1455,4	
M	1693	1842	$2M_2^*$	1693	1843	
M_E	1708	1966	$10^{-7}m_2/a^4$	1708	1968	A kvadrupólusok erőssége
(°)	(°)	(°)		(°)	(°)	
ϑ_1/ 180 – ϑ_1	150,25 29,75	28,2 151,8		87,2 92,8	82,2 97,8	A +/– pólusok koordinátái
λ_1/ λ_1 + 180	275,0 95,0	76,2 256,2		180,7 0,70	169,6 349,6	
ϑ_2/ 180 – ϑ_2	92,8 87,2	82,7 97,3		150,2 29,8	151,8 28,2	
λ_2/ λ_2 + 180	0,70 180,7	169,6 349,6		275,0 95,0	256,2 76,2	

Jelmagyarázat a szövegben, illetve a Függelékben

Symbols: (ϑ_1, λ_1), polar and azimuthal components of one of the poles; (ϑ_2, λ_2), same of the other pole. For other symbols see text and Appendix

Számértékeik az 1829 és az 1885 epochára az *1. táblázat* jobb oldali felső részén láthatók. A megfelelő kvadrupólusok paramétereinek kiszámolására több módszer is kínálkozik, amelyek alapját az (F.1)–(F.2) egyenletrendszer képezi (l. Függelék). Itt az *1. táblázat* jobb oldali részében az algebrailag talán legegyszerűbb iterációs megoldással (Márton 2020) kapott eredményeket idézzük. Közvetlenül látható, hogy a kvadrupólus erősségek számértékei Umownál és e számítások alapján azonosak. A pólusoknál mindkét vizsgált epocha esetén található egy közös. Így 1829-re az 1-es indexű pólus Umow algoritmusa szerint azonos a 2-es indexűvel a jelenlegi számítás szerint, míg 1885-re a 2-es indexű pólus Umownál azonos az itteni 1-es indexűvel, a nem említett pólusok pedig egymás tükörképei. Összefoglalva, mindkét epochára nézve egy-egy azonos, illetve egy-egy ellentétes értelmű pólus adódik, amely az (1.6) szerinti átszámítás következménye.

(Helyettesítéssel igazolható, hogy az egyik tengely irányának megfordítása esetén az (1.1)–(1.5) egyenletek jobb oldalai ellenkező előjelűvé válnak, míg a két tengely irányának egyidejű megfordítása nem jár előjelváltással, vagyis a „megfordított kvadrupólus" tere nem különböztethető meg az eredeti terétől.)

A fentiekből következik, hogy az Umow-féle kvadrupólusok (*1. táblázat* 2. és 3. oszlop) a következőképpen értelmezendők. Feltéve, hogy a (ϑ_1, λ_1) koordinátájú pont pólus, akkor a másik pólus a (180 – ϑ_2, λ_2 + 180) koordinátájú pont lesz. Ha viszont a (ϑ_2, λ_2) koordinátájú pont pólus, akkor a másik pólus a (180 – ϑ_1, λ_1 + 180) koordinátájú pont lesz. Mindkét megoldás helyes, hiszen ezek egymás tükörképei.

Frissítés

Umow megoldási algoritmusának levezetése a földmágneses kvadrupólus paramétereinek közvetlen analitikai úton történő meghatározására matematikailag annyira ötletes, hogy talán érdemes megmutatni, hogy maga az algoritmus változatlan formában ma is használható, ha erre alkalom adódik, pl. egy égitest mágneses terének analizálásakor.

Tekintsük az (1.1)–(1.5) alapegyenleteket, és a bal oldalon álló „régi" Gauss-koefficienseket cseréljük ki a következőkre:

$$g_{20} = \sqrt{3}g_2^0,\ \ g_{21} = 2g_2^1,\ \ h_{21} = 2h_2^1,\ \ g_{22} = g_2^2,\ \ h_{22} = h_2^2,$$

ahol (g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2, h_2^2) a jelenleg használatos másodrendű harmonikus koefficiensek.

Ezekkel a módosításokkal a megoldandó egyenletek így alakulnak:

$$(2/\sqrt{3}M)g_2^0 = xy - (1/2)\cos\Delta, \qquad (2.1)$$

$$(4/3M)g_2^1 = y\cos\lambda_1 + x\cos\lambda_2, \qquad (2.2)$$

$$(4/3M)h_2^1 = y\sin\lambda_1 + x\sin\lambda_2, \qquad (2.3)$$

$$(4/3M)g_2^2 = \cos\sigma, \qquad (2.4)$$

$$(4/3M)h_2^2 = \sin\sigma \qquad (2.5)$$

M a (2.4) és (2.5) egyenlet alapján: $M = (4/3)[(g_2^2)^2 + (h_2^2)^2]^{1/2}$, ill. $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{arctg}(h_2^2/g_2^2)$.

Illusztrációképpen tekintsük az IGRF-12 táblázatból (Thébault et al. 2015) az 1975 epochára vonatkozó következő másodrendű Gauss-koefficienseket:

$$g_2^0 = -1902\,(\mathrm{nT}),\quad g_2^1 = 3010\,(\mathrm{nT}),\quad h_2^1 = -2067\,(\mathrm{nT}),$$
$$g_2^2 = 1632\,(\mathrm{nT}),\quad h_2^2 = -68\,(\mathrm{nT}),$$

és oldjuk meg ezekkel a (2.1)–(2.3) egyenleteket Umow algoritmusának alkalmazásával! Erre az epochára ui. többféle független megoldás is rendelkezésre áll, amelyekkel eredményünket összehasonlíthatjuk. A fentebb már követett úton haladva először a következő állandókat számítjuk ki:

$$M = 2177{,}888, \qquad \sigma = 357{,}62,$$

$$A = (4/3M)^2[(g_2^1)^2 + (h_2^1)^2] = 4{,}997132,$$

$$n = (4/3M)^2[g_2^1\sin(\sigma/2) - h_2^1\cos(\sigma/2)]^2 = 1{,}50530,$$

$$a = 1 + (4/\sqrt{3}M)g_2^0 = 1.01685\,.$$

Ezekkel az értékekkel a $z = 1 - \cos\Delta$ változó harmadfokú egyenlete,

$$z^3 - (a+2)z^2 - (A-2a)z + 2n = 0$$

alapján

$$z^3 - 0{,}983147z^2 - 7{,}03084z + 3{,}01058 = 0\,.$$

A $0 \le z \le 2$ feltételt kielégítő megoldás:

$$z_0 = 0{,}414309\,.$$

Innen $\Delta = \lambda_2 - \lambda_1 = 54{,}148$, amit a $\sigma = 357{,}62$ értékkel összevetve kapjuk, hogy

$$\lambda_2 = 205{,}88° \quad \text{és} \quad \lambda_1 = 151{,}74°.$$

A (2.2) és a (2.3) egyenletből képezhető lineáris egyenletrendszerből

$$y = (4/3M)[g_2^1\sin\lambda_2 - h_2^1\cos\lambda_2]/\sin(\lambda_2 - \lambda_1) = -2{,}397039,$$

$$x = (4/3M)[h_2^1\cos\lambda_1 - g_2^1\sin\lambda_1]/\sin(\lambda_2 - \lambda_1) = 0{,}298712,$$

azaz

$$\vartheta_2 = \mathrm{arctg}(1/y) = 157{,}36° \text{ és } \vartheta_1 = \mathrm{arctg}(1/x) = 73{,}37°.$$

Végül a kvadrupólus erőssége

$$M_E = (\mu_0/4\pi)\cdot(m_2/a^4) = (\sqrt{3}/4)[\mathrm{M}/\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2] = 2556{,}8\ \mathrm{nT}.$$

A kiszámított adatokat a *2. táblázat* második oszlopában találjuk. A fejlécben az „Umow (2021)" felirat arra utal, hogy a számítások ugyan 2021-ben készültek, de Umow eredeti algoritmusa szerint. A harmadik és negyedik oszlopban az (F.1)–(F.2) egyenletrendszernek (l. Függelék) egy iterációs algoritmussal és egy közvetlen analitikai algoritmussal történő megoldásával kapott eredmények állnak. A háromféle számítás nyilvánvalóan azonos eredményre vezet, ami alátámasztja a (2.1)–(2.5) alapegyenletek helyességét, mind pedig Umow algoritmusának használhatóságát (itt) a földmágneses kvadrupólus paramétereinek kiszámítására. Nem nehéz belátni, hogy a (2.1)–(2.5) alapegyenletek tulajdonképpen az (F.1)–(F.2) egyenletrendszer „retro"-változatát képezik. Befejezésül megjegyezzük, hogy az Umow-algoritmus kevesebb számítási lépésben vezet eredményre, mint a harmadik oszlopban lévő adatok kiszámítására alkalmazott, szintén közvetlen analitikai módszer.

2. táblázat A földmágneses kvadrupólus paraméterei az 1975 epochára három különböző számítás alapján

Table 2 Results of three different calculations of the parameters of the geomagnetic quadrupole for epoch 1975

(°)	Umow (2021) direkt anal. algoritmussal	Márton (2020) iterációs algoritmussal	Willis (1982) direkt anal. algoritmussal
ϑ_1	73,37	73,38	73,38
λ_1	151,74	151,74	151,74
ϑ_2	157,36	157,36	157,36
λ_2	205,88	205,88	205,88
M_E (nT)	2556,80	2556,70	2556,70

Jelmagyarázat: l.*1. táblázat*
Symbols: as in *Table 1*

A tanulmány szerzője

Márton Péter

Hivatkozások

James R. W. (1968): Multipole analysis. I. Theory and geomagnetic multipoles 1965.0, Aust. J. Phys., 21, 455–464.

Márton P. (2020): Az első öt földmágneses multipólus IGRF-13 koefficiensek értékeiből számolt paramétereinek táblázatai (1900–2020). (Parameters of the leading geomagnetic multipoles (n = 1, 2, ..., 5) computed from the harmonic coefficients of the IGRF-13 field model). Magyar Geofizika, 61, 1–15.

McDonald K. L., Gunst R. H. (1967): An Analysis of the Earth's Magnetic Field from 1835 to 1965. ESSA Technical Report IER 46 – IES 1. Inst. Earth's Sci., Boulder, Colorado.

Thébault E., Finlay C. C., Beggan C. D. et al. (2015): International Geomagnetic Reference Field: The 12th generation. Earth. Planet. Sp. 67, 79. https://doi.org/10.1186/s40623-015-0228-9.

Willis D. M. (1982): A direct analytic method of calculating the quadrupole parameters of a planetary magnetic field. Geophys. J. R. Astr. Soc., 68, 751–764.

Winch D. E., Slaucitajs L. (1966): Geomagnetic multipoles, 1829 to 1960. Pure Appl. Geophys., 63, 121–132.

Winch D. E. (1968): Multipole analysis and secular variation. J. Geomag. Geoelect., 20, 205– 210.

Umow N. A. (1904a): Построение геометрического образа потенциала Гаусса, как прием изыскания законов земного магнетизма. Избранные сочинения, т. XII, 311–370.

Umow N. (1904b): Die Konstruction des geomagnetisches Bildes des Gauss'schen Potentials, als Methode zur Erforschung der Gesetzte des Erdmagnetismus, Terr. Magn. Atmos. Elect., 9, 105–112.

Függelék

A földmágneses potenciálfüggvény jelenleg általánosan elfogadott Schmidt-féle kvázinormált alakjának második tagja és a földmágneses kvadrupólus paraméterei között fennálló egyenletek szerint (pl. Willis 1982), a másodrendű Gauss-koefficiensek (g_2^0, g_2^1, h_2^1, g_2^2, h_2^2) kifejezései az $M_2^* = M_2 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2$, $y = \mathrm{ctg}\,\vartheta_2$, $\Delta = \lambda_1 - \lambda_2$ jelölésekkel a következők:

$$g_2^0 = 2M_2^*(xy - 0{,}5\cos\Delta)\,, \tag{F.1}$$

$$g_2^1 = \sqrt{3}M_2^*(y\cos\lambda_1 + x\cos\lambda_2)\,, \tag{F.2}$$

$$h_2^1 = \sqrt{3}M_2^*(y\sin\lambda_1 + x\sin\lambda_2)\,, \tag{F.3}$$

$$g_2^2 = \sqrt{3}M_2^*\cos\sigma\,, \tag{F.4}$$

$$h_2^2 = \sqrt{3}M_2^*\sin\sigma\,. \tag{F.5}$$

Itt $M_2 = (\mu_0/4\pi)\cdot(m_2/a^4)$ a földmágneses kvadrupólus erőssége, μ_0 a vákuum permeabilitása, m_2 a földmágneses kvadrupólus momentuma és a a földgömb sugara. Továbbá, ha $g_2^2 \neq 0$ és $h_2^2 \neq 0$, akkor $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{arctg}\,(h_2^2/g_2^2)$ és $M_2^* = \{(1/3)[(g_2^2)^2 + (h_2^2)^2]\}^{1/2}$ egyenletből az első három elegendő az ötből háromra redukált ismeretlen (x, y, Δ) meghatározására.