

P-SV hullámok diszperziós relációja és elmozdulásfüggvényei lassan változó rétegvastagságú hullámvezetőben¹

FANCSIK TAMÁS²

A dolgozatban a WKB módszert alkalmazva megadjuk homogén, de változó rétegvastagságú szerkezetben terjedő P-SV csatornahullámok diszperziós összefüggéseit és elmozdulásfüggvényeit. A diszperziós egyenlet numerikus elemzésével a rétegvastagság-változás hatását és kimutathatóságát vizsgáljuk, továbbá felhívjuk a figyelmet egy ekvivalencia jelenségre és feloldhatóságára.

T. FANCSIK: Dispersions and displace functions of P-SV waves propagating in channel with variable thickness

Using the WKB method dispersions and displace functions are given for P-SV waves propagating in channel with variable thickness. By means of numeric solutions of the derived dispersion equation coupling effect, phase velocity — place function and the detectability of thickness — variations.

Bevezetés

A felületi és vezetett hullámokkal történő mérési eljárások szerepe a geofizikában, ill. szeizmikában általában alárendelt a reflexiós és refrakciós módszerek mellett. Leginkább a bányageofizikai alkalmazások során kerültek előtérbe, az utóbbi időben pedig a környezetvédelmi és mérnökgeofizikai problémák megoldása kapcsán növekszik jelentőségük. Ez utóbbihoz kapcsolódó mérési metodikák a bányabeli kutatások során — a csatornahullámokra vonatkozóan — elért eredményekre támaszkodhatnak.

A csatornahullámok elméletében EIVSON [1955] és KREY [1963] megalapozó vizsgálatait követően BUCHANAN [1978] tanulmányozta az SH hullámok csillapodását a konstans Q modell segítségével háromréteges összletben, DOBRÓKA, ORMOS [1983] pedig a Poynting-Thomson-teszt alkalmazásával. P-SV hullámokra DRESEN et al. [1985] közölt diszperziós görbéket.

A sokréteges esetek modellezését SH hullámokra RÄDER et al. [1985], SH és P-SV hullámokra pedig BUCHANAN [1987] eredményei tették lehetővé.

A vezetett hullámok tulajdonságainak véges differenciás módszerrel történő elemzésében KERNER,

DRESEN [1985], BODOKY, BODOKY [1983], KORN, STÖCKL [1982] munkái jelentették a kezdeti lépéseket.

Az inhomogén közegben való hullámterjedés WKB módszerrel történő analitikus leírását DOBRÓKA [1987] adta meg először, a homogén, de lassan változó telepvastagság esetében pedig szintén DOBRÓKA [1988] publikált megoldást. E két említett eredmény SH vagy Love típusú telephullámokra és disszipatív közegre vonatkozott.

Rayleigh típusú vagy másképpen P-SV hullámok inhomogén, sokréteges közegben való terjedését FANCSIK [1995] írta le ugyancsak a WKB approximációt alkalmazva.

Jelen dolgozatban — e vizsgálatort teljessé téve — homogén, de lassan változó telepvastagságú összlet feltételezése mellett továbbra is a WKB módszer segítségével határozzuk meg a P-SV hullámok diszperziós relációját és elmozdulásfüggvényeit.

Analitikus összefüggések

A hullámvezető modellje az 1. ábrán látható. Jelölések:

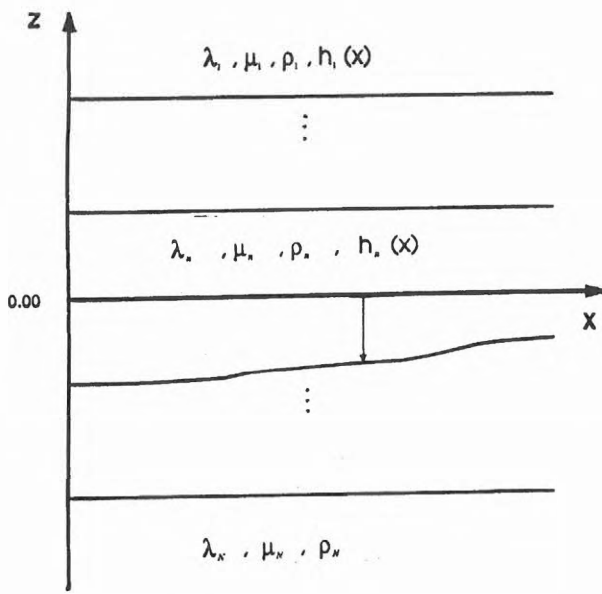
λ_n, μ_n : Lamé-állandók az n -ik rétegben,

ρ_n : az n -ik réteg sűrűsége,

$h(x)$: az (x, y) sík és az n -ik réteg aljának távolsága az x koordináta függvényében.

¹ Beérkezett: 1997. január 30-án

² Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet, H-1145 Budapest, Kolumbusz u. 17-23.



1. ábra. A rétegsor geometriája
Fig. 1. Geometry of layers

A közeget homogén, izotróp Hook-testekből felépülőnek tételezzük fel, a probléma megoldása során ezért a mozgásegyenletből indulhatunk ki (az indexezéseket az áttekinthetőség kedvéért elhagyjuk):

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{s} + (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{s} \quad (1)$$

A hullámterjedés az (x, z) síkban történik, tehát az elmozdulásvektornak csak két, egy x irányú u_x és egy z irányú u_z komponense van. Ismeretes, hogy (1) megoldását a φ és $\vec{\psi} = (0, \psi, 0)$ elmozduláspotenciálok segítségével kereshetjük meg a legegyszerűbben [ÁDÁM 1987]. Ekkor $e^{i\omega t}$ időfüggés esetén a

$$\Delta \varphi + k_\alpha^2 \varphi = 0 \quad (2a)$$

$$\Delta \psi + k_\beta^2 \psi = 0 \quad (2b)$$

Helmholtz-egyenleteket kell megoldanunk, ahol $k_\alpha = \omega/\alpha$ és $k_\beta = \omega/\beta$. Tekintsük először a (2a) összefüggést. Mivel a réteghatár az x koordinátától függően lassan változik, $\varphi(x, z)$ a függvény amplitúdóért felelős része a z koordinátán kívül a rétegvastagságtól is — bár gyengén — kell, hogy függjön, amit úgy érhetünk el, hogy φ -t az alábbi szorzat alakjában vesszük fel [DOBRÓKA 1988a]:

$$\varphi = u(z, h(x))v(x) \quad (3)$$

A (3) egyenlet (2a)-ba történő helyettesítése, a kijelölt műveletek elvégzése, továbbá a d^2h/dx^2 -tel és a $(dh/dx)^2$ -tel arányos tagok elhanyagolása után (2a) az u -ra és v -re nézve szeparálhatóvá válik — amennyiben teljesül a következő feltétel:

$$\eta_\alpha = \left| \frac{2}{u} \frac{du}{dh} \frac{dv}{dx} \frac{dh}{dx} \right| \ll \left| \frac{d^2v}{dx^2} \right| \quad (4)$$

Ezt az egyenlőtlenséget a rétegvastagság-változások mértékére kiróható feltételként fogadhatjuk el. (4) érvényessége esetén a szeparált egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dz^2} + (k_\alpha^2 - k^2(x))u &= 0 \\ \frac{d^2v}{dx^2} + k^2(x)v &= 0 \end{aligned}$$

ahol $k(x)$ az x -től gyengén függő szeparációs paraméter, ami nem más, mint a vezetett hullám hullámszáma. Az ilyen típusú egyenletek WKB megoldása [DOBRÓKA 1995, FANCSIK 1995]:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(A e^{-i\sqrt{k_\alpha^2 - k^2}z} + B e^{i\sqrt{k_\alpha^2 - k^2}z} \right) e^{i \int_0^x k(\xi) d\xi} \quad (5)$$

ahol felhasználtuk (3) összefüggést. A (2a) és (2b) egyenletek analógiájából következik, hogy ψ -t ugyanezen lépések alkalmazásával kapjuk meg. A számításokat nem részletezve az eredmény:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(C e^{-i\sqrt{k_\beta^2 - k^2}z} + D e^{i\sqrt{k_\beta^2 - k^2}z} \right) e^{i \int_0^x k(\xi) d\xi} \quad (6)$$

A szeparációs feltétel ekkor

$$\eta_\beta = \left| \frac{2}{\tilde{u}} \frac{d\tilde{u}}{dh} \frac{d\tilde{v}}{dx} \frac{dh}{dx} \right| \ll \left| \frac{d^2\tilde{v}}{dx^2} \right| \quad (7)$$

Az \tilde{u} és \tilde{v} a (3)-mal analóg felbontásnak megfelelő függvények. A potenciálokról az u_x x irányú és u_z z irányú elmozdulásfüggvényekre áttérve az eredmény:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{\sqrt{k}} (ikAe^{-pz} + qCe^{-qz} + ikBe^{pz} - qDe^{qz}) e^{i \int_0^x k(\xi) d\xi} \\ u_z &= \frac{1}{\sqrt{k}} (-pAe^{-pz} + ikCe^{-qz} + pBe^{pz} - ikDe^{qz}) e^{i \int_0^x k(\xi) d\xi} \end{aligned}$$

és

$$p = \sqrt{k^2 - k_\alpha^2}, \quad q = \sqrt{k^2 - k_\beta^2}.$$

A diszperziós relációt csatornahullámok esetén úgy kapjuk, hogy a réteghatárok mentén az alábbi feltételek teljesülését követeljük meg:

- a normálirányú feszültségek folytonosak, mely esetünkben a z irányú deriválttal közelíthető [DOBRÓKA 1995];
- az elmozduláskomponensek folytonosak;
- az amplitúdók $z \rightarrow \pm\infty$ esetben is végesek maradnak.

Ha e feltételi egyenleteket például az n -ik rétegre felírjuk, egy homogén lineáris egyenletrendszert kapunk, melyet az alábbi mátrixegyenlettel alakíthatunk [BUCHANAN 1987, FANCSIK 1995]:

$$\underline{\underline{\Lambda}}_{n+1}(h_n) \underline{\underline{Q}}_{n+1} \bar{b}_{n+1} = \underline{\underline{\Lambda}}_n(h_n) \underline{\underline{Q}}_n \bar{b}_n \quad (8)$$

ahol

$$\bar{b}_n = (A_n \ C_n \ B_n \ D_n)^T$$

$$\underline{\underline{Q}}_n = \begin{pmatrix} ik & q_n & ik & -q_n \\ -p_n & ik & p_n & ik \\ -ikp_n\mu_n & -\mu_n(k^2 + q_n^2) & ikp_n\mu_n & -\mu_n(k^2 + q_n^2) \\ p_n^2\xi_n - k^2\lambda_n & -2ik\mu_nq_n & p_n^2\xi_n - k^2\lambda_n & -2ik\mu_nq_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Lambda}}_n(h_n) = \text{diag}(e^{-p_n h_n(x)} \ e^{-q_n h_n(x)} \ e^{p_n h_n(x)} \ e^{q_n h_n(x)})$$

$$\text{és } \xi_n = \lambda_n + 2\mu_n.$$

Minden egyes n réteghatárra felírva a (8) egyenletet, egy rekurziós kifejezés adható meg az alsó és a felső féltér integrációs állandói között, amely a mátrixműveletek elvégzése után a következő alakot ölti [BUCHANAN 1987]:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_n \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_{11} & \underline{\underline{M}}_{12} \\ \underline{\underline{M}}_{21} & \underline{\underline{M}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahol $\underline{\underline{M}}_{ij}$ -k (2x2)-es almátrixokat jelentenek. Ebből következően a diszperziós reláció:

$$\det(\underline{\underline{M}}_{11}) = 0 \quad (9).$$

A kapott összefüggésekből kiolvasható, hogy a homogén, de lassan változó rétegvastagságú összletben terjedő P-SV hullámok diszperziós relációja a különböző x távolságokhoz tartozó lokálisan homogén szerkezeteknek megfelelő diszperziós relációk sorozatával közelíthető.

A következő pontban ennek egy alkalmazási lehetőségét vizsgáljuk meg.

Numerikus eredmények

A rétegvastagság-változás és a diszperziós reláció kapcsolatát egy egyszerű, háromréteges, szimmetrikus összleten végzett vizsgálat alapján mutatjuk be, mely összlet paraméterei megegyeznek FANCSIK [1995] publikációjában közölt modellparaméterekkel. Ennek az az oka, hogy lehetőségünk nyílik ezáltal a sebesség-inhomogenitások és a rétegvastagság-változás okozta effektusok összehasonlítására, ami a gyakorlati mérések szempontjából érdekes tanulságokkal szolgálhat. A modellparamétereket és a vastagságfüggvényt az 1. táblázat tartalmazza.

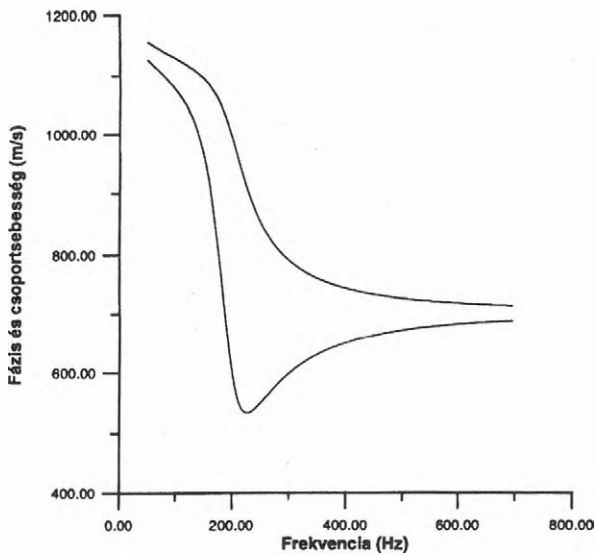
α (m/s)	β (m/s)	ρ (kg/m ³)	H_0 (m)
3000	1200	2100	—
2000	700	1400	3
3000	1200	2100	—

vastagságfüggvény: $H(x) = H_0 \left(0,7 + 0,3e^{-\left(\frac{x}{10H_0}\right)^2} \right)$

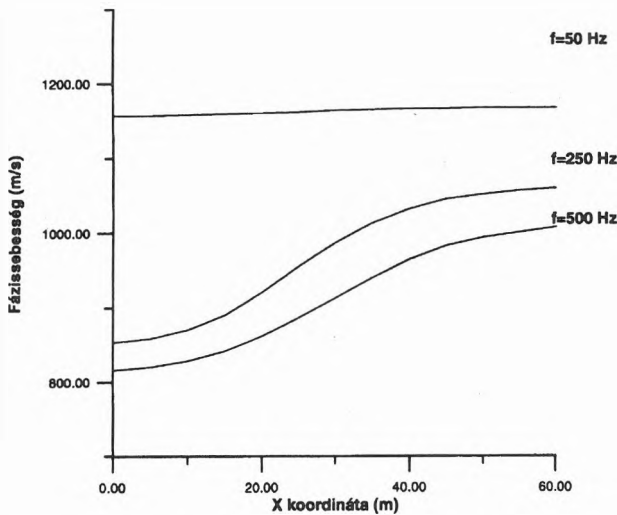
1. táblázat. A háromréteges modell paraméterei és a rétegvastagság-változást leíró függvény, ahol α a longitudinális, β a transzverzális testhullámsebesség, ρ a sűrűség, H_0 az $x = 0$ helyen vett rétegvastagság

Table 1. Parameters of three-layered model and function of inhomogeneity, where α , β is a longitudinal and shear velocity, ρ is a density, H_0 is a thickness at $x = 0$

A 2. ábrán az $x=0$ m távolságban számított fázis- és csoportsebesség görbe van feltüntetve. Az offset-hatás tanulmányozása céljából ábrázoljuk az x koordináta és a fázissebesség kapcsolatát egy-egy konkrét frekvencián (3. ábra). Az ábráról leolvasható, hogy az Airy-fázis körüli (250 Hz) frekvenciatartományban a fázissebesség változás mértéke meghaladja a vastagságváltozás mértékét. Ez a jelenség a testhullámsebesség helyfüggése esetén is fennáll [FANCSIK 1995], tehát megállapíthatjuk: a lassan elvéko-



2. ábra. Fázis és csoportsebesség az $x = 0$ pontban
 Fig. 2. Phase and group velocity at $x = 0$



3. ábra. Fázissebesség a hely függvényében rögzített frekvenciák esetén
 Fig. 3. Phase velocity in function of x coordinate at the fixed frequencies

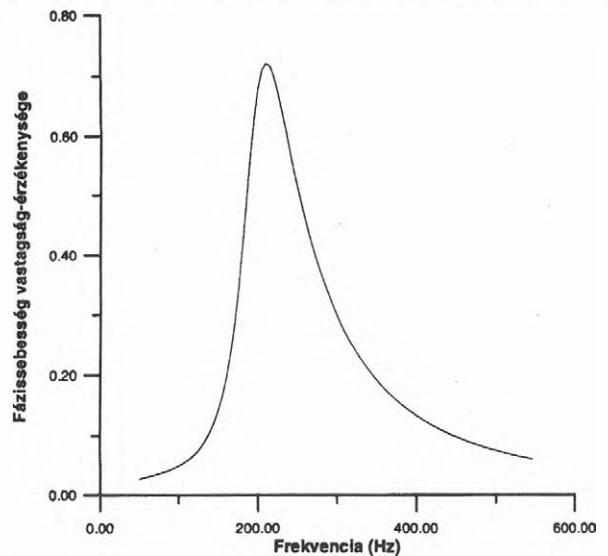
nyodó telep, ill. a lassan növekvő transzverzális testhullámsebesség az Airy-frekvencia közelében módosítja legnagyobb mértékben a fázissebességet, és e módosulás a hely és frekvencia függvényében szinte ugyanolyan irányú és nagyságú mindkét esetben. A problémát most már csak az jelenti, hogy a két hatást egymástól ebben a frekvenciaintervallumban nem lehet egymástól elkülöníteni. Pontosabban fogalmazva: ekvivalencia jelenséggel állunk szemben,

ami SH hullámok esetén is létezik — erre először DOBRÓKA [1988b] hívta fel a figyelmet.

Az idézett dolgozatban bevezetett vastagságérzékenység függvényt jelen problémánkra is definiálhatjuk:

$$\varphi_c = \frac{d \ln c(H)}{d \ln H}$$

ahol c a fázissebesség, H a rétegvastagság. φ_c -t különböző frekvenciákra meghatározva és ábrázolva előállíthatjuk a fázissebesség-érzékenység görbét, melyet — a példamodellünkre alkalmazva — a 4. ábra tartalmaz. A görbe alacsony frekvenciáknál nullától indul és az Airy-fázis környezetében éri el a maximumát. Ez nyilvánvaló, hiszen a kis frekvenciák nagy hullámhosszokat jelentenek, olyan nagyokat, amelyekhez képest a véges csatornavastagság elhanyagolható hatású. A frekvencia növekedésével csökkenő hullámhossz az Airy-fázis közelében esik a rétegvastagság nagyságrendjébe, ezt jelenti a maximum („rezonancia”). Az egyre csökkenő hullámhosszú hullámok a csatornát már mint „egyre inkább végtelen teret érzékelik”, vagyis a vastagságváltozás hatása megint egyre kevésbé jelentős, ezért tart a görbe $f \rightarrow \infty$ esetén nullához. Ezen eredményeket a fázissebesség-érzékenység görbékkel [FANCSIK 1995] összevetve világossá válik az ekvivalencia és annak feloldhatósága. A két görbe teljesen hasonló lefutású az Airy-fázishoz közeli frekvenciákig (növekedés, maximum), azonban az ettől nagyobb frekvenciák irányában a fázissebesség-érzékenység 1-hez, míg a vastagságérzékenység 0-hoz



4. ábra. A fázissebesség vastagság-érzékenysége
 Fig. 4. Sensitivity of phase velocity to layer thickness

tart. Vagyis túl az Airy-frekvencián elsősorban a sebesség-inhomogenitások jelentkeznek nagy súllyal, tehát lehetőségünk van — legalábbis elméletileg — leválasztani ezt a hatást, s ennek ismeretében a réteghatár változásaira visszakövetkeztetni.

Összefoglalás

Láttuk, hogy homogén, de változó vastagságú közegben haladó P-SV hullámok diszperziós összefüggését a különböző x távolságokhoz tartozó lokálisan homogén szerkezetek diszperziós egyenleteivel közelíthetjük, amennyiben teljesülnek a (4) és (7) szeparációs feltételek. Modellszámítás alapján megvizsgáltuk a csatornavastagság változásának hatását a diszperziós egyenletre, s azt találtuk, hogy a fázissebességet az Airy-frekvencia közelében perturbálja a legnagyobb mértékben. Modellszámításainkat egy másik dolgozat transzverzális testhullámsebesség inhomogenitásokra vonatkozó eredményeivel összevetve egy ekvivalencia jelenséget ismerhetünk fel. Az érzékenységgörbe vizsgálatok azonban lehetőséget teremtettek az ekvivalencia feloldására.

A bevezetőben már említettük, hogy a csatornahullámok elméletében elért eredmények minden további nélkül általánosíthatók felületi hullámok esetére, tehát az itt leírtak lényegében a környezetvédelmi és mérnökgeofizikai gyakorlatban előforduló hasonló jellegű problémákra is érvényesek maradnak.

HIVATKOZÁSOK

ÁDÁM O. 1987 : Szeizmikus kutatás I. Tankönyvkiadó, Budapest
 BODOKY A., BODOKY T. 1983: Preliminary result of numerical modelling of 'Seam-waves'. *Geophysical Transactions* **29**, 2, 129–140
 BUCHANAN D. J. 1978: The propagation of attenuated SH channel waves. *Geophysical Prospecting* **26**, 26–28
 BUCHANAN D. J. 1987: Dispersion calculation for SH and P-SV waves in multilayered coal seams. *Geophysical Prospecting* **35**, 62–70

DANILOV V. N., DOBRÓKA M., YAMSHIKOV V. S. 1990: The propagation of channel waves in a coal seam with horizontal and vertical inhomogeneities. *Geophysical Transactions* **35**, 199–208
 DOBRÓKA M., ORMOS T. 1983: Absorption-dispersion relation for Love channel waves. *Geophysical Transactions* **29**, 2, 117–128
 DOBRÓKA M. 1987: Love seam waves in a horizontally inhomogeneous three-layered medium. *Geophysical Prospecting* **35**, 502–516
 DOBRÓKA M. 1988a: On the absorption-dispersion characteristics of channel waves propagating in coal seams of varying thickness. *Geophysical Prospecting* **36**, 318–331
 DOBRÓKA M. 1988b: Love típusú telephullámok elmozdulásfüggvényei és adszorpciós-diszperziós tulajdonságai III. *Magyar Geofizika* **XXIX**, 1–2
 DOBRÓKA M. 1995: Laterálisan inhomogén hullámvezetőben terjedő Love típusú hullámok adszorpciós-diszperziós jellemzőinek joint inverziója. *Magyar Geofizika* **36**, 1
 DRESEN L., KERNER C., KÜHBACH B. 1985: The influence of an asymmetry in the sequence 'rock-coal-rock' on the propagation of Rayleigh seam-wave. *Geophysical Prospecting* **33**, 519–539
 EIVISON F. F. 1955: A coal seam as a guide for seismic energy. *Nature* **176** (4495), 1224–1225
 FANCSIK T. 1995 : Laterálisan gyengén inhomogén közegben terjedő P-SV hullámok diszperziós relációja és elmozdulásfüggvényei. *Magyar Geofizika* **36**, 3, 215–221
 KERNER C., DRESEN L. 1985: The influence of dirt bands and faults on the propagation of Love seam waves. *Journal of Geophysics* **57**, 77–79
 KORN M., STÖCKL H. 1982: Reflection and Transmission of Love Channel Waves at Coal Seam Discontinuities Computed with a Finite Difference Method. *Journal of Geophysics* **50**, 171–176
 KREY Th. 1963: Channel waves as a tool of applied geophysics in coal mining. *Geophysics* **28**, 701–704
 RÄDER R., SCHOTT W., DRESEN L., RÜTHER H. 1985: Calculation of dispersion curves and amplitude-depth distribution of Love channel waves in horizontally layered media. *Geophysical Prospecting* **33**, 800–816