

# A linearizált inverzió minőségjellemzői

PRÁCSER E.<sup>@</sup>, PRODÁN T. H.<sup>&</sup>

MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézet, Sopron, Csatkai E. u. 6–8.

<sup>@</sup>E-mail: pracser.erno@csfk.mta.hu

<sup>&</sup>E-mail: prodan.timea@csfk.mta.hu

A geofizikai mérési adatok feldolgozására az utóbbi években előtérbe kerültek a bonyolultabb szerkezetek esetére alkalmazott két- és háromdimenziós inverziók. Az egydimenziós inverziók már megoldott feladatnak számítanak. Ennek ellenére az inverziós algoritmusok tanulmányozása során érdemes az egydimenziós esettel is foglalkozni, hiszen ebben az esetben az inverzió bizonyos tulajdonságait szemléletesebben be lehet mutatni. Ebben a cikkben a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásán alapuló linearizált inverzió legfontosabb jellemzőivel foglalkozunk. Az inverzió által szolgáltatott modellparaméterek megbízhatóságára vonatkozólag a paraméterek szórása, korrelációs és felbontóképesség-mátrixa, valamint a sajátértékek nagysága nyújt hasznos információt. A levont következtetések érvényesek a többdimenziós esetekre is, de nem mindegyik minőségjellemző esetén létezik szemléletes megjelenítés.

## Prácsér, E., Prodán, T. H.: Characteristics of the quality of the linearized inversion

Regarding the geophysical data processing and interpretation for complicated structures the 2- and 3-dimensional inversions come to the fore in the last years. The one-dimensional inversions are already considered as a solved task. However, the one-dimensional inversion is worth studying in inversion algorithms, because in this case the particular properties of the inversion can be presented more expressive. This paper deals with the most important properties of the linearized inversion based on the singular-value decomposition of the Jacobian. Concerning the reliability of model parameters obtained by the inversion, useful information are provided by standard deviation of the parameters, by the matrix of correlation and resolution, and the magnitude of the eigenvalues. Conclusions drawn from one-dimensional inversion are valid also for multi-dimensional cases, but there is no expressive graphical demonstration for all quality characteristics.

*Beérkezett:* 2014. július 4.; *elfogadva:* 2014. október 5.

## Bevezetés

Célunk a geoelektromos modell paramétereinek a mérési adatokból inverzióval történő meghatározása. A geofizikai inverzió matematikai alapjai már évtizedek óta rendelkezésre állnak, az inverziók széles körű alkalmazása a számítástechnikai lehetőségek fejlődésével párhuzamosan alakult. Kezdetben elsősorban egydimenziós modellekre terjedt ki az inverzió linearizált változatának használata, és erre főleg a Marquardt-inverziót alkalmazták (Marquardt 1963), amely a mért és az illesztett adatok közötti eltérést minimalizálta a legkisebb négyzetek módszerével. A Marquardt-eljárásnak a lényege, hogy a tisztán matematikailag levezethető legkisebb négyzetes minimalizálást egy csillapító tényezővel javította, azaz stabilizálta. Az inverziót elsősorban azokra a mérésekre alkalmazták, amelyekre az előremodellezés kevesebb számításigénnyel járt. Ilyenek a magnetotellurikus (Jupp, Vozoff 1972) és az egyenáramú (Koefoed 1979) mérések. Jupp és Vozoff (1972) már a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontását alkal-

mazta. A linearizált inverzió egy iterációs lépésének a megoldására elterjedt még a konjugált gradiens módszer is (Tarantola 1987, Rodi, Mackie 2001). Az előremodellezés Jacobi-mátrixából számíthatóak a kapott modellparaméterek kovariancia- és korrelációs mátrixai, ezeket már korábban is alkalmazták. Ezek a statisztikai jellemzők a globális optimalizáló eljárások (pl. *simulated annealing*) esetén is számíthatók (Sharma et al. 2005). Ebben az esetben ugyanis rendkívül nagy számú paraméter áll rendelkezésre. A nagyszámú paraméterből statisztikailag számított mátrixok és a linearizált inverzió Jacobi-mátrixából számított mátrixok – ha nem is esnek teljesen egybe – jellege hasonló. A linearizált inverzió esetében gyakran alkalmazott korrelációs mátrix számításának (Menke 1984, Salát et al. 1982) vannak bizonyos torzulásai, amire rámutatunk, és erre megoldást is javasolunk. Továbbá foglalkozunk a geofizikai alkalmazásban még kevésbé elterjedt felbontóképesség-mátrix számításával és a sajátértékek elemzésével is, amelyek a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásának (SVD) alkalmazásakor tehetőek meg.

## A linearizált inverzió a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásával

Az inverzió feladata a modellparaméterek meghatározása a mérési adatok alapján. Sajnos olyan direkt algoritmus nem létezik, amelyik a mérési adatok alapján közvetlenül határozná meg a modellparamétereket. Ezért az inverziók – valamilyen modellt feltételezve – általában az előremodellezésen alapulnak. Valamilyen kezdeti modelltől kiindulva az inverziós algoritmusok az előremodellezés többszöri elvégzésével úgy változtatják a modellparamétereket, hogy a hozzájuk tartozó elméleti adatok közel legyenek a mérési adatokhoz. Jelölje  $\mathbf{f}$  ezt az előremodellezést!

$$\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \mathbf{d}.$$

Az  $\mathbf{m}$  vektor tartalmazza a modellparamétereket, a  $\mathbf{d}$  a számított adatokat! Egy mérési adat lehet mért feszültség, látzólagos fajlagos ellenállás vagy egyéb geofizikai mérési adat, ennek az inverzió szempontjából nincs nagy jelentősége. A modellparaméterek esetünkben a rétegek fajlagos ellenállásai és vastagságai, melyeket a  $j$ -edik rétegben  $\rho_j$ -vel, illetve  $d_j$ -vel jelölünk. A  $\mathbf{d}$  adatvektor dimenziója  $n$ , az  $\mathbf{m}$  modellparaméter-vektoré  $m$ . Feltételezzük, hogy  $n > m$ .

A cél az  $L_2$  norma minimalizálása:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}_0\| = \min.$$

A  $\mathbf{d}_0$  vektor tartalmazza a mérési adatokat. Az előremodellezés Taylor-sorfejtésének első két tagja

$$\mathbf{f}(\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{m}) + \mathcal{J}\Delta\mathbf{m}. \quad (1)$$

A  $\mathcal{J}$  érzékenységi mátrix vagy Jacobi-mátrix az  $\mathbf{f}$  előremodellezés ismeretében számítható, a számított mérési adatok modellparaméterek szerinti parciális deriváltjait tartalmazza. Az (1) képlet az iteráción alapuló linearizált inverzió alapja. Feltételezi, hogy van egy közelítő  $\mathbf{m}$  modellparaméter-vektorunk, és a célunk ennek a módosítása egy  $\Delta\mathbf{m}$  vektorral annak érdekében, hogy az új modellhez tartozó  $\mathbf{f}(\mathbf{m} + \Delta\mathbf{m})$  elméleti adat a lehető legközelebb legyen a mérési adatokhoz. A  $\mathcal{J}$  érzékenységi mátrix szinguláris értékek szerinti felbontása (SVD) (Jackson, 1972)

$$\mathcal{J} = \mathcal{U}\Lambda\mathcal{V}^T, \quad (2)$$

ahol az  $\mathcal{U}$  mátrix a sajátvektorokat tartalmazza az adattérben, a  $\mathcal{V}$  mátrix a paraméterterbeli sajátvektorokat tartalmazza. A  $\Lambda$  a sajátértékeket tartalmazó átlós mátrix, az SVD-t számító algoritmus monoton csökkenő sorrendbe rendezi a  $\lambda_k$  sajátértékeket.  $T$  jelöli a mátrix transzponáltját. Az  $\mathcal{U}$  és  $\mathcal{V}$  mátrixok  $k$ -adik oszlopait jelöljük  $\mathbf{u}_k$ -val illetve  $\mathbf{v}_k$ -val! Ekkor érvényesek a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}\mathbf{v}_k &= \lambda_k \mathbf{u}_k, & \mathcal{J}^T \mathbf{u}_k &= \lambda_k \mathbf{v}_k, \\ \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_l &= \mathbf{0}, & \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_l &= \mathbf{0}, \\ & & \text{ha } k \neq l, \quad 1 \leq k, l \leq \min(m, n) \end{aligned}$$

azonosságok. Ezeket és az (1), (2) képletet felhasználva megkapjuk a  $\Delta\mathbf{m}$ -et meghatározó képletet:

$$\mathcal{V}\mathcal{V}^T\Delta\mathbf{m} = \mathcal{V}\Lambda^{-1}\mathcal{U}^T\Delta\mathbf{d}.$$

Az ismert  $\Delta\mathbf{d}$  vektor a mérési adatok és az aktuális közelítő modellhez tartozó elméleti adatok különbségét tartalmazza. A  $\mathcal{V}\Lambda^{-1}\mathcal{U}^T$  mátrixot általánosított inverznek vagy Lánczos-inverznek is nevezik. Fel kell hívni a figyelmet a  $\Delta\mathbf{m}$  előtt álló  $\mathcal{V}\mathcal{V}^T$  mátrixra. Ezt  $\mathcal{R}$ -rel jelöljük, felbontóképesség-mátrixnak nevezzük, és kedvező esetben ez megegyezik az egységmátrixszal. Ellenkező esetben az egyes modellparaméterek nem határozhatók meg külön-külön, hanem csak a lineáris kombinációik. Könnyen levezethető, hogy ha a klasszikus legkisebb négyzetek módszerén alapuló minimalizálási eljárás létezik, akkor az ekvivalens a (3) képlettel. A Marquardt-féle csillapítást itt úgy érjük el, hogy a (3) képletben a  $\Lambda^{-1}$  átlós mátrixban az  $1/\lambda_j$   $j$ -edik elem helyett annak a módosított változatát alkalmazzuk,

$$\lambda_j / (\lambda_j^2 + \alpha), \quad (4)$$

ahol  $\alpha$  a csillapító tényező.

Az  $\mathbf{m}$  modellparaméter-vektor kovarianciamátrixa kiszámítható a  $\mathcal{J}$  Jacobi-mátrixból, vagy az SVD felbontásának a  $\mathcal{V}$  mátrixából:

$$\text{cov}(\mathbf{m}) = \sigma^2 (\mathcal{J}^T \mathcal{J})^{-1} = \sigma^2 \mathcal{V}\Lambda^{-2}\mathcal{V}^T, \quad (5)$$

feltételezve, hogy az egyes adatokat terhelő hibák függetlenek. Itt  $\sigma$  a

$$(d_i - f_i(\mathbf{m})), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eltérés-számsorozat tagjainak a szórása. Másképpen megfogalmazva a  $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{m})$  vektor kovarianciamátrixa  $\sigma^2 \mathcal{I}$ , ahol  $\mathcal{I}$  az egységmátrix. A (3) képlettel bevezetett felbontóképesség-mátrix számítása is a  $\mathcal{V}$  paraméterterbeli sajátvektorokat tartalmazó mátrix alapján történik,

$$\mathcal{R} = \mathcal{V}\mathcal{V}^T. \quad (6)$$

Az (5) és a (6) képlet között az a legfontosabb különbség, hogy szemben a kovarianciamátrix számításával a felbontóképesség-mátrix számításakor a sajátértékeket nem vesszük figyelembe. A  $\text{cov}(\mathbf{m})$  kovarianciamátrix (5) átlója a modellparaméterek szórásnégyzeteit tartalmazza.

Felvethető az a kérdés is, hogy ismert  $\text{cov}(\mathbf{m})$  esetén mit mondhatunk az adatok kovarianciamátrixáról. Tekintettel arra, hogy az inverzió egy iterációs lépése az általában nem invertálható Jacobi-mátrix általánosított inverzén alapul, nem várható el, hogy az (5) szerinti  $\text{cov}(\mathbf{m})$ -ből kiindulva pontosan visszakapjuk a  $\sigma^2 \mathcal{I}$  mátrixot. Figyelembe véve, hogy  $\Delta\mathbf{d} = \mathcal{J}\Delta\mathbf{m}$ , és alkalmazva az SVD komponenseire vonatkozó tulajdonságokat, valójában azt kapjuk, hogy

$$\text{cov}(\Delta\mathbf{d}) = \sigma^2 \mathcal{U}\mathcal{U}^T.$$

$\sigma^2$  után ebben a képletben az egységmátrix helyett az információúsúség-mátrix (Jackson 1972) áll, amely csak az ideális esetben ( $m = n$ , invertálható Jacobi-mátrix) egyezik meg az egységmátrixszal. Az  $\mathcal{U}\mathcal{U}^T$  mátrix szintén hasznos jellemzője lehet a modellnek és a mérésnek, de ennek az elemzése most nem célunk. Annyi mindenesetre kijelenthető, hogy ha a linearizált inverzió alapján próbálunk a paramé-

terterbeli ( $\text{cov}(\mathbf{m})$ ) és az adattérbeli ( $\text{cov}(\Delta\mathbf{d})$ ) kovarianciamátrixok között kapcsolatot megállapítani, ez a kapcsolat nem lesz kölcsönösen egyértelmű.

Az egyes paraméterek szórásait jelöljük D-vel! Ez a szórárs a paraméterek megbízhatóságának egy fontos jellemzője (Tarantola 1987). Az  $\mathbf{m}$  vektor korrelációs mátrixa a kovarianciamátrixból számítható, az  $i, j$  indexű mátrixelem,

$$D(m_i) = \sqrt{\text{var}(m_i)} = \sqrt{\text{cov}(\mathbf{m})_{i,i}},$$

$$\text{corr}(\mathbf{m})_{i,j} = \frac{\text{cov}(\mathbf{m})_{i,j}}{\sqrt{\text{cov}(\mathbf{m})_{i,i} \text{cov}(\mathbf{m})_{j,j}}}. \quad (7)$$

A kovarianciamátrixot és a korrelációs mátrixot már többen is alkalmazták az inverzió minőségének a jellemzésére (Menke 1984, Dobróka et al. 1991, Gyulai, Ormos 1997). A kovarianciamátrix számítására az (5) képlet  $\mathcal{J}$ -t tartalmazó kifejezést alkalmazták, ami azzal ekvivalens, amikor az SVD-n alapuló kovarianciamátrix számítására valamennyi sajátvektort felhasználjuk az (5) képletben. Jackson (1972) viszont azt állítja, hogy ha figyelembe vesszük a nagyon kis sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat is, az irreálisan nagy szórásokat eredményezhet. Fontos megjegyezni, hogy az (5) képlet arra az esetre vonatkozik, amikor az iterációs elven működő inverziót csillapító tényező nélkül alkalmazzuk. Ezért a kovarianciamátrix, illetve a korrelációs mátrix számításának megbízhatóságával kapcsolatban kételyek merülhetnek fel, hiszen a csillapító tényező nélküli inverzió is adhat irreális modellt. Egyes paraméterpárok között a korrelációs mátrixban megjelenhetnek indokolatlanul magas korrelációk. Ezt szintetikus adatokon végzett inverziós példákön mutatjuk meg.

Ha csak az egyes  $m_k$  modellparaméterek szórását (szórásnégyzetét) kívánjuk meghatározni, nem szükséges a teljes kovarianciamátrix kiszámítása, elegendő egy kisebb számításigényű képlet alkalmazása,

$$\text{var}(m_k) = \sum_{i=1}^p \left( \frac{v_{k,i}}{\lambda_i} \right)^2,$$

ahol  $v_{k,i}$  a paraméterterbeli  $\mathbf{v}_k$  sajátvektor  $i$ -edik komponense,  $p$  a nullától különböző sajátértékek száma. Abban az esetben, ha a mérési adatok száma lényegesen meghaladja a modellparaméterek számát ( $n \gg m$ ), akkor általában  $p = m$ . Ha valamelyik  $\lambda_k$  sajátérték nagyon kis értékű, akkor  $\text{var}(m_k)$  valószínűtlenül nagy értéket vehet fel, esetleg a becsült paraméter többszöröse is lehet, ami a gyakorlatban nyilvánvalóan használhatatlan. Jackson (1972) azt javasolja, hogy csak annyi ( $q \leq m$ ) sajátértéket érdemes figyelembe venni, hogy a szórásnégyzet még ne haladjon meg egy  $t_k$  küszöbértéket:

$$\text{var}(m_k) = \sum_{i=1}^q \left( \frac{v_{k,i}}{\lambda_i} \right)^2 < t_k. \quad (8)$$

$t_k$  tényleges értéke függhet az inverziós modell tulajdonságaitól, ezért érdemes úgy megválasztani, hogy a szórárs semmiképpen ne legyen nagyobb, mint a paraméter abszolút

értéke. A (8) képletben mindegyik  $k$  paramétersorszámhoz hozzárendel egy  $q_k$  értéket, és meghatározható a modellre vonatkozó legkisebb  $q$  érték:

$$q_{\min} = \min_{1 \leq k \leq m} q_k.$$

Az (5) kovarianciamátrix számítását kétféleképpen módosíthatjuk. Az egyik megoldás szerint a (8) képletnek megfelelően elhagyjuk a legkisebb sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat, azaz az (5) képletben csak  $q_{\min}$  sajátvektort veszünk figyelembe, vagy alkalmazzuk a (4) csillapítást ugyanúgy, mint az inverzió egy iterációs lépésénél. A szintetikus adatokon végzett tesztek alapján a csillapító tényező módosítás a célszerűbb.

Azokat a kis sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat, amelyeket Jackson (1972) szerint a (4) feltétel alapján a szórársnégyzet számításakor nem kell figyelembe venni, érdemes elhagyni az  $\mathcal{R} = \mathcal{V}\mathcal{V}^T$  felbontóképesség-mátrix számításakor is. Ez azt jelenti, hogy a  $\mathcal{V}$  mátrix  $m$  helyett csak  $q_{\min}$  ( $q_{\min} < m$ )  $\mathbf{v}_k$  sajátvektort tartalmaz. Az  $m$  sajátvektorral számított felbontóképesség-mátrix általában az egységmátrix, amely nem tartalmaz információt a modellparaméterek közötti összefüggésekre vonatkozólag, hanem mindössze azt jelenti, hogy ha  $p = m$ , pontos szintetikus adatok esetében valamennyi modellparaméter meghatározható.

A sajátértékek nagyságrendjének az elemzése is fontos információt nyújthat az inverzió stabilitására. A legfontosabb a legnagyobb és a legkisebb sajátérték hányadosa, amely jól jellemzi a paraméterek meghatározhatóságát. Három esetet különböztethetünk meg:

- a)  $p < m$ ,
- b)  $p = m$ , és  $\lambda_{\max} / \lambda_{\min} \gg 1$ ,
- c)  $p = m$ , és a  $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$  arány nem túl nagy.

Az a) eset azt jelenti, hogy eleve kizárt, hogy az inverzióval valamennyi modellparamétert meg tudjuk határozni. Ekkor az  $\mathcal{R}$  felbontóképesség-mátrix biztosan különbözik az egységmátrixtól. Ez az eset az egydimenziós inverzió alkalmazásakor, egy jól megtervezett mérés során nem túl gyakori. Két-, illetve háromdimenziós inverziók esetén viszont gyakran előfordul. A b) eset azt jelenti, hogy elméletileg valamennyi modellparaméter meghatározható lenne, de a gyakorlatban ebben az esetben érvényesül az ekvivalencia, azaz bizonyos modellparaméterek meghatározása bizonytalan, csak a közöttük levő kapcsolat kapható meg. A c) eset a legkedvezőbb, ekkor a paraméterek meghatározhatók, csak a mérési adatokat terhelő hibák miatt jelentkezhet némi pontatlanság a modellparaméterekben. Sajnos – különösen a két- és háromdimenziós inverzióknál – ez az eset a gyakorlatban ritkán fordul elő. A legnagyobb és a legkisebb sajátérték arányára vonatkozólag az egydimenziós inverziók esetében azt tapasztaltuk, hogy ha a

$$\lambda_{\max} / \lambda_{\min} < 10^4$$

feltétel teljesül, az még lehetővé teszi a paraméterek elfogadható pontossággal való meghatározhatóságát. A kép-

letben szereplő felső korlát természetesen nem egy egzakt módon meghatározott érték, a modellparaméterektől és azok számától is változhat az értéke.

A szintetikus adatokkal végzett kísérleteink során zajmentes és zajjal terhelt adatokkal is végzünk inverziókat. A zajmentes adatokkal való invertálást az indokolja, hogy az SVD alapján származtatott jellemzők elsősorban a kapott inverziós modellt jellemzik az alkalmazott mérési elrendezésre. Lényegében mindegyik mennyiséget a Jacobi-mátrixból vezetjük le. A felbontóképesség-mátrix és a sajátértékek kizárólag csak a modelltől függenek, értéküket közvetlenül nem befolyásolják a mérési adatok, illetve azok hibái. A kovarianciamátrix számításakor is csak egy egyszerű feltételezéssel élünk az adatokat terhelő hibákra vonatkozólag. A mérési adatok és azok hibái természetesen befolyásolják az iterációk sorozatát, és zajjal terhelt adatok esetén a modell különbözhet a szintetikus adatok generálására használt modelltől. Ha pontosan egy meghatározott modellre vonatkozó jellemzőket akarunk meghatározni, akkor a zajjal nem terhelt szintetikus adatokkal elvégzett inverzió elemzésének is értelme van.

## Első példa

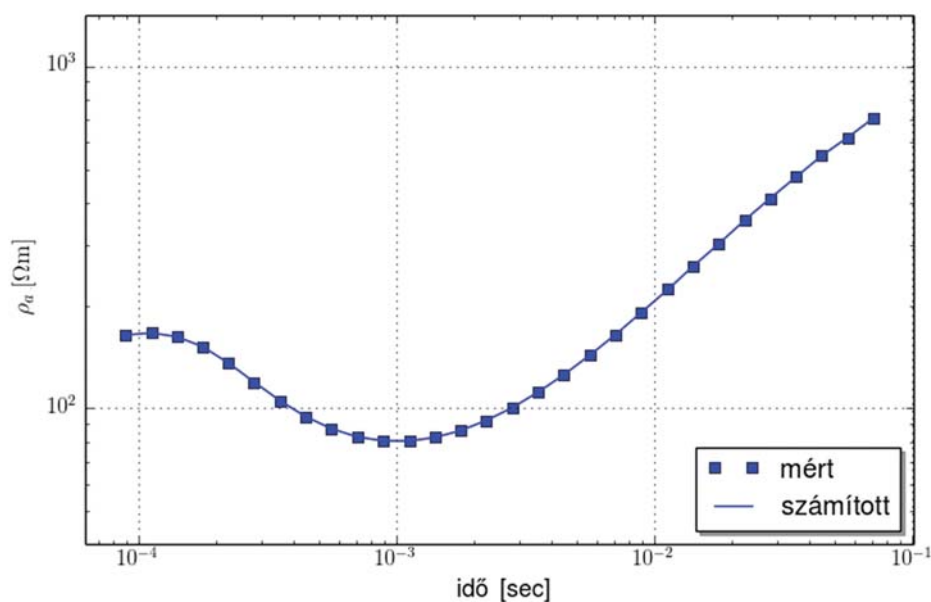
Az első példán szintetikus adatokon mutatjuk be az inverzió eredményét és annak paramétereit. Tranziens elektromágneses méréseket szimulálunk, az elektromágneses teret a kör alakú adóban folyó egyenáram kikapcsolásával gerjesztjük, az adó középpontjában mérjük a mágneses térerősség függőleges komponensének az idő szerinti deriváltját. Ezekből az értékekből látszólagos fajlagosellenállás-értékek számíthatók és ezeket ábrázoljuk. A tranziens elektro-

mágneses mérések részletes ismertetése Kaufman és Keller könyvében olvasható (1983).

**1. táblázat** | Az 1. modell paramétereit szintetikus adatok számításához (2., 4. oszlop), az inverzióval kapott paraméterek szórásai (3., 5. oszlop)

Réteg	$\rho$ [ $\Omega\text{m}$ ]	$D(\rho)$	$d$ [m]	$D(d)$
1.	150,0	0,0048	150,0	0,0135
2.	20,0	0,0771	50,0	0,0871
3.	2000,0	0,0133	$\infty$	

A modellparamétereket az 1. táblázat 2. és 4. oszlopa tartalmazza. Tekintettel arra, hogy a 2. réteg egy viszonylag vékony jól vezető réteg, az ekvivalencia miatt nem várható el, hogy a paramétereit külön-külön is jól meghatározhatóak legyenek. Ennek ellenére az inverzió – szintetikus és zajmentes adatokról lévén szó – nagy pontossággal adja vissza a szintetikus adatrendszer számításához felhasznált modellparamétereket, nincs is szükség külön táblázatban való megjelenítésre. Az 1. táblázat 3. és 5. oszlopa az inverzióval kapott paraméterek szórását tartalmazza. A kovarianciamátrix, illetve a szórásértékek számításakor azt feltételeztük, hogy a mérési adatokat 5% hiba terheli. A második réteg paramétereinek a szórása jelentősen meghaladja a többi 3 modellparaméter szórását. A szimulált mérési adatok és az illesztett fajlagos ellenállásgörbe teljesen egybeesik (1. ábra). Ebben az esetben a (8) feltétel szerint a felbontóképesség és a korrelációs mátrix számításakor valamennyi  $\mathbf{v}_k$  sajátvektor figyelembe veendő. Ennek megfelelően a felbontóképesség-mátrix itt az egységmátrix, azaz valamennyi modellparaméter meghatározható. A sajátértékek:



**1. ábra** | Tranziens látszólagos fajlagos ellenállás. Az inverzióval kapott látszólagos fajlagos ellenállás görbe illeszkedése az 1. példa szintetikus adataira

**Figure 1** | The fit of apparent resistivity curve obtained from the inversion of synthetic data of example 1

$$\lambda_1 = 46,681, \quad \lambda_2 = 21,575, \quad \lambda_3 = 12,516,$$

$$\lambda_4 = 4,353, \quad \lambda_5 = 0,426.$$

A legkisebb sajátérték viszonylag kis értékű, és jelez egy kis bizonytalanságot a paraméterek meghatározhatóságára vonatkozólag. Az inverzió stabilitásának egy másik fontos mérőszáma a legnagyobb és a legkisebb sajátérték hányadosa, itt  $\lambda_1/\lambda_5 = 109,57$ .

A modellparaméterek korrelációs mátrixa, figyelembe véve valamennyi sajátvektort

$$\text{corr}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,70 & 0,28 & -0,77 & 0,71 \\ 0,70 & 1,00 & 0,51 & -0,97 & 1,00 \\ 0,28 & 0,51 & 1,00 & -0,44 & 0,53 \\ -0,77 & -0,97 & -0,44 & 1,00 & -0,97 \\ 0,71 & 1,00 & 0,53 & -0,97 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (9)$$

A mátrixból kilovasható, hogy a  $\rho_2$  és a  $d_2$  rétegparaméterek között nagyon szoros a kapcsolat, ami azt jelenti, hogy a második réteg paraméterei külön-külön nem határozhatók meg, csak a vízszintes irányú összegzett vezetőképesség. A korrelációs mátrix alapján levont következtetés nincs teljesen összhangban az  $\mathcal{R}$  felbontóképesség-mátrixszal, mivel ennél a példánál  $\mathcal{R}$  az egységmátrix, amiből arra következtethetünk, hogy valamennyi rétegparaméter jól meghatározható. Ez a jó meghatározhatóság természetesen zajmentes adatokra vonatkozik.

### Második példa

Az összegzett vízszintes irányú vezetőképesség megtartásával vékonyítsuk el a második, a környezetéhez képest jól

vezető réteget! A réteg vastagsága és fajlagos ellenállása a tizedrésze lett az első modell megfelelő paramétereinek. A modellparamétereket a 2. táblázat tartalmazza.

**2. táblázat** | A 2. modell paraméterei szintetikus adatok számításához (2., 4. oszlop), az inverzióval kapott paraméterek szórásai (3., 5. oszlop)

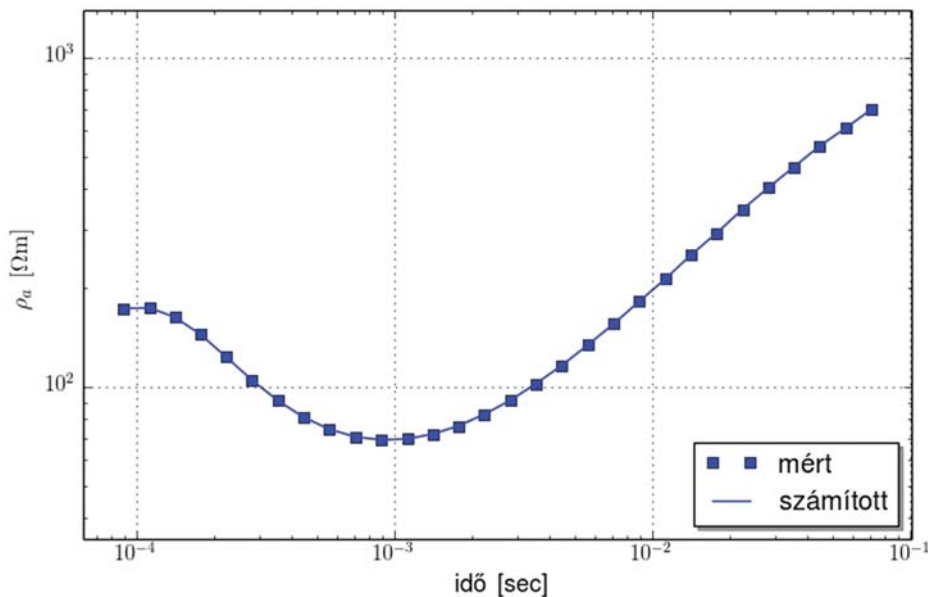
Réteg	$\rho$ [ $\Omega\text{m}$ ]	$D(\rho)$	$d$ [m]	$D(d)$
1.	150,0	0,0043	150,0	0,0139
2.	2,0	0,9529	5,0	0,9665
3.	2000,0	0,0147	$\infty$	

A szintetikus, zajjal nem terhelt adatokon elvégzett inverzió természetesen most is tökéletes (2. ábra), a látszólagos fajlagos ellenállás grafikonja alig tér el az első modellétől (1. ábra). Az SVD sajátértékei

$$\lambda_1 = 49,270, \quad \lambda_2 = 25,742, \quad \lambda_3 = 13,037,$$

$$\lambda_4 = 4,527, \quad \lambda_5 = 0,037.$$

A legnagyobb és a legkisebb sajátértékek hányadosa most  $\lambda_1/\lambda_5 = 1333,3$ , ami már önmagában jelzi, hogy ennek a modellnek gyengébben határozhatóak meg a paraméterei. Az első 4 sajátérték nem különbözik lényegesen az előző modell megfelelő értékeitől. Az 5. sajátérték viszont kb. egy nagyságrenddel kisebb, ami arra utal, hogy a második réteg paraméterei külön-külön már kevésbé határozhatóak meg. Ezzel összhangban van az, hogy a (8) feltétel szerint a figyelembe veendő  $\mathbf{v}_k$  sajátvektorok száma ennél a modellnél 4. A második réteg paramétereinek gyengén meghatározható



**2. ábra** | Tranzien látszólagos fajlagos ellenállás. Az inverzióval kapott látszólagos fajlagos ellenállás görbe illeszkedése a 2. példa szintetikus adataira

**Figure 2** | The fit of apparent resistivity curve obtained from the inversion of synthetic data of example 2

ságára utalnak azok kiugróan nagy szórásai (2. táblázat). A szórás számítására itt most éppen azért nem alkalmaztuk a (8) feltételt, hogy határozottabban jelezze a gyengén meghatározottságot. A modellparaméterek 5 sajátvektorral számított korrelációs mátrixa:

$$\text{corr}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,55 & 0,25 & -0,61 & 0,55 \\ 0,55 & 1,00 & 0,64 & -0,99 & 1,00 \\ 0,25 & 0,64 & 1,00 & -0,59 & 0,64 \\ -0,61 & -0,99 & -0,59 & 1,00 & -0,99 \\ 0,55 & 1,00 & 0,64 & -0,99 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (10)$$

A mátrix jelzi a  $\rho_2$  és a  $d_2$  modellparaméterek közötti szoros kapcsolatot, de megjelennek olyan nagyobb értékek is, amelyek egyszerű fizikai ismeretekkel nehezebben magyarázhatók meg. A mátrix például a  $\rho_2$  és  $d_1$ , illetve a  $d_1$  és  $d_2$  paraméterpárok között is szoros kapcsolatot mutat. Célszerű lenne a korrelációs mátrix számítását úgy módosítani, hogy a ténylegesen elfogadható nagy korrelációs értékek megmaradjanak, de a kevésbé indokolható nagy értékek csökkenjenek. Ha a legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektort elhagyjuk, akkor a paraméterek korrelációs mátrixa:

$$\text{corr}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 1,00 & -0,47 & -0,17 & -0,42 & 0,49 \\ -0,47 & 1,00 & -0,56 & 0,07 & -1,00 \\ -0,17 & -0,56 & 1,00 & 0,33 & 0,51 \\ -0,42 & 0,07 & 0,33 & 1,00 & -0,07 \\ 0,49 & -1,00 & 0,51 & -0,07 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (11)$$

Ebből arra következtethetünk, hogy a korrelációs mátrix módosítására a kis sajátértékű sajátvektorok elhagyása nem célszerű. A 4 sajátvektorral számított korrelációs mátrixban kevésbé vannak jelen a főátlón kívüli indokolatlannak tűnő 1-hez közeli értékek, de a második réteg paraméterei közötti korreláció ellentétesre változott. Az előjelváltozás más paraméterpárok esetében is bekövetkezett. Ez nehezen elfogadható. Számítsuk ki a korrelációs mátrixot valamennyi sajátvektor figyelembe vételével, de (4) szerint egy  $\alpha$  tényezővel alkalmazzunk csillapítást!

$$\text{corr}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,35 & 0,00 & -0,45 & 0,35 \\ 0,35 & 1,00 & 0,42 & -0,96 & 1,00 \\ 0,00 & 0,42 & 1,00 & -0,32 & 0,42 \\ -0,45 & -0,96 & -0,32 & 1,00 & -0,96 \\ 0,35 & 1,00 & 0,42 & -0,96 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (12)$$

Ennél a mátrixnál megmaradt a második réteg paraméterei közötti szoros kapcsolat, a korreláció előjele sem változott meg sehol sem, viszont bizonyos, indokolatlanul nagyok tűnő korrelációk csökkentek. Ez a tény és az, hogy az inverziós algoritmus is csillapító tényezőt tartalmaz, indokolja hogy ezt a harmadik korrelációs mátrixot fogadjuk el. Az  $\alpha$  csillapító tényezőt kísérleti úton határoztuk meg. Kis csillapító tényező alig változtatja meg a korrelációkat, a túl nagy viszont az indokolt korrelációkat is lecsökkenti. Azt a csillapító tényezőt fogadtuk el, amelyik az indokolt kor-

relációt még nem csökkentette, a többiek értékét viszont igen.

A kis  $\lambda_5$  érték ellenére a felbontóképesség-mátrix 5 sajátvektorral is számítható, és akkor az az egységmátrixszal egyezik meg. A felbontóképesség-mátrix számításához a (8) feltétel szerint 4 sajátvektort érdemes felhasználni:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,51 & 0,00 & 0,01 & -0,50 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,01 & 0,00 & 1,00 & 0,01 \\ 0,00 & -0,50 & 0,00 & 0,01 & 0,49 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (13)$$

Ez a felbontóképesség-mátrix jól jelzi a második réteg paraméterei közötti szoros kapcsolatot és azt is, hogy a többi paraméter jól meghatározható, mivel a paraméternek megfelelő sorban, a főátlóban megjelenő elem 1, a többi elem 0. Az, hogy a felbontóképesség mátrixból milyen összefüggésre lehet következtetni  $\rho_2$ -re, illetve  $d_2$ -re vonatkozólag, kissé részletesebben kifejtendő. Annak érdekében, hogy a fajlagos ellenállásra és a rétegvastagságra ne kapjunk negatív értéket, az inverziós algoritmus a paraméterek logaritmusával számol. Ez azt jelenti, hogy egy iterációs lépésnél a  $\Delta \log(m)$  értékek az ismeretlenek. Ennek megfelelően a  $k$ -edik iterációs lépésben az  $m$  paraméter megváltozása

$$m^{(k+1)} = m^{(k)} e^{\Delta \log(m)}$$

Miután az inverziós algoritmus egy jó illeszkedést biztosító modellt talált, és az  $\mathcal{R}$  felbontóképesség-mátrix az egységmátrix, akkor a további iterációk során valamennyi  $m$  modellparaméterre

$$\Delta \log(m) \approx 0,$$

azaz a modellparaméterek már nem változnak. Ha a felbontóképesség-mátrix nem feltétlenül az egységmátrix, akkor teljesülnie kell az

$$\mathcal{R} \Delta \mathbf{m} \approx \mathbf{0} \quad (14)$$

közelítő egyenlőségnek. Eszerint az egyes modellparaméterek kissé változhatnak, de (14)-nek teljesülnie kell.

Vezessük be a

$$g = \log(\rho_2), \quad f = \log(d_2)$$

jelöléseket! Ekkor (14) miatt a (13) felbontóképesség-mátrix 2. és 5. sorából következik, hogy

$$\Delta g \approx \Delta f. \quad (15)$$

Ekkor a második réteg paraméterei a  $(k+1)$ -edik iterációs lépésben a

$$\rho_2^{(k+1)} = \rho_2^{(k)} e^{\Delta g}, \quad d_2^{(k+1)} = d_2^{(k)} e^{\Delta f}$$

képletek szerint változnak. Tehát  $\rho_2$  és  $d_2$  értéke változhat ugyan, de (15) miatt a hányadosuk nem változik, ami összhangban van azzal, hogy a két mennyiség korrelációja 1. Fizikailag ez azt jelenti, hogy a második réteg vízszintes irányú összegzett vezetőképessége állandó.

Megjegyzendő, hogy a felbontóképesség-mátrix kevesebb, akár 1 sajátvektorral is számítható. A szintetikus adatokon végzett számos inverziós tapasztalat azt mutatja, hogy a kevés sajátvektorral számított felbontóképesség-mátrix megmutatja, hogy mely paraméterek határozhatók meg a legbiztosabban, ezek már az inverzió első néhány lépésénél a helyeshez közeli értéket vesznek fel. Ahogy növeljük a felbontóképesség-mátrixban megjelenő sajátvektorok számát, az a többi paramétert is meghatározhatónak mutatja. Ezek az inverzió későbbi fázisában közelítenek a helyes értékhez. Végül valamennyi sajátérték figyelembevételével az egységmátrixot adja a felbontóképesség-mátrixnak, és valamennyi modellparamétert meghatározhatónak mutatja. Azokhoz a paraméterekhez, amelyeket csak az összes sajátérték alapján lehet meghatározhatónak tekinteni, az inverziós algoritmus csak nagyon lassan konvergál. Szintetikus adatok esetében a bizonytalan paraméterek csak zajmentes adatokkal tartanak a kiinduló modellparaméterekhez.

A kovarianciamátrix számításakor viszont a kevés sajátvektorral számított mátrixok gyakran értelmezhetetlenek. Ez is indokolja, hogy a kovariancia-, illetve korrelációs mátrix számítására alkalmazott hagyományos képletet ne

a kis sajátértékekhez tartozó sajátvektorok elhagyásával, hanem a csillapító tényezővel javítsuk azt.

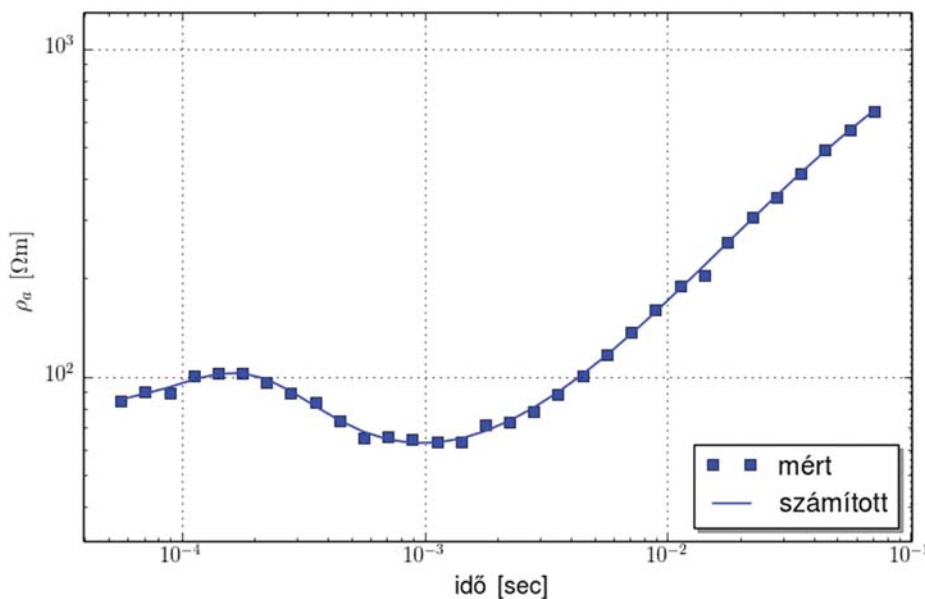
### Harmadik példa

A harmadik példában vegyünk egy négyréteges modellt, és a szintetikus adatokat terheljük 5%-os zajjal! A modellparamétereket a 3. táblázat 2. és 5. oszlopa tartalmazza. Most a zajjal terhelt adatok esetében már nem kapjuk vissza pontosan a kiinduló modellparamétereket, de az eltérés még elfogadható. A kapott modellparamétereket a 3. táblázat 3. és 6. oszlopa tartalmazza. A harmadik réteg paramétereinek a viszonylag nagyobb eltérése az ekvivalenciával indokolható. A második réteg paramétereinek az eltérése is jelentősnek tűnik, ezeknek a megbízhatóságára utalnak a nagyobb szórástértek. A szimulált mérési adatok és az inverziós modellhez tartozó fajlagosellenállás-görbe a 3. ábrán látható. A zajjal terhelt mérési adatokra jól illeszkedik az elméleti görbe. Az SVD sajátértékei

$$\lambda_1 = 44,569, \lambda_2 = 18,649, \lambda_3 = 14,253, \lambda_4 = 3,584, \\ \lambda_5 = 2,038, \lambda_6 = 0,184, \lambda_7 = 0,033.$$

3. táblázat | A 3. modell paramétereit szintetikus adatok számításához (2., 5. oszlop), az inverzióval kapott paraméterek (3., 6. oszlop) és azok szórássai (4., 7. oszlop)

Réteg	$\rho$ [ $\Omega\text{m}$ ]	$\rho$ [ $\Omega\text{m}$ ]	$D(\rho)$	$d$ [m]	$d$ [m]	$D(d)$
1.	80,0	80,6	0,0416	50,0	44,8	0,2849
2.	150,0	125,0	0,1036	100,0	110,0	0,1469
3.	2,0	3,14	1,1260	5,0	7,72	1,1660
4.	2000,0	2246,2	0,0176	$\infty$	$\infty$	



3. ábra | Tranzien্স látszólagos fajlagos ellenállás. Az inverzióval kapott látszólagos fajlagos ellenállás illeszkedése a 3. példa szintetikus adataira

Figure 3 | The fit of apparent resistivity curve obtained from inversion of synthetic data of example 3

A legnagyobb és a legkisebb sajátérték hányadosa itt  $\lambda_1/\lambda_7 = 1336,4$ , ami jelzi, hogy a 7 modellparaméter között vannak bizonytalanul meghatározhatóak. A (8) felté-

tel szerint figyelembe veendő sajátvektorok száma 5. A modellparaméterek korrelációs mátrixa az (5) képlettel számítva

$$\text{corr}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,88 & 0,44 & 0,08 & 0,98 & -0,92 & 0,45 \\ 0,88 & 1,00 & 0,68 & 0,17 & 0,96 & -0,98 & 0,69 \\ 0,44 & 0,68 & 1,00 & 0,54 & 0,55 & -0,72 & 1,00 \\ 0,08 & 0,17 & 0,54 & 1,00 & 0,12 & -0,23 & 0,54 \\ 0,98 & 0,96 & 0,55 & 0,12 & 1,00 & -0,98 & 0,56 \\ -0,92 & -0,98 & -0,72 & -0,23 & -0,98 & 1,00 & -0,73 \\ 0,45 & 0,69 & 1,00 & 0,54 & 0,56 & -0,73 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix}$$

Hasonlóan a második példához itt is megjelent a vékony réteget (3. réteg) jellemző két paraméter közötti szoros korreláció, de ezen kívül még más paraméterpárokra is nagy értékeket kaptunk. Ezek között lehetnek valóságok, de

olyanok is, amelyek csak a csillapító tényező nélküli inverzió instabilitása miatt jelentek meg. A csillapító faktoral számított korrelációs mátrix:

$$\text{corr}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,79 & 0,10 & -0,10 & 0,96 & -0,93 & 0,13 \\ 0,79 & 1,00 & 0,24 & -0,22 & 0,92 & -0,94 & 0,28 \\ 0,10 & 0,24 & 1,00 & 0,19 & 0,16 & -0,28 & 1,00 \\ -0,10 & -0,22 & 0,19 & 1,00 & -0,16 & 0,16 & 0,18 \\ 0,96 & 0,92 & 0,16 & -0,16 & 1,00 & -0,99 & 0,20 \\ -0,93 & -0,94 & -0,28 & 0,16 & -0,99 & 1,00 & -0,32 \\ 0,13 & 0,28 & 1,00 & 0,18 & 0,20 & -0,32 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix}$$

Az a megállapításunk is érvényben maradt, hogy a csillapító tényezővel számított korrelációs mátrixnál az indokolt magas korrelációs érték nem változott ( $\rho_3, d_3$  között), de a többi általában csökkent. Ugyanúgy, mint a második példánál az  $\alpha$  csillapító tényezőt kísérleti úton határoztuk meg. Több csillapító tényezővel is elvégeztük a kovariancia-, illetve

korrelációs mátrix számítását, és azt fogadtuk el, amelyik az indokolt magas korrelációt még változatlanul hagyta. Bizonyos korrelációk viszont ebben az esetben is lényegesen lecsökkentek. A csillapító tényező hatására kis abszolút értékű korrelációknál előfordult előjelváltás is.

Az 5 sajátvektorral számított felbontóképesség-mátrix:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0,98 & -0,04 & 0,01 & 0,00 & -0,12 & 0,05 & 0,00 \\ -0,04 & 0,93 & 0,00 & 0,00 & -0,24 & 0,10 & -0,02 \\ 0,01 & 0,00 & 0,51 & -0,01 & 0,03 & 0,00 & -0,50 \\ 0,00 & 0,00 & -0,01 & 1,00 & 0,01 & -0,01 & -0,01 \\ -0,12 & -0,24 & 0,03 & 0,01 & 0,23 & 0,33 & -0,02 \\ 0,05 & 0,10 & 0,00 & -0,01 & 0,33 & 0,86 & 0,03 \\ 0,00 & -0,02 & -0,50 & -0,01 & 0,02 & 0,03 & 0,49 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix}$$

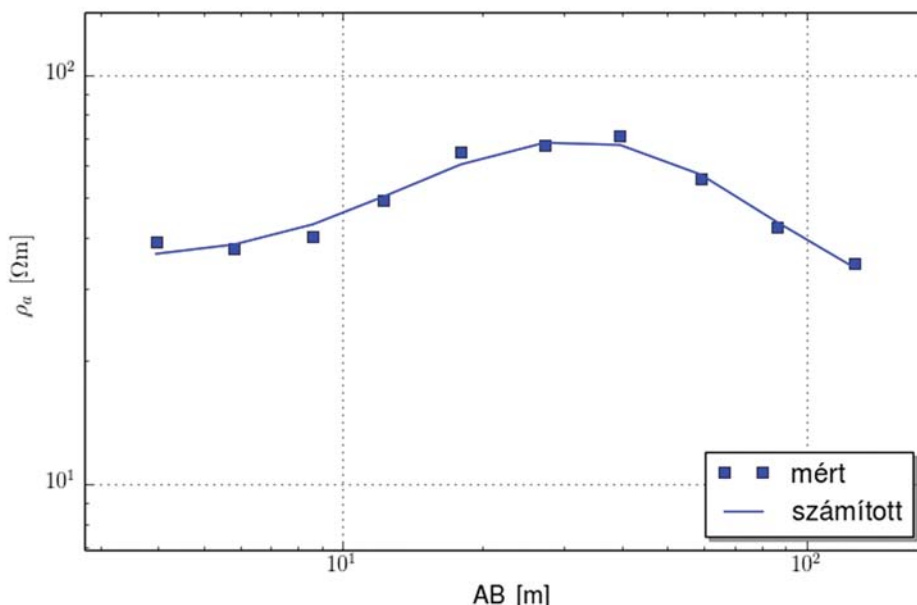
A főatlóban megjelenő 1-hez közeli értékek jól mutatják, hogy melyek azok a modellparaméterek amelyek jól meghatározhatóak. A  $\rho_3$  és a  $d_3$  paraméterpárra vonatkozólag is megállapítható, hogy azok önállóan nem határozhatóak meg, csak a kettőnek a hányadosa, azaz a réteg összegzett vízszintes vezetőképessége. Ezzel összhangban van a  $\rho_3$  és  $d_3$  értékek nagy szórása is (3. táblázat). Viszonylag gyengén meghatározhatónak bizonyul még a  $d_1$  rétegvastagság is, ami azzal magyarázható, hogy a két felső réteg ellenálláskontrasztja viszonylag kicsi. Ha a felbontóképesség-mátrix számításánál a 6. sajátvektort is figyelembe vesszük ( $\lambda_6 =$

0,184), akkor a mátrix szerint  $d_1$  is jól meghatározhatónak mutatkozik.

### Terepen mért adatok inverziója

Az inverziót Schlumberger-elektroda-elrendezéssel mért adatokon mutatjuk be. A 4. ábrán látható szondázási görbe egy működő kavicsbánya bővítési lehetőségeinek vizsgálata során készült a nyugat-magyarországi peremvidék, a Sopron-Vasi síkság közepén. A területen felső pliocén keresztaré-





**4. ábra** Schlumberger-féle látszólagos fajlagos ellenállás. Schlumberger-szondázás inverziójával kapott rétegparaméterek (2., 4. oszlop), a paraméterek szórásai (3., 5. oszlop)  
**Figure 4** Layer parameters obtained by inversion of Schlumberger sounding (columns 2, 4), standard deviations of the parameters (columns 3, 5)

zett folyóvízi homokra települ egy kis folyó változatos vastagságú pleisztocén kavics-hordalékkúpja. A kavicssterasz felszínét glaciális eredetű löszös, vályogos üledékek fedik. A vizsgálat célja a bányatelekkel szomszédos területeken az ásványi nyersanyagvagyon mennyiségének, a kitermelés gazdaságosságának a meghatározása volt. Az inverzió eredményeként egy egyszerű háromréteges modellt kaptunk (4. táblázat). A fajlagos ellenállások alapján markánsan el-

**4. táblázat** Schlumberger-szondázás inverziójával kapott rétegparaméterek (2., 4. oszlop), a paraméterek szórásai (3., 5. oszlop)

Réteg	$\rho$ [ $\Omega\text{m}$ ]	$D(\rho)$	$d$ [m]	$D(d)$
1.	35,5	0,0113	3,38	0,086
2.	191,2	0,43	4,45	0,485
3.	27,1	0,0237	$\infty$	

különül a kb. 3,38 m vastag fedőréteg, amely kis fajlagos ellenállású agyagos, iszapos öszlet, alatta a nagy ellenállású, kb. 4,45 m vastag kavics, és a fedőhöz hasonlóan kis fajlagos ellenállású – agyag/homokos agyagnak megfelelő – fekvő. A mért adatok és az inverziós modellhez tartozó számított görbe illeszkedése a 4. ábrán látható. Az SVD sajátértékei:

$$\lambda_1 = 11,608, \quad \lambda_2 = 8,690, \quad \lambda_3 = 3,156,$$

$$\lambda_4 = 1,961, \quad \lambda_5 = 0,076.$$

Az 5. sajátérték lényegesen kisebb a többinél, ennek megfelelően a (8) feltétel szerint a felbontóképesség-mátrix számításakor csak 4 sajátvektort érdemes figyelembe venni. A legnagyobb és a legkisebb sajátérték aránya 152,71.

A szintetikus adatokkal végzett tesztek tapasztalata alapján a korrelációs mátrixnak csak a csillapító tényezővel számított változatát közöljük:

$$\text{corr}(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,52 & 0,17 & 0,68 & -0,51 \\ 0,52 & 1,00 & 0,59 & 0,97 & -1,00 \\ 0,17 & 0,59 & 1,00 & 0,49 & -0,63 \\ 0,68 & 0,97 & 0,49 & 1,00 & -0,96 \\ -0,51 & -1,00 & -0,63 & -0,96 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (16)$$

A  $\rho_2$  és  $d_2$  közötti korreláció értéke itt  $-1$ , ami jelzi, hogy a közöttük levő kapcsolat most más mint a szintetikus adatokkal végzett számításoknál a vékony jól vezető réteg esetében, ami rendben is van, hiszen itt most egy rosszul vezető rétegről van szó. A  $-1$  korreláció azt jelenti, hogy a  $\rho_2 d_2$  szorzat határozható meg, azaz a réteg függőleges irányú ellenállása. Ugyanezt lehet megállapítani a felbontóképesség-mátrix alapján is.

A 4 sajátvektorral számított felbontóképesség-mátrix:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1,00 & -0,01 & 0,00 & 0,00 & 0,01 \\ -0,01 & 0,56 & -0,02 & -0,08 & 0,49 \\ 0,00 & -0,02 & 1,00 & 0,00 & 0,02 \\ 0,00 & -0,08 & 0,00 & 0,98 & 0,09 \\ 0,01 & 0,49 & 0,02 & 0,09 & 0,46 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (17)$$

A mátrixban megjelenő, a második réteg paraméterei közötti kapcsolatra utaló elemek előjele itt megegyezik (0,56, 0,49). Ez azt jelenti, hogy a második réteg függőleges irányú ellenállását tudjuk meghatározni,  $\rho_2$  és  $d_2$  értéke bizonytalan. A második példához hasonlóan ez is részletesen levezethető, csak jelen esetben a (15) reláció,  $\Delta g \approx \Delta f$  helyett  $\Delta g \approx -\Delta f$  érvényes. A paraméterek gyengén meg-

határozhatósága látszik azok nagyobb szórásértékeiből is (4. táblázat). A szórásértékekkel kapcsolatban megjegyzendő, hogy azokat ugyanazon feltételek mellett számoltuk, mint a szintetikus adatok esetében. Terepi adatok lévén feltételezhető ugyan, hogy az (5) képletben szereplő  $\sigma$  nagyobb, mint 5%, de elemzésünk fő tárgya nem is az egyes modellparaméterek szórásának a pontos meghatározása, hanem rámutatni arra, hogy mely modellparaméterekhez tartozik lényegesen nagyobb szórás érték, mint a többihez, és ez milyen kapcsolatban áll a felbontóképesség-mátrixszal, valamint fizikai magyarázatot adni a jelenségre.

## Összefoglalás

Egyszerű modelleken szintetikus és terepi adatok felhasználásával bemutattunk az inverzió minőségét jellemző négy fontos mennyiséget. Ezek hasznosak lehetnek az inverziós eredmények értelmezésekor. Megmutattuk, hogy a korrelációs mátrix a szakirodalomban elfogadott képlettel számítva nehezen magyarázható korrelációkat tartalmaz. A kovarianciamátrix és az ebből származtatható korrelációs mátrix számítására egy csillapító tényezőt tartalmazó eljárást vezetünk be, és példákön mutattuk meg az előnyét. Elemeztük a felbontóképesség-mátrixot, és egy egyszerű feltételt adtunk meg arra vonatkozólag, hogy hány sajátvektor felhasználásával érdemes azt számítani. A legnagyobb és a legkisebb sajátértékek hányadosa, valamint a paraméterek szórása is tájékoztat az inverzió stabilitásáról. A statisztikai jellemzők tanulmányozása után az előzetes geológiai ismereteket is figyelembe véve érdemes az inverziót többször elvégezni bizonyos modellparaméterek rögzítésével.

## Köszönetnyilvánítás

Ez a tanulmány a TÁMOP-4.2.2.C-11/1/KONV-2012-0015 számú (Föld-rendszer) projekt keretében, az Európai

Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

## A tanulmány szerzői

Prácser Ernő, Prodán Tímea Hajnal

## Hivatkozások

- Dobróka M., Gyulai Á., Ormos T., Csókás J., Dresen J., 1991: Joint inversion of seismic and geoelectric data recorded in an underground coal mine. *Geophysical Prospecting* 39, 643–556
- Gyulai Á., Ormos T., 1997: Újabb eredmények a VESZ adatok 1.5-D inverziós kiértékelésében. *Magyar Geofizika* 38/4, 257–264
- Jackson D. D., 1972: Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. *Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society* 28, 97–109
- Jupp D. L. B., Vozoff K., 1972: Stable iterative methods for the inversion of geophysical data. *Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society* 42, 957–976
- Kaufman A. A., Keller G. V., 1983: *Frequency and Transient Soundings*. Elsevier – Amsterdam – Oxford – New York.
- Koefoed O., 1979: *Geosounding Principles: Resistivity Sounding Measurements*. Elsevier Scientific Publishing Company.
- Marquardt D. W., 1963: An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *Journal of Society of Industrial Applied Mathematics* 11, 431–441
- Menke W., 1984: *Geophysical Data Analysis Discrete Inverse Theory*. Academic Press
- Rodi W., Mackie R. L., 2001: Nonlinear conjugate gradient algorithm for 2-D magnetotelluric inversion. *Geophysics* 66/1, 174–187
- Salát P., Tarcsai Gy., Cserepes L., Vermes M., Drahos D., 1982: *A geofizikai interpretáció statisztikus módszerei*. Tankönyvkiadó, Budapest
- Sharma S. P., Prácser E., Roy K. K., 2005: Joint inversion of seismic refraction and magnetotelluric data for resolving deeper sub-surface structure. *Acta Geod. Geoph. Hung.* 40/2, 241–258
- Tarantola A., 1987: *Inverse Problem Theory*. Elsevier, Amsterdam – Oxford – New York – Tokyo