

Statisztikai próbák sztochasztikus, közel izotrop tenzorral leírható kőzetfizikai mennyiségek vizsgálatára

SIPOS A. Á.

BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék, 1111 Budapest, Műgyetem rkp. 1–3.
E-mail: siposa@eik.bme.hu

2×2 -es vagy 3×3 -as márixszal ábrázolható, valószínűségi változótól függő tenzorok sajátirányainak és sajátértékeinek statisztikai elemzése a feladat nemlineáris jellege miatt nem triviális feladat. Anizotrop tenzorok esetén az irodalomban található, linearizáláson alapuló módszerek kielégítőek, azonban a geofizikai alkalmazások gyakran felvetik a közel izotrop tenzor vizsgálatának szükségességét. Írásunkban e speciálisnak tűnő, de a gyakorlatban mégis gyakran előforduló eset vizsgálatára adunk statisztikai módszereket. Rámutatunk arra, hogy a determinisztikus tenzoroknál megszokott helyzet – vagyis, hogy a sajátértékek multiplicitása alapján következtethetünk a sajátvektorok térbeli elhelyezkedésére – valószínűségi változó elemű mátrixok esetén nem áll fent. Ilyen értelemben a vonatkozó szakirodalom sajátértékekre koncentrááló módszerei nem kielégítőek. Ez utóbbi állítást írásunk geofizikai vonatkozású példái is alátámasztják. Új módszerünk egyben lehetővé teszi tenzorral ábrázolható kőzetfizikai mennyiségek szorosságának, illetve adott vektor és a tenzor egyik sajátirányára közötti egyezés statisztikai vizsgálatát.

Sipos, A. Á.: Statistical tests for rock physical parameters given by nearly isotropic, stochastic tensors

Statistical hypothesis testing for the eigenvalues and eigenvectors of a stochastic tensor is not a straightforward process due to the nonlinear dependence involved in the problem. For anisotropic tensors the linearized approaches of the literature are adequate, however, geophysical applications require the analysis of nearly isotropic tensors, too. Our paper is devoted to introduce new statistical methods for these seemingly rare cases, which turn out to be a regular problem in practice. We point out that the well-known behaviour of deterministic tensors, namely that the multiplicity of the eigenvalues unambiguously refers to the spatial distribution of the eigenvectors, does not hold for matrices with random variable elements. In this way, the published methods focusing only on the eigenvalues are not satisfactory. The latter statement is also confirmed by examples from geophysics. Our method can be used to analyse closeness of tensor state parameters or directional differences between a vector and one of the eigenvectors in a statistical framework.

Béérkezett: 2013. október 21.; *elfogadva:* 2014. február 25.

1. Bevezetés

Kőzetfizikai mennyiségek direkt (laboratóriumi mérés) vagy indirekt (mérésből származtatott) meghatározásával a geológiai és a geofizika számtalan ága foglalkozik. A publikációk zöme a mérési eredményeket statisztikai eszközökkel értékeli. Amíg skalárral és vektorral ábrázolható mennyiségek esetén a statisztikai elemzés eszközei széles körben elterjedtek (Borradaile 2003), addig tenzor jellegű kőzetfizikai mennyiségek (pl. feszültség, mágneses anizotropia, elektromos vezetőképesség stb.) esetén az irodalomban megtalálható eredmények (Hext 1963, Jelinek 1988, Constable et al. 1990) ellenére sincs egységesen bevett gyakorlat. A geofizikai és geológiai alkalmazásokban (például

mágneses anizotropia-tenzor, mikrotektonikai feszültség-tenzor stb.) kitüntetett szerepe van a tenzor sajátirányainak, emiatt a tenzorral ábrázolható kőzetfizikai mennyiségek elemzése gyakran azok sajátirányainak statisztikai vizsgálatát jelenti. Ilyen esetben a gömb felett értelmezett Fisher-statisztika (Fisher et al. 1993) vagy annak továbbfejlesztett változata használatos (Henry et al. 1995). E megközelítés hátránya, hogy a sajátirányok statisztikai vizsgálatánál a sajátvektorok ortogonalitását nem veszi figyelembe, a sajátvektorokat egymástól független valószínűségi változóknak tekinti.

Célunk olyan, a fizikai modellt nem torzító statisztikai eljárás kidolgozása, amellyel mérési eredményekből meghatározott tenzormennyiségek ekvivalenciája, illetve kü-

lönbsége számszerűsíthető, illetve akár különböző eredetű mennyiségek közötti kapcsolat is vizsgálható. Mivel szimmetrikus tenzorok statisztikai vizsgálatával leginkább a mágneses szuszceptibilitási tenzor kapcsán foglalkoztak, ezért a geofizika ezen ágában elterjedt terminológiát használjuk. Eredményeinket a mágnesesanizotrópia-mérések példáján mutatjuk be, azonban állításaink tetszőleges, valós elemű tenzorral ábrázolható mennyiségre általánosíthatóak. Jelen írás elsődleges célja egy új, sztocasztikus tenzorok statisztikai vizsgálatára szolgáló módszer bemutatása. A cikk 2. fejezete rövid irodalmi összefoglaló után az ún. forgási anizotrópia vizsgálatával foglalkozik. A 3. fejezet különböző rétegekből származó vagy egyéb okokból eltérő mintákon mért anizotrópiatenzorok elkülönítését megvalósító módszert mutat be. Az előző két fejezet nyomán a 4. fejezet tenzorral ábrázolható közetfizikai mennyiségek statisztikai összehasonlítására ad módszert.

2. A forgási anizotrópia vizsgálata

Munkánk során a gyakorlatban leginkább előforduló, másodrendű, szimmetrikus, valós elemű tenzorokat vizsgáljuk. A \mathbf{k} tenzor az O középpontú, (X, Y, Z) derékszögű koordináta-rendszerben a

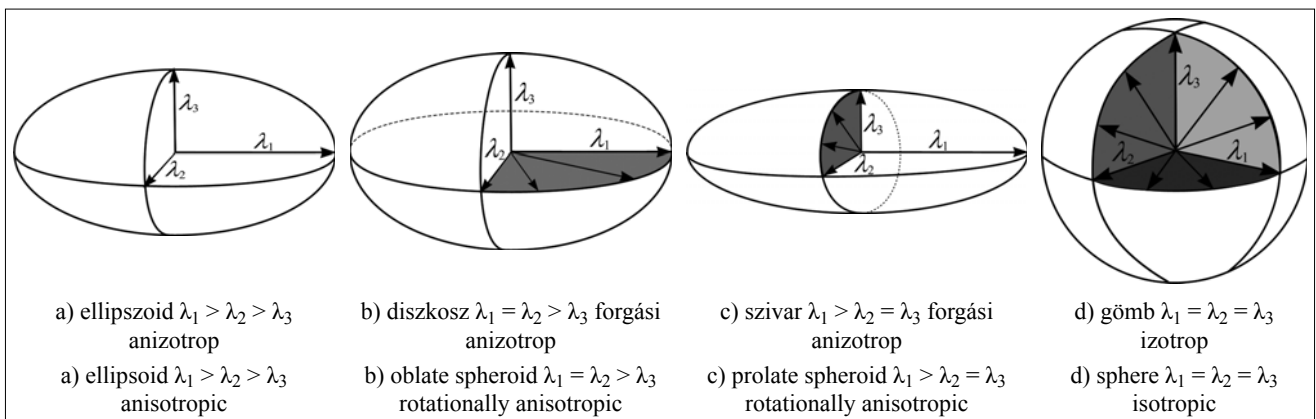
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

mátrixszal ábrázolható. \mathbf{k} sajátértékeit nagyság szerint sorba állítva jelölje $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3!$ Ha a sajátértékek pozitívak, akkor a \mathbf{k} tenzornak egy ellipszoid feleltethető meg. Az ellipszoid nagytengelyeinek hossza megegyezik a sajátértékekkel, a nagytengelyek irányát a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok jelölik ki. Ha \mathbf{k} sajátértékeire teljesül, hogy $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, akkor \mathbf{k} -t *anizotrop tenzornak* nevezzük (1a. ábra). Az eltérő sajátértékeket a lineáris algebrában egyszeres multiplicitásúnak nevezik. (A lineáris algebra megkülönbözteti a *geometriai* és az *algebrai multiplicitás* fogalmát, azonban bizonyított, hogy szimmetrikus mátrixok esetén a geometriai és az algebrai multiplicitás azonos (Wetl, 2011), ezért a

továbbiakban az azonos sajátértékekre a multiplicitás szóval utalunk.) Lehetséges, hogy \mathbf{k} pontosan két sajátértéke azonos. Ha ez a $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ relációt jelenti, akkor a tenzornak megfeleltethető test egy diszkoszhoz hasonlít (legnagyobb területű vetülete kör, 1b. ábra). Amennyiben a $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ reláció áll fenn, akkor a test szivarszerű (legkisebb területű vetülete kör, 1c. ábra). Mindkét említett esetben van egy sajátérték, ami kétszeres multiplicitással rendelkezik. (Jelinek 1988) nyomán forgási anizotrópiaként utalunk ezen két lehetőségre. Forgási anizotrópia esetén a két azonos sajátértékhez tartozó sajátirány határozza meg azt a síkot, amelyen a vetület kör. Ezen síkban minden, O kezdőpontú vektor sajátirány. Lehetséges továbbá, hogy a tenzor összes sajátértéke azonos ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), akkor a tenzor izotrop, az egyetlen sajátérték multiplicitása 3. Az izotrop tenzornak megfeleltethető test a gömb (1d. ábra), amely jól szemlélteti, hogy az izotrop tenzor semmilyen irányultsággal nem rendelkezik, esetében bármely, az origóból induló vektor sajátirány.

Azt gondolhatnánk, hogy az egyenlőség megkövetelése miatt izotrop és forgási anizotrop tenzorok ritkán, vagy egyáltalán nem fordulnak elő a geofizikai gyakorlatban. Ez az intuición tévesnek bizonyul akkor, ha a \mathbf{k} tenzor elemei valószínűségi változók. Ilyen, sztocasztikus tenzorra jó példa a mágneses szuszceptibilitási tenzor, ami az ismert \mathbf{H} mágneses térerősség vektor és a mért \mathbf{M} mágnesezettség vektor közötti kapcsolatot teremti meg (azaz $\mathbf{M} = \mathbf{kH}$). A mérési eljárást és annak statisztikai értékelését (Jelinek 1988) részletesen ismerteti. A mérés során 15, előre definiált irányban határozzák meg a minta mágnesezettségét. Ilyen esetben \mathbf{k} meghatározása nem más, mint egy hatparaméteres lineáris regresszió paramétereinek ($k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{22}, k_{23}, k_{33}$) illesztése a mérési eredményekre. A statisztikai elemzéshez kézenfekvőbb a hat paramétert egy vektorban összefoglalni, ezért ha külön nem jelezzük, akkor a továbbiakban:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{33} \\ k_{12} \\ k_{23} \\ k_{13} \end{bmatrix}. \quad (2)$$



1. ábra | A 3×3-as, pozitív definit tenzornak megfeleltethető ellipszoidok
Figure 1 | Ellipsoids associated with 3×3, positive definite tensors

Jelinek nyomán az egy darab mintán mért szuszceptibilitási tenzor forgási anizotrópiáját vagy izotrópiáját egyszerű, a sajátértékekre vonatkozó statisztikai próbákkal el lehet dönteni (Jelinek 1988). Bemutatásra kerülő eredményeink rávilágítanak arra, hogy pusztán a sajátértéken alapuló próbák nem elégségesek a szuszceptibilitási tenzor jellemzésére. Ez a megállapítás elvi jelentőségű csupán: manapság a mérési eljárás hibája nagyon kicsi, annak statisztikai elemzéstől akár el is lehet tekinteni (Jelinek 1978). Ezért írásunkban a minta szintű kiértékeléssel a továbbiakban nem foglalkozunk.

A geofizikai alkalmazás szempontjából lényegesebb probléma, ha egy mintacsoporttal (például egy földrajzi terület több mintája) rendelkezünk és ezek alapján szeretnénk következtetéseket levonni. Jellemzően a minták szuszceptibilitási tenzorai eltérőek, ez részben ugyan magyarázható az orientációs hibával, de gyakran a mögöttes fizikai folyamatra vezethető vissza a tenzorok különbsége. Ilyen eset például a harmadidőszaki üledékes kőzeteknél áll elő akkor, ha a tömörödésen kívül nem volt olyan mechanizmus (vízfolyás, oldalirányú nyomás), ami a rétegződés síkjában irányultságot jelölt volna ki. Harmadidőszaki kőzetekből származó mintacsoportok elemzése felveti azt a kérdést, hogy van-e lehetőségünk az említett mechanizmusok kimutatására akkor, ha ezek ugyan jelen voltak, de csak gyenge, kis mértékű irányultságot tudtak kialakítani. Jelen írásban különböző helyszínek üledékes formációiból származó mérési eredményekre alkalmazzuk a bemutatásra kerülő eljárást. Nem célunk az ismertetésre kerülő helyszínek földtani elemzése, a példák a módszer gyakorlati alkalmazhatóságát támasztják alá. A bemutatásra kerülő magyarországi példák földtani hátterét, az alkalmazott mérési módszereket és a mérési eredmények értelmezését (Sipos-Benkó et al. 2014) részletesen tárgyalja.

A mintacsoport mérési eredményeit olyan N elemű statisztikai mintának tekintjük, ahol a minta elemei a mért szuszceptibilitási tenzorok. Jelinek (1978) eljárást ad a várható érték számítására, módszere Hext (1963) eredményein alapszik. Kettőjük eljárásával az eredő szuszceptibilitási tenzor sajátvektorainak és sajátértékeinek konfidencia intervallumai számíthatók. A statisztikai elemzés nehézségét az okozza, hogy egy tetszőleges másodrendű tenzor sajátértékei és sajátvektorai a tenzor elemek nemlineáris függvényei. A Hext-féle statisztikai eljárás (Hext, 1963) e függvények linearizálásán alapszik. Ehhez szükséges kikötni, hogy az egyes tenzorelemek Δ -szórása kisebb két tetszőleges sajátérték különbségénél. Nevezzük *kismértékben anizotropnak* azt a \mathbf{k} tenzort, amely bármely elemének szórására teljesül, hogy

$$\Delta > |\lambda_i - \lambda_j|, \quad i \neq j, \quad i, j \in (1, 2, 3). \quad (3)$$

Mind Hext, mind Jelinek írásaikban felhívják a figyelmet arra, hogy módszerük az imént definiált, kismértékben anizotrop tenzorokra nem alkalmazható. Azonos sajátértékekkel rendelkező (izotrop, vagy forgási anizotrop) tenzorok esetén pedig nullával való osztást eredményez. Jelinek eljárása tartalmaz egy statisztikai próbát annak eldöntésére,

hogy az eredő tenzor izotrop-e, vagy sem. Azonban (szemben a minta szintű kiértékeléssel) nem foglalkozik a forgási anizotrópia problémájával. Constable és munkatársai (1990) e hiányosságot joggal kifogásolják, továbbá felhívják a figyelmet arra, hogy az eredő tenzor sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározásakor Jelinek (1978) a már említett, Hextől származó linearizálást hajtja végre, ami kismértékben anizotrop tenzorok esetén a konfidenciaintervallum jelentős alulbecsléséhez vezet. Jelinek (1978) ezzel kapcsolatban annyi támponot ad, hogy amennyiben bármelyik sajátvektorhoz számított konfidenciaellipszis nagyobbik nyílásszöge (a konfidenciaellipszis nagytengelyének végpontjai által meghatározott szög a sztereografikus projekción) meghaladja a 25 fokot, úgy módszere nem használható (a geofizikában szokásos, $\alpha = 0,05$ szignifikancia szint mellett). Constable és munkatársai (1990), Tauxe és munkatársai (1990, 1991) éppen az említett hiányosságok miatt választanak más megközelítést. Az említett publikációk az ún. *bootstrapping eljárást* használják fel a statisztikai elemzéshez. Azonban a sajátvektorok konfidencia körreit csak úgy tudják számítani, hogy a sajátvektorokat egymástól függetlennek tekintik (nem foglalkoznak az ortogonalitással), illetve a forgási anizotrópiát csak meglehetősen szubjektíven, gyakoriságdiagramok alapján különítik el.

Jelen írás fő megállapítása, hogy létezik a Jelinek-féle módszerhez hasonló, az említett hiányokat kiküszöbölő eljárás. A felvetett probléma matematikai szempontból is érdekes: a lineáris algebra (Wetl 2011) és a tenzoranalízis (Itskov 2007) területén gyakran találkozunk azzal, hogy a többszörös multiplicitású sajátértékek külön vizsgálatot igényelnek. Esetünkben épp a többszörös multiplicitás vizsgálata mutat rá arra, hogy sztochasztikus tenzorok esetén a determinisztikus tenzoroknál megszokott összefüggéseket nem lehet automatikusan alkalmazni, tekintettel kell lenni arra, hogy valószínűségi változókkal végezzünk műveleteket. Írásunkban gyakran fogunk a forgási anizotrópiára utalni, a továbbiakban következetesen csak a $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ esettel foglalkozunk, a $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ eset levezetése teljesen analóg módon történhet.

A fentiek nyomán feltesszük, hogy az egyes minták kiértékelése során a számított tenzor elemek variancia-kovariancia mátrixa közel zérus. Ezzel a mért minta \mathbf{k}_i ($1 \leq i \leq N$) tenzorát mérési hiba nélküli, pontosan ismert, determinisztikus mennyiségnek tekintjük. (Ez a feltevés megegyezik a jelenlegi gyakorlattal, a (Jelinek 1978) alapján készült AnisoSoft 4.2. szofver is ezen alapul.) Feltesszük továbbá, hogy a statisztikai mintajellemzők empirikus értékeinek várható értéke megegyezik az elméleti értékekkel. (A továbbiakban minta alatt mindig a statisztikai mintát értjük).

2.1. A várható érték és a kovariancia számítása

A mintacsoport eredő tenzorának meghatározásához tisztázni kell, hogy a számítást normált, vagy normálás nélküli adatokon hajtjuk végre. Az N elemű statisztikai mintában szereplő, \mathbf{k}_i tenzorok nem csak sajátvektoraik, hanem saját-

értékeik szerint is különböznek (pontosabban fogalmazva, skalárinvariánsaik eltérőek). Az alapján, hogy ezen különbséget mely okokkal hozzuk összefüggésbe, két lehetőségünk van:

1. Amennyiben a vizsgált jelenség szempontjából érdektelen okok állhatnak az eltérő skalárinvariánsok mögött (például mágneses vizsgálatok esetén a szuszceptibilitási ellipszoid irányaira vagyunk kíváncsiak, az eltérő ellipszoid térfogatok a minták eltérő ásványi összetételének tudhatóak be), akkor ezen okok hatását a tenzorok normálásával tudjuk csökkenteni.
2. Amennyiben a vizsgált jelenség szempontjából lényeges okra vezetjük vissza az első skalár invariánsokban megmutatkozó különbséget, akkor közvetlenül a mért tenzorokon kell a statisztikai vizsgálatot végrehajtani.

A paleomágneses irodalomban (Jelinek 1978, Constable et al. 1990) jellemzően a tenzor első skalárinvariánsának ($I_1 = k_{11} + k_{22} + k_{33}$) segítségével hajtják végre a normálást:

$$k_{n,i} = \frac{k_i}{k_{i,11} + k_{i,22} + k_{i,33}}. \quad (4)$$

Az adatok normálásnak célja a tenzoroknak megfelelő ellipszoidok méretkülönbségének kiküszöbölése. Az első skalárinvariáns használata ezen célra vitatható, ámbar kétségtől praktikus választás. Elvileg lehetőségünk lenne a másik két skalárinvariáns valamelyikének használatára is (például az imént említett, azonos térfogatú ellipszoidok esetén a minta egyes elemeire az $I_3 = \det(\mathbf{k})$ mennyiséget kell azonosítást tenni). A 4. fejezetben olyan transzformációra is példát fogunk mutatni, amely lehetővé teszi két skalár invariáns azonosítást anélkül, hogy a tenzor sajátirányai megváltoznának.

A normálás következtében a $k_{n,i}$ elemei közül csak öt független, hiszen $k_{n,i,11} + k_{n,i,22} + k_{n,i,33} = 1$. Ezért normált esetben a k_i vektor csak a független elemeket tartalmazza, írásunkban:

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} k_{n,i,22} \\ k_{n,i,33} \\ k_{n,i,12} \\ k_{n,i,23} \\ k_{n,i,13} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

A bemutatásra kerülő eljárások többsége egyaránt jól használható normált és normálás nélküli statisztikai mintákra. Ez alól csak a 3. fejezetben bemutatásra kerülő klaszteranalízis kivétel: azt normálás nélküli mintán érdemes végrehajtani. A félreértések elkerülése végett fontos kiemelni, hogy normálás esetén a (4) művelet után kapott k_i tenzorok elemeit tekintjük normális eloszlású valószínűségi változóknak. Ezek után a statisztikai minta várható értéke, vagyis az eredő tenzor és a hat (normálás esetén: öt) elem statisztikai kapcsolatát jellemző 6×6 -os (normálás esetén: 5×5 -ös) variancia-kovariancia mátrix (\mathbf{V}) torzítatlan becslése az ismert módon számítható (Timm 2002):

$$\mathbf{k}_e = E(\mathbf{k}_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= E((\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_e)(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_e)^T) \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_e)(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_e)^T. \end{aligned} \quad (7)$$

2.2. Az eredő tenzor sajátirányai

Az eddigi leírás is sejteti, hogy az N elemű statisztikai minta (akár normált, akár normálás nélküli) \mathbf{k}_i tenzoraiból ($i = 1, \dots, N$) az eredő \mathbf{k}_e tenzor (6) és annak sajátirányai valamely alkalmas algoritmussal meghatározhatóak anélkül, hogy a sajátértékek multiplicitását vizsgálnánk. Ez a gyakorlati alkalmazás szempontjából veszélyesnek is mondható: az elterjedt numerikus módszerek forgási anizotrópia ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$) esetén is három főirányt adnak eredményül, holott ebben az esetben a kétszeres multiplicitású sajátértékhez tartozó sajátvektorok (\mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2) tetszőleges lineáris kombinációja is sajátvektor. (Természetesen ez a probléma izotrop tenzor esetén is fennáll.) Célunk olyan statisztikai eljárás megkonstruálása, amivel a forgási anizotrópia kizárható. Ehhez vagy a Jelinek-féle eljárás nem lineáris változatára lenne szükség, vagy egy olyan összefüggésre a forgási anizotrop \mathbf{k}_e elemei között, amit statisztikai teszttel ellenőrizni tudunk.

Az izotrop eset vizsgálatára Jelinek az utóbbi megközelítést javasolja. Az izotrop tenzor – a koordináta-rendszer tengelyirányaitól függetlenül – diagonál mátrixnak feleltethető meg, így könnyű olyan transzformációt mutatni, amely \mathbf{k}_e elemeire nézve lineáris. A normális eloszlású valószínűségi változók lineáris kombinációjával nyert valószínűségi változó is normális eloszlású, ezért az izotropia az egymintás t -próba többdimenzós változatával, az ún. Hotelling-féle T^2 -próba egymintás változatával vizsgálható. Sajnos forgási anizotrópiával bíró tenzorra nem található ilyen lineáris transzformáció. (A forgási anizotrop \mathbf{k}_e elemei között levezethető, nem lineáris kapcsolatot az Appendix tartalmazza.) Vélhetően ez az oka annak, hogy Jelinek (1978) mellőzi a forgási anizotropia vizsgálatát.

Ahelyett, hogy a normális eloszlású valószínűségi változókkal kitöltött \mathbf{k}_e tenzor sajátvektorainak és főirányainak egzakt valószínűségi eloszlását kísérlelnénk meg levezetni, egy olyan eljárást mutatunk, ahol ugyan nagyobb számítási igényrel, de közelítés nélküli statisztikai próbát lehet végrehajtani. A \mathbf{u}_i sajátvektorok és a λ_i sajátértékek definíciója jól ismert:

$$\mathbf{k}_e \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \quad (8)$$

ahol az irodalomban szokásos módon $|\mathbf{u}_i| = 1$ és $i = 1, 2, 3$. A tetszőleges, O középpontú egységvektort jelölje \mathbf{u} , ez tipikusan nem sajátvektora a \mathbf{k}_e tenzornak. A (8) egyenlet alapján definiáljuk a következő vektort:

$$\mathbf{e} = \mathbf{k}_e \mathbf{u} - (\mathbf{u}^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{k}_e \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}. \quad (9)$$

A konstrukció miatt \mathbf{e} akkor, és csak akkor zérus vektor, ha $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, és ekkor (8) alapján $\lambda = \lambda_i$ is teljesül. Vegyük észre, hogy a (9) egyenlet \mathbf{k}_e elemeire nézve lineáris összefüggés, amelyet a következő alakra lehet hozni:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{k}_e. \quad (10) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Nem normált statisztikai minta esetén } \mathbf{A} = [0, 0, 0]^T \text{ és a} \\ \text{3} \times \text{6-os } \mathbf{B} \text{ mátrix csak } \mathbf{u} \text{ elemeitől } (u_1, u_2 \text{ és } u_3) \text{ függ:} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} u_1 - u_1^3 & -u_1 u_2^2 & -u_1 u_3^2 & -2u_1^2 u_2 + u_2 & -2u_1 u_2 u_3 & u_3 - 2u_1^2 u_3 \\ -u_1^2 u_2 & u_2 - u_2^3 & -u_2 u_3^2 & u_1 - 2u_1 u_2^2 & u_3 - 2u_2^2 u_3 & -2u_1 u_2 u_3 \\ -u_1^2 u_3 & -u_2^2 u_3 & u_3 - u_3^3 & -2u_1 u_2 u_3 & u_2 - 2u_2 u_3^2 & u_1 - 2u_1 u_3^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Normált statisztikai minta esetén az \mathbf{A} vektor nem zérus, a \mathbf{B} mátrix pedig 3×5 -ös:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_1 - u_1^3 \\ -u_1^2 u_2 \\ -u_1^2 u_3 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -u_1 u_2^2 - u_1 + u_1^3 & -u_1 u_3^2 - u_1 + u_1^3 & -2u_1^2 u_2 + u_2 & -2u_1 u_2 u_3 & u_3 - 2u_1^2 u_3 \\ u_2 - u_2^3 + u_1^2 u_2 & -u_2 u_3^2 + u_1^2 u_2 & u_1 - 2u_1 u_2^2 & u_3 - 2u_2^2 u_3 & -2u_1 u_2 u_3 \\ -u_2^2 u_3 + u_1^2 u_3 & u_3 - u_3^3 + u_1^2 u_3 & -2u_1 u_2 u_3 & u_2 - 2u_2 u_3^2 & u_1 - 2u_1 u_3^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Többváltozós normális eloszlás lineáris kombinációja is normális eloszlás, amennyiben a (10) egyenletben \mathbf{B} teljes rangú. Ez esetünkben nem teljesül, meg lehet mutatni, hogy mivel \mathbf{u} egységvektor, \mathbf{B} rangja mindig 2. Ez azt jelenti, hogy \mathbf{e} elemei közül egy lineárisan függ a másik két elem egyikétől. \mathbf{B} lineárisan összefüggő két sora közül az egyiket töröljük, az így nyert 2×6 -os (normált esetben 2×5 -ös) mátrixot jelölje $\hat{\mathbf{B}}$. Az \mathbf{A} vektor ugyanazon sorának törlésével nyerjük a $\hat{\mathbf{A}}$ vektort. Így az $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{k}_e$ összefüggéssel számított vektor két eleme egymástól lineárisan független, normális eloszlású valószínűségi változó. Az elemek 2×2 -es variancia-kovariancia mátrixa közvetlenül \mathbf{k}_e független elemeinek (7) egyenlettel definiált, \mathbf{V} variancia-kovariancia mátrixából határozható meg:

$$\mathbf{W} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{V} \hat{\mathbf{B}}^T. \quad (14)$$

Azt kívánjuk statisztikai próbával vizsgálni, hogy az \mathbf{u} egységvektor lehet-e a \mathbf{k}_e tenzor sajátvektora. A próba hipotézisei:

$$\begin{aligned} H_0 : \hat{\mathbf{e}} &= \mathbf{0}, \\ H_1 : \hat{\mathbf{e}} &\neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Normális eloszlású vektorok esetén a várható értékre vonatkozó többdimenziós próbát a Hotelling-féle T^2 -teszt egyoldali változatával hajtuk végre. A próbastatisztika:

$$T^2 = N \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{W}^{-1} \hat{\mathbf{e}}, \quad (16)$$

amely az F -eloszlást követi. Az összevetéshez a $p_1 = 2$ és $p_2 = N - 2$ paraméterű, α szignifikanciaszinten vett F -eloszlás inverzének irodalom (Timm 2002) szerinti átskálázására van szükségünk:

$$T_0 = 2(N - 1)/(N - 2) F_{1 - \alpha, 2, N - 2}. \quad (17)$$

Amennyiben $T^2 < T_0$ teljesül, a H_0 hipotézis elutasítására nincs okunk, ellenkező esetben H_1 javára döntünk. Az, hogy a (15) hipotézisek alapján mely vektorok kerülnek elfogadásra, nagymértékben függ a mérési eredmények szórásától. Ezért a teszt által elfogadott \mathbf{u} vektorokat *pseudo-sajátvektoroknak* nevezzük el, és az $\hat{\mathbf{u}}$ jelöléssel látjuk el megkülönböztetve ezeket a \mathbf{k}_e tenzor közvetlenül számított \mathbf{u}_i sajátvektoraitól. Gyakorlati alkalmazásokban a félgöm-

böt megfelelő sűrűségű (legalább 100, hozzávetőlegesen egyenletesen szétosztott pont a gömb felszínén) hálózattal diszkrétizálva meghatározható a pseudo-sajátvektorok elhelyezkedése (a bemutatásra kerülő példákban 200 pontos diszkrétizálást használtunk). A számítás eredménye a geofizikában használatos sztereogramokon könnyen ábrázolható.

2.3. Statisztikai próbák a forgási anizotrópia ellenőrzésére

A 2.2. alfejezetben leírt próba eredménye ugyan könnyen vizualizálható, azonban ez még nem dönt a forgási anizotrópia kérdésében. Láttuk korábban (*Ib.* és *c ábra*), hogy a forgási anizotrópiát megközelíthetjük akár a sajátértékek ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$), akár a sajátvektorok felől (ha az \mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2 sajátvektorok által kifeszített sík minden, O középpontú vektora sajátvektor, akkor a tenzor forgási anizotrop). Amíg a két megközelítés determinisztikus (mérési hibával nem terhelt) tenzorok esetén felcserélhető, addig sztochasztikus tenzorok esetén a két megközelítés vezethet eltérő eredményre. Ennek oka, hogy a tenzor elemei a sajátvektorokat és a sajátértékeket eltérő, nemlineáris függvényekkel határozzák meg. Ezért a \mathbf{k}_e tenzor elemeinek szórása is eltérő módon jelentkezik a sajátvektorokban és a sajátértékekben. A 2.2. alfejezetben ismertetett konstrukció lehetővé teszi, hogy mindkét megközelítés alapján külön-külön statisztikai próbákat hajtsunk végre. Azt is mondhatjuk, hogy – szemben a sajátértékekre koncentrált irodalommal – mindkét vizsgálat szükséges ahhoz, hogy a forgási anizotrópia (sőt, az izotrópia!) kérdésében dönteni tudjunk.

A *sajátvektorokon alapuló vizsgálat* esetén a sztereogramon a (15) próba elvégzése után feltüntetjük a $\hat{\mathbf{u}}$ pseudo-sajátvektorokat. Szemlélet alapján is könnyen ellenőrizhetjük, hogy a pontfelhőben három, kettő, vagy egy diszjunkt halmazt lehet elkülöníteni. Három elkülönülő halmaz anizotrop, kettő elkülönülő halmaz forgási anizotrop, egy (összefüggő) halmaz pedig izotrop tenzorra utal. Ha számszerűsíteni is szeretnénk eredményeinket, akkor a \mathbf{k}_e tenzor

számított sajátirányából (ahogy utaltunk rá, a numerikus eljárások jellege miatt ebből mindig három van) képezzük a $\mathbf{u}_{ij} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j)$ vektorokat ($i = 1, 2, j = 2, 3$, és $i < j$). Amennyiben mindhárom \mathbf{u}_{ij} esetén a (15) próba H_1 alternatív hipotézise igazolódik, akkor a tenzor a sajátvektorok szempontjából anizotrop, ha pontosan egy \mathbf{u}_{ij} esetén igazolódik H_0 hipotézis, akkor a tenzor forgási anizotrop (u_i és u_j sajátvektorok síkjában minden vektor sajátvektor), egyébként izotrop (mivel ekkor mindhárom \mathbf{u}_{ij} esetén H_0 igazolódik). E vizsgálatnál állításunk erejét is igazolhatjuk: a H_1 -re vezető \mathbf{u}_{ij} vektoroknál a (15) próba erejét is számszerűsít-hetjük (Timm 2002).

Konstrukción hasonlóan alkalmas arra, hogy a (15) próbával elfogadott irányokban a sajátérték vizsgálatát hajtsuk végre. Legyen két, különböző pseudo-sajátvektor $\tilde{\mathbf{u}}_1$ és $\tilde{\mathbf{u}}_2$! Mindkét esethez számítható a (9) összefüggésben λ -val jelölt skalár:

$$\tilde{\lambda}_i = \tilde{\mathbf{u}}_i^T \mathbf{k}_e \tilde{\mathbf{u}}_i, \quad (18)$$

amelyet *pszeudo-sajátértéknek* nevezünk. Természetesen $\tilde{\lambda}$ a valódi sajátirányokban a sajátértékkel egyenlő. A pszeudo-sajátérték valószínűségi változó, \mathbf{k}_e elemeinek lineáris függvénye ($\tilde{\lambda} = \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{k}_e$), ezért normális eloszlású. Nem normált statisztikai minta esetén $\mathbf{C} = 0$ és $\mathbf{D} = [\tilde{u}_1\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\tilde{u}_2, \tilde{u}_3\tilde{u}_3, 2\tilde{u}_2\tilde{u}_1, 2\tilde{u}_2\tilde{u}_3, 2\tilde{u}_3\tilde{u}_1]^T$. Normált adathalmazra $\mathbf{C} = [\tilde{u}_1 - \tilde{u}_3^2, -\tilde{u}_1^2\tilde{u}_2, -\tilde{u}_1^2\tilde{u}_3]^T$ és $\mathbf{D} = [\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2, \tilde{u}_3^2 - \tilde{u}_1^2, 2\tilde{u}_2\tilde{u}_1, 2\tilde{u}_2\tilde{u}_3, 2\tilde{u}_3\tilde{u}_1]^T$. A variancia-kovariancia mátrix jelen esetben egyetlen elemű: $\tilde{\mathbf{W}}_i = \mathbf{D}\mathbf{D}^T$. Célunk $\tilde{\lambda}_1$ és $\tilde{\lambda}_2$ várható értékének összehasonlítása, ezt kétmintás t -próbával tehetjük meg, feltéve, hogy a $\tilde{\mathbf{W}}_1 = \tilde{\mathbf{W}}_2$ teljesül. Ezen feltétel teljesülését F -próbával igazoljuk. A várható értékek azonosságát vizsgáló próba hipotézisei:

$$\begin{aligned} H_0: & \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2, \\ H_1: & \tilde{\lambda}_1 \neq \tilde{\lambda}_2. \end{aligned} \quad (19)$$

A próbastatisztikát a $2N - 2$ szabadságfokú t eloszlásfüggvény inverzének α szignifikanciaszinten vett értékével vetjük össze:

$$t = \sqrt{N} \frac{\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}{\sqrt{W_1^2 + W_2^2}}, \quad (20)$$

$$t_0 = T_{1-\alpha, 2N-2}. \quad (21)$$

A $t < t_0$ esetben H_0 hipotézis elvetésére nincs okunk, a két sajátérték különbsége statisztikai alapon nem állapítható meg. Ellenkező esetben a két sajátértéket az α szignifikanciaszinten különbözőnek kell tekintenünk. Praktikus az imént ismertett próbát úgy végrehajtani, hogy az egyik pszeudo-sajátvektort \mathbf{k}_e egyik sajátvektorának irányában vesszük fel (például $\tilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{u}_i$). Így meg tudjuk jelölni azon pszeudo-sajátvektorokat, amelyek pszeudo-sajátértéke szignifikánsan nem különbözik valamelyik sajátértéktől. Ennek segítségével a példánál alkalmazott színezés egyértelmű.

Nincs okunk feltételezni, hogy egy adott statisztikai minta sajátértékeinek és sajátvektorainak vizsgálata ugyanarra az eredményre vezet. Amíg egy determinisztikus (mérési

1. táblázat | Determinisztikus tenzorok lehetséges osztályozása

Jel	Sajátértékek	Sajátirányok diszjunkt halmazai		
		1	2	3
A	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$	izotrop		
B	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$	forgási anizotrop		
C	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$	anizotrop		

2. táblázat | Sztoczasztikus tenzorok lehetséges osztályozása. A táblázatban szereplő rövidítések: KA – kismértékben anizotrop, KFA – kismértékben forgási anizotrop. A sajátértékeknel alkalmazott \cong jellel arra utalunk, hogy a tenzor sajátértékei statisztikai próbával nem megkülönböztethetők

Jel	Sajátértékek	Sajátirányok diszjunkt halmazai		
		1	2	3
A	$\lambda_1 \cong \lambda_2 \cong \lambda_3$	izotrop	KFA	KA
B	$\lambda_1 \cong \lambda_2 \neq \lambda_3$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \cong \lambda_3$	KFA	forgási anizotrop	KA
C	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$	KA	KA	anizotrop

hibával nem rendelkező) tenzor esetén a lineáris algebrából jól ismert módon csak három lehetőség közül választhatunk (ld. 1. ábrán és az 1. táblázatban), addig statisztikai kiértékelés esetén a megkülönböztethető esetek száma kilenc (2. táblázat). A megnövekedett esetszám a tenzorelemek szórásából eredő bizonytalanságot fejezi ki: például lehetséges, hogy a sajátirányok a sztereogramon jól elkülönülnek, a hozzájuk tartozó sajátvektorok nagysága olyan mértékben bizonytalan, hogy nem dönthető el, melyik értéke maximális. Például az anizotrópia meglétét csak akkor jelenthetjük ki egyértelműen, ha a pszeudo-sajátértékek szignifikánsan eltérnek és a pszeudo-sajátvektorok három diszjunkt halmazt alkotnak. Hasonlóan szükséges, hogy mind a sajátértékek, mind a sajátvektorok szerint igazolódjon a forgási anizotrópia vagy az izotrópia. A gyakorlat szempontjából érdemes a 2. táblázat hasonló jelentésű celláit összefoglaló névvel illetni: a bevezetésben már említett, kismértékben anizotrop (KA) tenzorokat a 2. táblázat 3A és 3B cellái tartalmazzák. Ezekhez hasonlít az az eset, a három sajátérték különböző ugyan, de a pszeudo-sajátirányok nem különböznek el eléggé, egy vagy két diszjunkt halmazt alkotnak (1C és 2C cellák). Írásunkban ezeket az eseteket is kismértékben anizotropnak tekintjük. Az elnevezéssel arra utalunk, hogy az anizotrópia pontosan egyik feltételének teljesülését tuduk igazolni. Hasonlóan járunk el a forgási anizotrópia esetében is: a pontosan két megkülönböztethető sajátértékkel és egy halmazt alkotó pszeudo-sajátvektorokkal rendelkező, továbbá a két halmazt adó pszeudo-sajátvektorokkal, de megkülönböztethetetlen sajátértékekkel jellemezhető tenzorokat *kismértékben forgási anizotropnak* (KFA) nevezük, ezek a 2. táblázat 1B és 2A celláiban találhatóak.

2.4. A zajérzékenység vizsgálata

A 2. táblázatban bemutatott, a determinisztikus tenzorokhoz szokott kutató számára talán furcsának tűnő esetek nem elhanyagolható mennyiségben jelennek meg a paleomágneses mérések között. Mielőtt terepi mérések kiértékelését mutatnánk be, szimulált adatsorokon vizsgáljuk az eljárás működését. Tegyük fel, hogy egy hipotetikus földrajzi hely \mathbf{k}_i mérési eredményi az egzakt \mathbf{k}_0 tenzort közelítik! Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy nincs szükség normalásra és az O középpontú koordináta-rendszer tengelyei egybeesnek \mathbf{k}_0 sajátirányaival (azaz $k_{0,12} = k_{0,13} = k_{0,23} = 0$). A terepi mérések jellemően $N = 20 \dots 40$ mérési eredményt szolgáltatnak, ennek megfelelően a szimulációkat $N = 30$ méretű mintán hajtottuk végre. Az egyes szimulált mérési eredményeket az egzakt tenzorból állítottuk elő:

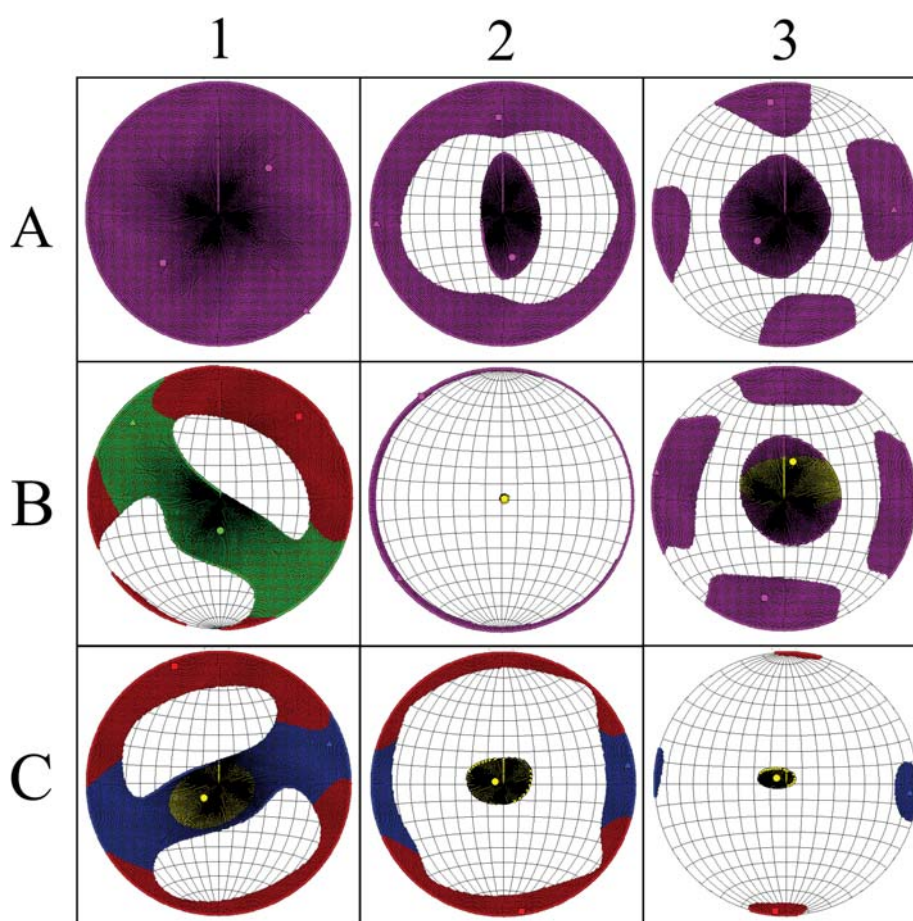
$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_0 + \Delta \mathbf{r}_i, \quad (22)$$

ahol \mathbf{r}_i elemei standard normális eloszlásból húzott számok, Δ a szimulációban felvett szórás. A szimulációk során \mathbf{k}_0

3 táblázat $N = 30$ szimulált mérési eredményből képzett statisztikai minták kiértékelése. A szimulációk feltüntetett kimenetelei a 2. táblázat celláira utalnak. A szimuláció sztochasztikus jellege miatt elvben bármely kimenetel lehetséges. A többszöri futtatás esetén leggyakoribb kimeneteleket tüntettük fel, a zárójelben szereplő kimenetelek ritkábban, de érzékelhető mennyiségben (körülbelül 1–5%-os gyakorisággal) jelentkeznek

\mathbf{k}_0	\mathbf{k}_0 sajátértékei	$\Delta = 0,001$	$\Delta = 0,010$	$\Delta = 0,100$
1A	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,00$	1A	1A	1A
2B	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,01$ $\lambda_3 = 1,00$	2B	2B (1C, 1B)	1A
3C	$\lambda_1 = 1,01$ $\lambda_2 = 1,00$ $\lambda_3 = 0,99$	3C	3C (1B, 1C 2B, 2C)	1A

rendre izotrop ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), forgási anizotrop ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$) és anizotrop ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$) tenzor volt, a (3) összefüggés nyomán a Δ -szórást a sajátértékek különbségének minimuma környékén vettük fel. A szimuláció eredményeit



2. ábra Szimulációs példák a 2. táblázat osztályaihoz. A szimulációk bemenő paraméterei az egyes esetekhez $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Delta)$ alakban (vö. a 3. táblázattal): 1A: (1,01, 1,00, 0,99, 0,050), 2A: (1,01, 1,01, 1,00, 0,005), 3A: (1,01, 1,00, 0,99, 0,009), 1B: (1,01, 1,01, 1,00, 0,010), 2B: (1,01, 1,01, 1,00, 0,001), 3B: (1,01, 1,00, 0,99, 0,007), 1C: (1,01, 1,00, 0,99, 0,016), 2C: (1,01, 1,00, 0,99, 0,013), 3C: (1,01, 1,00, 0,99, 0,005)

Figure 2 Simulations for the classes of Table 2. The input parameters in $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Delta)$ form (see also Table 3): 1A: (1.01, 1.00, 0.99, 0.050), 2A: (1.01, 1.01, 1.00, 0.005), 3A: (1.01, 1.00, 0.99, 0.009), 1B: (1.01, 1.01, 1.00, 0.010), 2B: (1.01, 1.01, 1.00, 0.001), 3B: (1.01, 1.00, 0.99, 0.007), 1C: (1.01, 1.00, 0.99, 0.016), 2C: (1.01, 1.00, 0.99, 0.013), 3C: (1.01, 1.00, 0.99, 0.005)

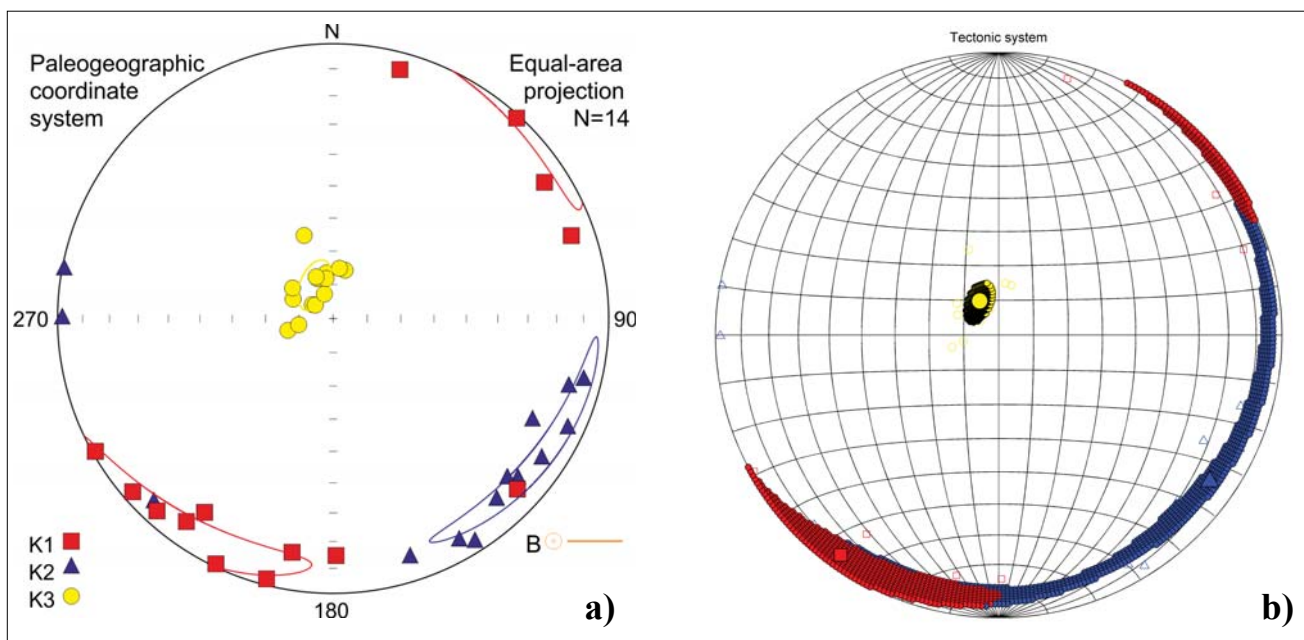
a 3. táblázatban foglaltuk össze. Várakozásinknak megfelelően, a sajátértékek különbségénél kisebb szórás esetén ($\Delta = 0,001$ oszlop) módszerünk egyértelműen beazonosítja \mathbf{k}_0 típusát (azaz a hibás besorolás valószínűsége Δ csökkenésével tart a nullához). Ezzel szemben túl nagy szórás ($\Delta = 0,1$ oszlop) esetén bármely adathalmaz tipikusan izotropnak bizonyul. A második és harmadik sorban felvett \mathbf{k}_0 sajátértékek különbségeinek minimumával megegyező szórás ($\Delta = 0,01$) esetén a szimuláció kimenetele jellemzően visszadja \mathbf{k}_0 típusát, azonban időnként KA és KFA besorolást kapunk eredményül. Ez Δ növelésével egyre gyakrabban fordul elő jelezvén, hogy a $\Delta = 0,1$ oszlopban nagy valószínűséggel IA kimenetelre számíthatunk. Szimulációink alátámasztják a (3) összefüggés kapcsán leírtakat: módszerünk olyan tartományban is képes (legalább részlegesen) reprodukálni \mathbf{k}_0 típusát, ahol az irodalomban található megoldások már izotrópiát jeleznek.

Végezetül a szimulációs adatok lehetővé teszik, hogy a 2. táblázat osztályainak egy-egy jellemző elemét sztereogrammon ábrázoljuk. A 2. ábrán különböző sajátértékek és Δ -szórás mellett ($\alpha = 0,05$ szignifikanciaszinten) mutatjuk be a sztocasztikus tenzorokra jellemző sztereogramokat. Az itt és a későbbi ábrák sztereogramjain a maximális irány (λ_1) sajátvektorát piros, a középső (λ_2) sajátvektorát kék, míg a minimális irány (λ_3) sajátvektorát sárga szín jelöli. Amennyiben a maximális és az intermedier irány sajátértékei nem elkülöníthetőek, akkor a pseudo-sajátvektorok lila színűek, az intermedier és a minimális irány sajátértékeinek megkülönböztetetlen-ségét zöld szín jelöli.

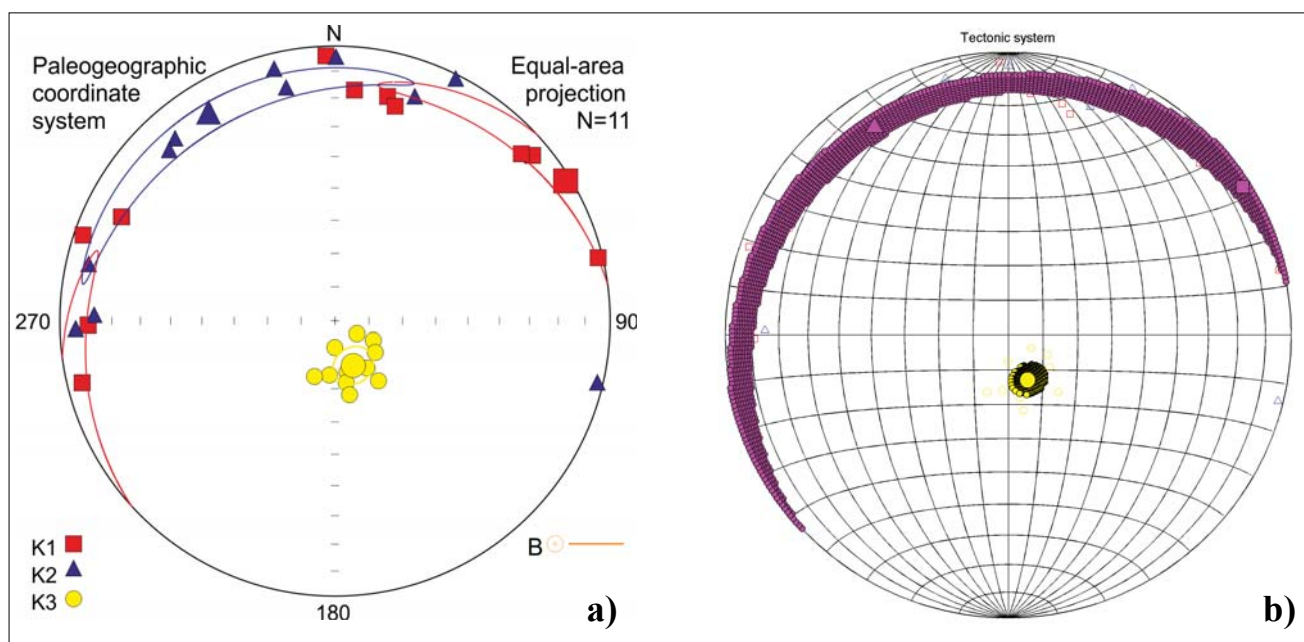
2.5. Terepi példák

Ebben az alfejezetben a gyakorlati alkalmazhatóság alátámasztására módszerünket valós, terepi eredmények kiértékelésére használjuk fel. A bemutatásra kerülő összes példa sztereogramját a tektonikai korrekció után ábrázoljuk. Az összehasonlíthatóság miatt minden példánál megadjuk a Jelinek-féle eljárás eredményeit is. Jelinek a sajátértékeket k_1, k_2, k_3 szimbólumokkal jelöli, ezek teljesen mértékben megfelelnek jelen írás λ_1, λ_2 és λ_3 értékeinek.

Elsőként Óbarok adatsorát ($N = 14$) vizsgáljuk (3a. ábra). Ez a statisztikai minta szigorúan véve nem lenne vizsgálható Jelinek módszerével mert a $\lambda_1 = k_1$ és $\lambda_2 = k_2$ sajátvektorokhoz tartozó sajátirányok konfidenciaellipsziseinek nagyobbik nyílásszöge bőven meghaladja a 25 fokot. A 2.2. alfejezetben részletezett eljárást használva a sztereogramra vetítjük az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszint mellett elfogadott pseudo-sajátvektorokat. Ábránk megmutatja, hogy az adatsorban meglévő szórás mellett mely irányokról lehet valószínűsíteni, hogy azok az adatsor eredő tenzorának sajátirányai. Az ábrán a pseudo-sajátvektorok által megjelölt tartományok lényegében megfelelnek a Jelinek-féle módszer konfidenciatartományainak, azonban azokkal szemben egzaktaknak tekinthetőek. A vektorok eloszlása alapján a mérési eredmények eredője forgási anizotrop: a pseudo-sajátvektorok két diszjunkt halmazt alkotnak: a minimális (sárgával jelölt) \mathbf{u}_3 irányban a halmaz kiterjedése kicsiny, a másik halmaz azonban jelentős kiterjedésű. A forgási anizotrópiát igazolja, hogy az \mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2 (az eredő tenzorból közvetlenül számított) sajátvektorok által kifeszített síkon körbe minden egységvektor a (15) próba H_0 hipotézisét adja eredményül. Ezen a síkon a pseudo-sajátértékekre készített



3. ábra | Óbaroki mintacsoport. a) Jelinek statisztika; Anisosoft 4.2, b) Pseudo-sajátvektorok és a szignifikánsan különböző sajátértékek
 Figure 3 | Specimens from Óbarok. a) Jelinek statistics; Anisosoft 4.2, b) Pseudoeigenvectors and significantly different eigenvalues

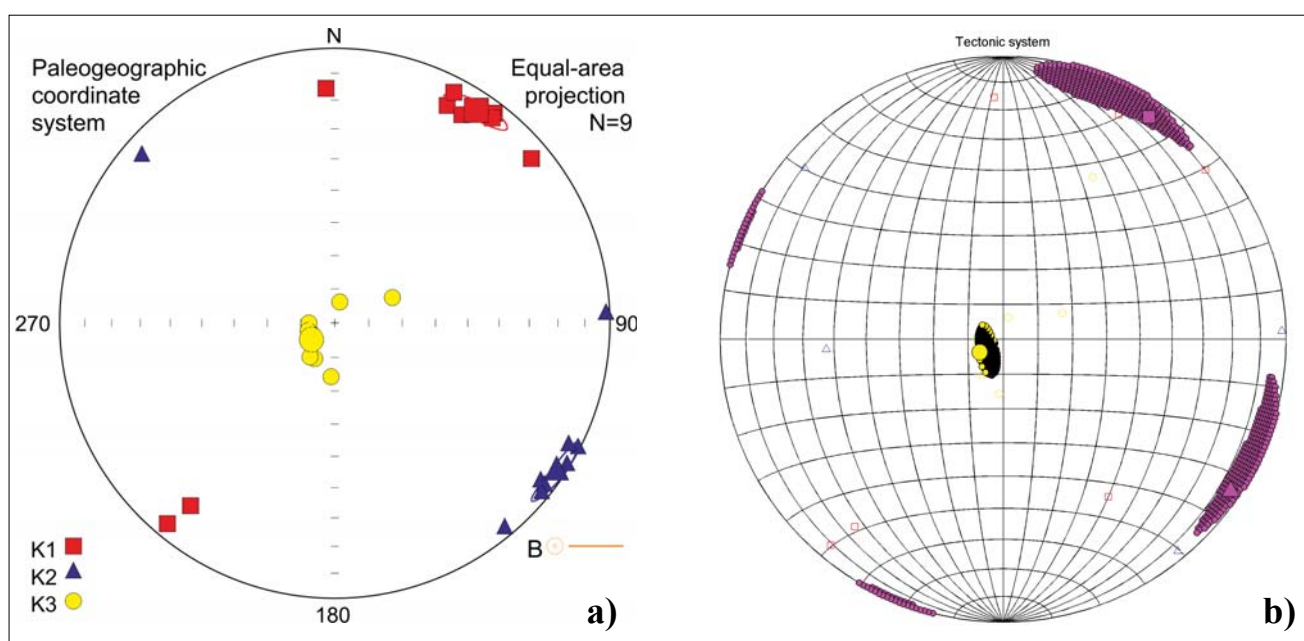


4. ábra | Solymári mintacsoport. a) Jelinek statisztika; Anisoft 4.2, b) Pszeudo-sajátvektorok és a szignifikánsan különböző sajátértékek
Figure 4 | Specimens from Solymár. a) Jelinek statistics; Anisoft 4.2, b) Pseudoeigenvectors and significantly different eigenvalues

(19) próba szignifikáns különbséget jelez, ezt az ábrán a piros (= maximális szuszceptibilitás iránya) és kék (= intermediér irány) színekkel különítjük el. Összefoglalva, a 2. táblázat szerint az óbaroki minta a 2C osztálynak felel meg (kismértékben anizotrop). Felmerül a kérdés, hogy akkor az adathalmaz rendelkezik-e irányultsággal? A minimális sajátvektor iránya teljesen egyértelmű. A sajátértékek szignifikáns különbsége miatt védhető, ha a sztereogramon az eredő tenzorhoz számított maximális és középső saját-

vektorokat is feltüntetjük. Azonban az eredmények értékelésénél érdemes figyelembe vennünk, hogy ez a megoldás „gyengébb” egy valóban anizotrop tenzorhoz képest. Ez éppen a 2. fejezetben említett, gyenge irányultságot okozó mechanizmusra utal.

Az óbaroki adatsorhoz hasonlóan tűnik a solymári adathalmaz ($N = 11$, 4. ábra), itt Jelinek módszerével számított konfidenciaellipszisek részben átfedik egymást. Az adatsor eredő tenzora mind a sajátvektorai,



5. ábra | Fenyőfői mintacsoport. a) Jelinek statisztika; Anisoft 4.2, b) Pszeudo-sajátvektorok és a szignifikánsan különböző sajátértékek
Figure 5 | Specimens from Fenyőfő. a) Jelinek statistics; Anisoft 4.2, b) Pseudoeigenvectors and significantly different eigenvalues

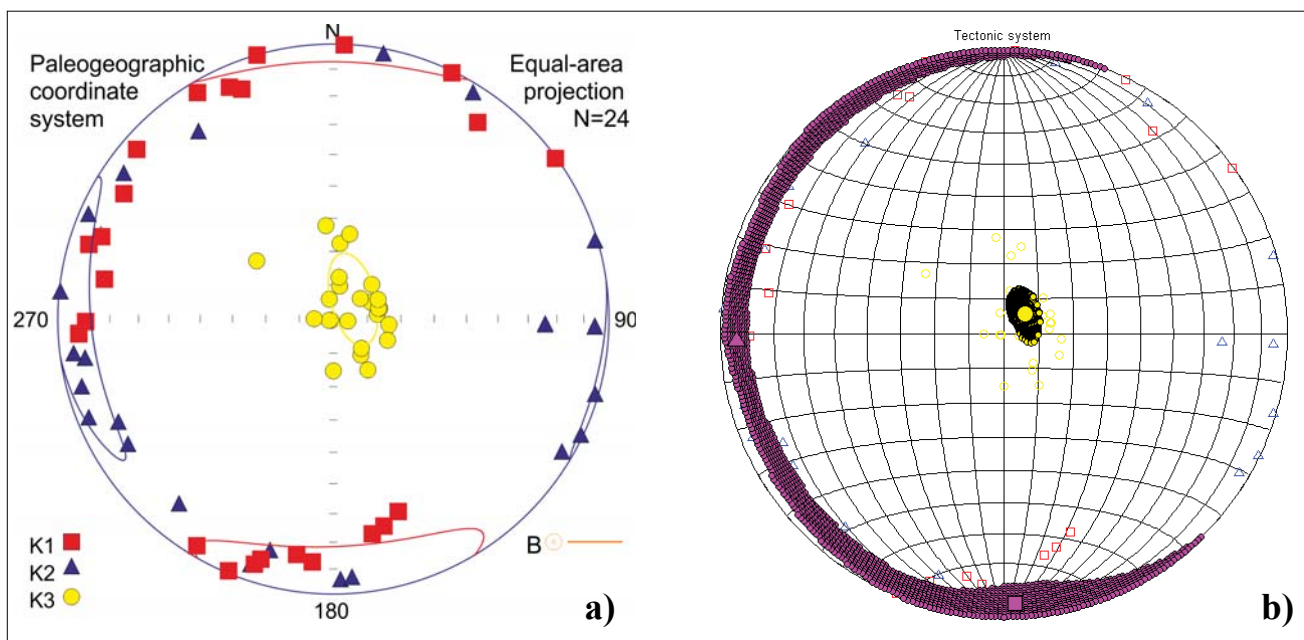
mind a sajátértékei alapján forgási anizotrop, a maximális és a középső irány a mintából nem különíthető el, (2B osztály a 2. táblázatban). Ilyen esetben az eredő tenzor maximális és középső sajátirányainak feltüntetése a sztereogramon kimondottan félrevezető: az adott mintához nem létezik plauzibilis érv arra, hogy miért pont a bejelölt irányokat tekintjük maximális és intermedier irányoknak.

Utolsó példánk Fenyőfő ($N = 9$, 5. ábra). Az eredő tenzor a Jelinek-féle eljárással anizotropnak tűnik, a konfidenciaellipszisek kiterjedése kicsiny, nincs okunk a módszer alkalmazhatóságában kételkedeni. Azonban kiszámítva az eredő tenzor sajátértékeiket azt találjuk, hogy $\lambda_1 = k_1$ és $\lambda_2 = k_2$ értéke meglehetősen közel esik egymáshoz. Ez felveti, hogy vajon a (3) egyenletben a sajátértékek különbsége, vagy a Δ -szórás a kisebb. Új módszerünk a sajátvektorok tekintetében megerősíti az anizotrópiát, a pszeudo-sajátvektorok három diszjunkt halmazt eredményeznek, ráadásul mindegyik halmaz csak a sztereogram kis részét fedi. Azonban a sajátvektorokkal kapcsolatban az derült ki, hogy $\lambda_1 = k_1$ és $\lambda_2 = k_2$ nem különböztethető meg, ami az említett kis eltérés miatt nem is tűnik meglepőnek. Az eredményt úgy interpretálhatjuk, hogy a maximális és a középső sajátirány elhelyezkedését nem tudjuk eldönteni, ámbar lehetséges irányuk kis szögterületben helyezkedik el. A statisztikai minta alapján mindkét, lilával jelölt halmaz tartalmazhatja a maximális irányt. Ezen adatsor eredő tenzora a 2. táblázat szerinti 3B esetet képviseli (kismértékben anizotrop). Utolsó példánk rámutat arra, hogy pusztán a Jelinek-módszer konfidenciaellipszisei alapján, „ránézésre” vélelmezett anizotrópia téves is lehet, mert ez még nem garantálja a sajátértékek szignifikáns elkülönülését.

A bemutatott példákat különböző szignifikancia szinten is elemeztük. Vizsgálataink szerint a szignifikanciaszint változtatása a $0,01 < \alpha < 0,20$ tartományon a pszeudo-sajátvektorok halmazát csak kis mértékben módosítja, a szignifikánsan különböző sajátértékek számára pedig nincs hatással. Ez különösen alkalmassá teszi módszerünket a kismértékben anizotrop tenzorok vizsgálatára.

3. Eltérő eredetű mérési eredmények különválasztása klaszter analízissel

A gyakorlatban a forgási anizotrópiát mutató (vagy ahhoz közel álló) mérési eredmények felvetik azt a kérdést, hogy vajon nem két vagy esetleg több fázis adatai kerültek-e kiértékelésre. Mint láttuk, N darab mérési eredményből a k_e eredő tenzor kötöttsége nélkül számítható. Az N darab mérési eredmény egy statisztikai mintába sorolása önkényesnek is mondható. A döntés mögött az a feltételezés húzódik meg, hogy az adott mintacsoport valamekkora zaj mellett ugyanazt a közetfizikai mennyiséget approximálja. E feltevés gyakran vitatható. Ebben a fejezetben a mintán belüli csoportok elkülönítésére egy, a klaszteranalízisből ismert módszert mutatunk be. A klaszteranalízis kiterjedt irodalmában szinte megszámlálhatatlan algoritmust publikáltak. Mi kizárólag felhasználni szeretnénk egy, a problémánknak megfelelő módszert. Munkánk során több eljárással is kísérleteztünk (pl: K-mean, Hierarchikus Klaszterek, Gaussian Mixture Modellek stb.), a *dbscan* algoritmus (Ester et al. 1996) kiemelkedően jó eredményeket szolgáltatott. Az eljárás az N elemű minta sűrűbb tartományait célozza különválasztani. Más, klaszteranalízishez használt eljárásokkal szemben nem szüksé-



6. ábra | Orondpusztai mintacsoport. a) Jelinek statisztika; Anisosoft 4.2, b) Pszeudo-sajátvektorok és a szignifikánsan különböző sajátértékek
 Figure 6 | Specimens from Orondpuszta. a) Jelinek statistics; Anisosoft 4.2, b) Pseudoeigenvectors and significantly different eigenvalues

ges előre definiálni a szétválasztandó klaszterek számát. A (2) egyenlet alapján 6 darab független elem határozza meg a szuszceptibilitási tenzort, így egy mérési eredmény egyértelműen megfeleltethető egy $D = 6$ dimenziós tér egy pontjának. Az eljáráshoz elengedhetetlen a pontok közötti távolság definiálása, mi a munkánkban a legelterjedtebb, euklideszi távolságot vesszük alapul (azaz a vizsgálat tere \mathbb{R}^6). A normálás a pontthalmazt összehúzza, ezért a klaszter analízist a normálatlan adathalmazon érdemes végrehajtani.

A klaszteranalízisben használt eljárások jellemzően nagy, több ezer vagy akár több millió adatpontot tartalmazó minták elemzésére használatosak. Ezért is fontos kiemelni, hogy a klaszteranalízissel kapott eredményt csak egy ötletnek és nem végeredménynek tekintjük. Amennyiben az itt bemutatásra kerülő vagy más eljárással több klasztert azonosítunk a mérési eredmények halmazán, akkor azt érdemes statisztikai eljárással is megvizsgálni. Ilyen eljárást mutat be a 4. fejezet. Az ott bemutatandó módszerekkel a gyakorlott kutató saját, klaszterekre vonatkozó hipotéziseit is ellenőrizheti.

3.1. Példa

Az $N = 24$ elemű orondpusztai adatokat három földtani rétegből mintázták. A teljes minta együtt a 6. ábra szerinti sztereogramot eredményezi, a \mathbf{k}_e eredő tenzor forgási anizotrop, sem a sajátvektorok, sem a sajátértékek nem engednek anizotrópiára következtetni. Osztályozásunk szerint (2. táblázat) ezen adatsor eredő tenzora (\mathbf{k}_e) a 2B osztályba tartozik.

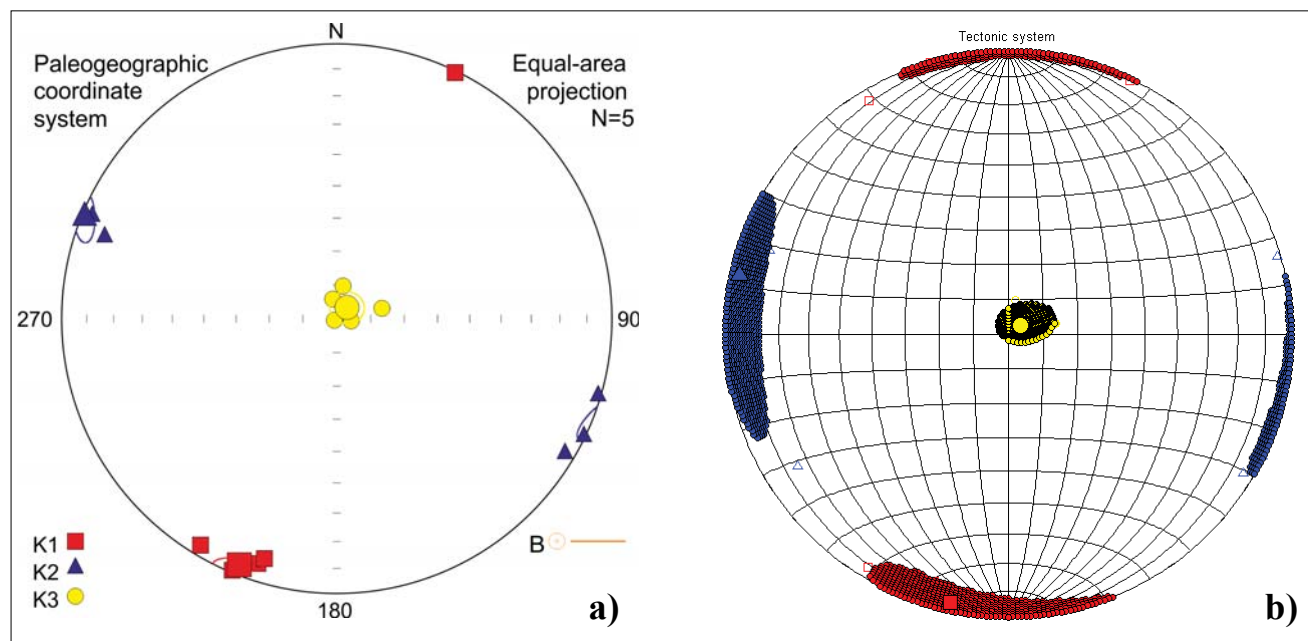
A normálatlan statisztikai minta klaszter analízise három csoportot különít el, ezek egy mérés kivételével (amely a kettes klaszter helyett az egyes klaszterbe kerül) megfelelnek a három földtani rétegnek, ahonnan a minták származnak. A 7. ábra mutatja a három csoport (külön-külön számított) eredő tenzorának peszeudo-sajátirányait (részletek a 2. fejezetben) és a szignifikánsan megkülönböztethető sajátértékeket.

4. Eredő tenzorok összehasonlítási lehetőségei

A 3. fejezet eljárása egyes mérési eredmények távolságán alapul, nem veszi figyelembe a mérési eredmények közötti szorosságot. Ezért a szétválasztás eredményét csak akkor fogadjuk el, ha statisztikai próbával is sikerül igazolni, hogy a megtalált klaszterek statisztikai alapon is különbözőek. Azonban az eljárás nem csak a klaszterek összehasonlítására használható. A paleomágneses vizsgálatok során gyakran az eredményül kapott szuszceptibilitási tenzort vagy annak egyes jellemzőit (elsősorban a sajátvektorok irányait) más, nem mágneses vizsgálatokból kapott eredményekkel is összehasonlítják. Jó példa erre a mágneses lineáció és a csapásirány vagy az AMS tenzor és a mikrotektonikai feszültségtenzor összehasonlítása.

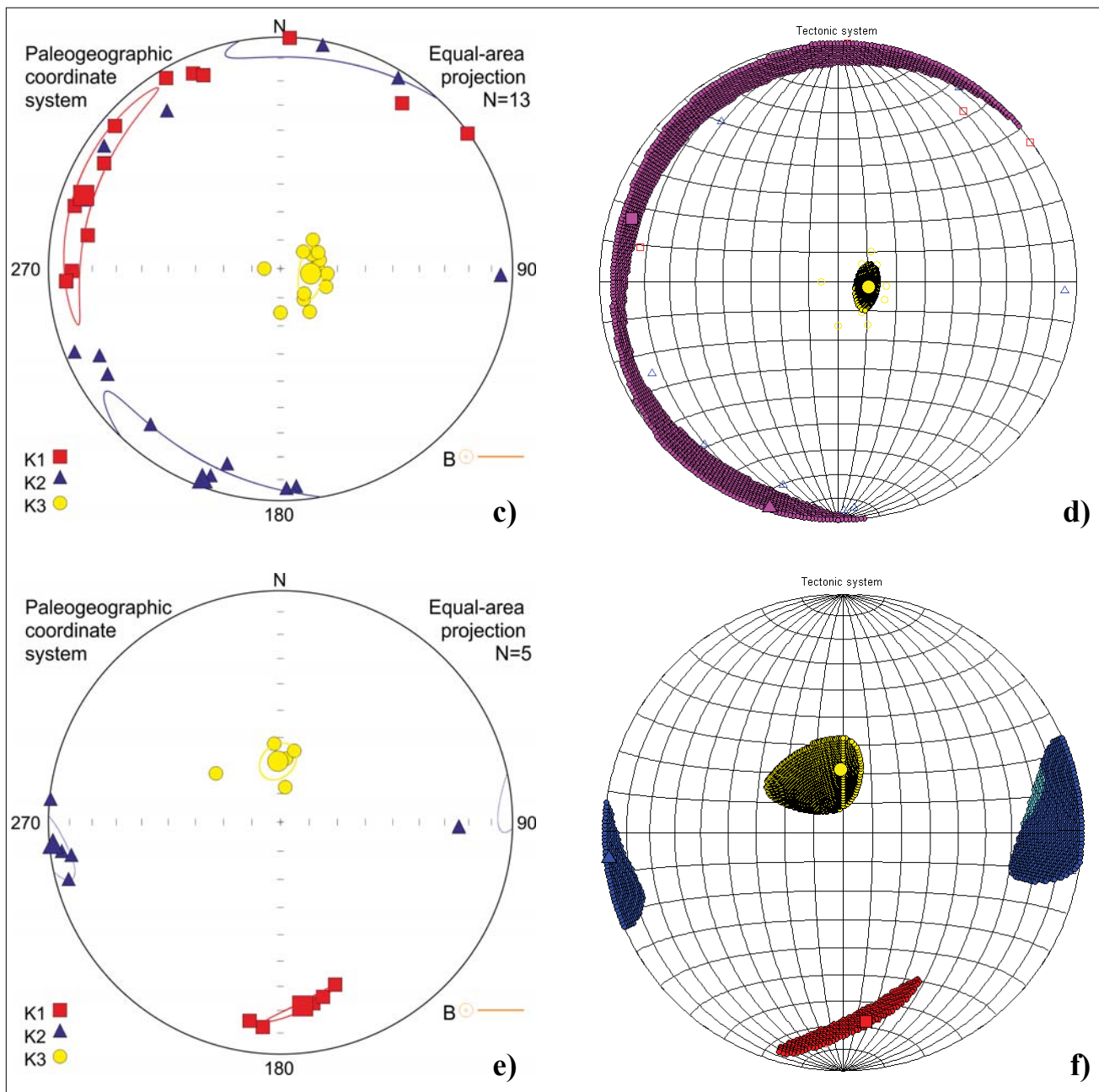
4.1. Tenzorok összehasonlítása közvetlenül az elemeik alapján

Tegyük fel, hogy a 2. fejezet szerinti \mathbf{k}_e tenzort és \mathbf{V} kovarianciamátrixát ismerjük. Adott egy 3×3 -as, szimmetrikus,



7. ábra | Az orondpusztai mintacsoport három klasztere megfelel a magminták forrásául szolgáló három földtani rétegnek. a) 1. klaszter: Jelinek statisztika, b) 1. klaszter

Figure 7 | The three clusters of the specimens from Orondpuszta fit well to the three geological layers where the specimen were taken from. a) Cluster 1: Jelinek statistics, (b) Cluster 1



7. ábra | Az orondpusztai mintacsoport három klasztere megfelel a magminták forrásául szolgáló három földtani rétegnek. c) 2. klaszter: Jelinek statisztika, d) 2. klaszter, e) 3. klaszter: Jelinek statisztika, f) 3. klaszter
Figure 7 | The three clusters of the specimens from Orondpuszta fit well to the three geological layers where the specimen were taken from
 c) Cluster 2: Jelinek statistics, d) Cluster 2, e) Cluster 3: Jelinek statistics, f) Cluster 3

valós elemű σ tenzor, egyenlőre ennek szórásától tekintünk el. Célunk olyan statisztikai próbák felállítása, amelyekkel a két tenzor azonosságát igazolni tudjuk. Mindezek előtt tisztáznunk kell, hogy pontosan mit értünk azonosság alatt. Már utaltunk rá, hogy a geofizikában a tenzorok sajátirányainak van kitüntetett szerepe, ezen túl a sajátértékből képzett arányok lehetnek még fontosak (pl. lineációs fok). A 2. fejezetben rámutattunk, hogy a sajátvektorok statisztikai elemzése nem triviális feladat. Tenzorok összehasonlításakor dönthetünk úgy, hogy a két tenzor ábrázolására szolgáló mátrixok azonosságát vizsgáljuk. Megmutat-

juk, hogy a tenzorok elemenkénti összehasonlítása még akkor is járható út, ha a sajátvektorok azonos állását szeretnénk igazolni. A mátrixok összehasonlításának nehézsége abban rejlik, hogy a k_e és a σ tenzor skalárinvariánsai (Itskov 2007, Roman 2005) akár jelentősen is eltérhetnek. (A tenzorok normálása kapcsán már érintettük ezt a problémát.) Olyan lineáris transzformációt keresünk, amely a tenzor sajátvektorainak irányát nem változtatja meg, azonban a mátrixelemekben a lehető legkisebb eltérést eredményezi. A választott transzformációt a σ tenzoron mutatjuk be:

$$\hat{\sigma} = t_1 \sigma + t_2 \mathbf{I}, \quad (23)$$

ahol \mathbf{I} az egységtenzor, t_1 és t_2 tetszőleges valós számok, $t_1 \neq 0$. Legyen a σ tenzor egy \mathbf{v}_i sajátvektorához tartozó sajátérték μ_i (összhangban a (8) összefüggéssel: $\sigma \mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{v}_i$)! Vizsgáljuk $\hat{\sigma}$ és \mathbf{v}_i szorzatát:

$$\hat{\sigma} \mathbf{v}_i = (t_1 \sigma + t_2 \mathbf{I}) \mathbf{v}_i = t_1 \mu_i \mathbf{v}_i + t_2 \mathbf{v}_i = (t_1 \mu_i + t_2) \mathbf{v}_i. \quad (24)$$

Tehát a transzformált tenzor megőrzi az eredeti σ tenzor sajátvektorait, i -edik sajátértéke pedig a $t_1 \mu_i + t_2$ értéket veszi fel. (Megjegyezzük, hogy a (23) transzformáció a szimmetrikus σ tenzorhoz a szimmetrikus $\hat{\sigma}$ -t rendeli hozzá.) Kérdés, hogyan vegyük fel a t_1 és t_2 szorzókat. Az egyik lehetőség, hogy \mathbf{k}_e és $\hat{\sigma}$ tenzor pontosan két skalárinvariánsát egyenlővé tesszük. Statisztikai szempontból azonban ez nem feltétlenül optimális. A \mathbf{k}_e és a $\hat{\sigma}$ tenzorok elemei között legkisebb eltérését akkor kapjuk, ha t_1 és t_2 számokat legkisebb négyzetek módszere szerint vesszük fel (Timm 2002).

A két összehasonlítandó tenzor egyezését vizsgálhatnánk elemenként, mind a 6 (normált esetben 5) paraméterre t -próbát illetve. Azonban ismeretes, hogy ez a megközelítés szorosabb összefüggést mutat, hiszen nem veszi figyelembe, hogy a 6 (normált esetben 5) paraméter egymástól nem független valószínűségi változó. Ezért a t -próba 2. fejezetben már bemutatott, többdimenziós változatát, a Hotelling-féle T^2 -eljárást használjuk. Nem normált vizsgálatnál \mathbf{k}_E és $\hat{\sigma}$ elemeiből képezzük a következő vektorokat:

$$\tilde{\mathbf{k}} = [k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{12}, k_{23}, k_{13}]^T, \quad (25)$$

$$\tilde{\sigma} = [\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{23}, \hat{\sigma}_{13}]^T, \quad (26)$$

normált esetben pedig

$$\tilde{\mathbf{k}} = [k_{22}, k_{33}, k_{12}, k_{23}, k_{13}]^T, \quad (27)$$

$$\tilde{\sigma} = [\hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{33}, \hat{\sigma}_{12}, \hat{\sigma}_{23}, \hat{\sigma}_{13}]^T. \quad (28)$$

A statisztikai próbához a H_0 nullhipotézis és a H_1 alternatív hipotézis:

$$\begin{aligned} H_0 : \tilde{\sigma} &= \tilde{\mathbf{k}} \\ H_1 : \tilde{\sigma} &\neq \tilde{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (29)$$

A Hotelling-féle T^2 próbatasztiztikát és az α szignifikanciaszinten a T_0 küszöbértéket a következő összefüggések szolgáltatják:

$$T^2 = N(\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\sigma})^T \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\sigma}), \quad (30)$$

$$T_0 = \frac{p(N-1)}{N-p} F_{1-\alpha, p, N-p}, \quad (31)$$

ahol $F_{1-\alpha, p, N-p}$ a p és $(N-p)$ paraméterű F -eloszlás, $p = 6$ normálás nélküli és $p = 5$ normált statisztikai mintára. Amennyiben $T^2 < T_0$, a H_0 hipotézis elutasítására nincs okunk, a két tenzor statisztikai értelemben azonos, az azonos szorosságát mérhetjük a

$$C = (T_0 - T^2) / T_0 \quad (32)$$

hányadossal. (Ezt természetesen a cikkünkben szereplő összes próba esetén megtehetjük.)

Tegyük fel, hogy σ elemei \mathbf{k}_e tenzorhoz hasonlóan normális eloszlású valószínűségi változók. Legyen σ egy M mérésből álló adathalmaz várható értéke, a tenzorelemek kapcsolatát jellemző variancia-kovariancia mátrixot jelölje Θ ! A (23) transzformáció lineáris, ezért $\hat{\sigma}$ elemei is normális eloszlást követnek, kovariancia mátrixuk $\hat{\Theta} = t_1^2 \Theta$. Tegyük fel, hogy $\hat{\Theta} \cong \mathbf{V}$ teljesül. A kétmintás T^2 -próba végrehajtásához a következő összefüggések adódnak:

$$\mathbf{W} = \frac{(N-1)\mathbf{V} + (M-1)\hat{\Theta}}{N+M-2}, \quad (33)$$

$$T^2 = \frac{NM}{N+M} (\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\sigma})^T \mathbf{W}^{-1} (\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\sigma}), \quad (34)$$

$$T_0 = \frac{p(N+M-2)}{N+M-p-1} F_{1-\alpha, p, N+M-p-1}. \quad (35)$$

Az ímént ismertetett próbákat közvetlenül a tenzorok elemein hajtjuk végre, ezért a H_0 hipotézis teljesülése a közel eső sajátirányok mellett a tenzorok skalárinvariánsainak közelségét is valószínűsíti. Ennek nyomán egyes, a tenzornak megfeleltethető ellipszoid jellemzők is közeli lesznek, mégha a főteengelyarányok a (23) transzformáció következtében eltérőek is. Jó példa erre a szerkezetföldtani irodalomban (Angelier, 1990) használatos, az ellipszoid lapultságát mérő következő skalár:

$$\Phi = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}, \quad (36)$$

amely a (23) transzformáció alatt invariáns. A (29) próba H_0 hipotézise a sajátirányok közelségén túl azt is valószínűsíti, hogy a Φ skalár \mathbf{k}_e és σ tenzorokra nem mutat szignifikáns eltérést.

4.2. Tenzorok összehasonlítása sajátvektoraik alapján

A geofizikai gyakorlat számára talán természetesebb lenne, ha közvetlenül a sajátirányok alapján lehetne elvégezni a statisztikai összehasonlítást. Esetenként ez nemcsak tenzorok összehasonlításakor jelentkezik, hanem például \mathbf{k}_e egyik vagy másik sajátvektorát szeretnénk egy más forrásból ismert \mathbf{v} vektorral összevetni (például a földrajzi helyen mért csapásirány és a szuszceptibilitási tenzor maximális, lineációs iránya közötti egyezést szeretnénk kimutatni). Ennek nehézsége, ahogy azt már korábban említettük abban áll, hogy a tenzorelemek mérési hibája ránézésre nem megjósolható módon befolyásolja a sajátvektorok pontosságát.

Akár a \mathbf{v} vektor, akár a σ tenzor sajátirányaival dolgozunk, kézenfekvő a 2. fejezet módszerét felhasználni. Az ismert \mathbf{v} vektorról a 2. fejezet (15) próbájával tudjuk eldönteni, hogy lehet-e a \mathbf{k}_e valamely sajátvektora. Értelemszerűen ez a vizsgálat akkor jelent értékelhető eredményt, ha a \mathbf{k}_e sajátvektorának bizonytalansága kicsi. Azaz a próba elvégzésén túl szükségesnek látszik a 2. fejezetben részletesen ismertett módon a sztereogramon feltüntetni az összes pszeudo-sajátvektort. Amennyiben \mathbf{v} környezetében csak kis szögeltérésekkel helyezkednek el pszeudo-sajátvektorok, akkor joggal mondhatjuk, hogy \mathbf{v} a megfelelő sajátvektorral statisztikai értelemben megegyezik.

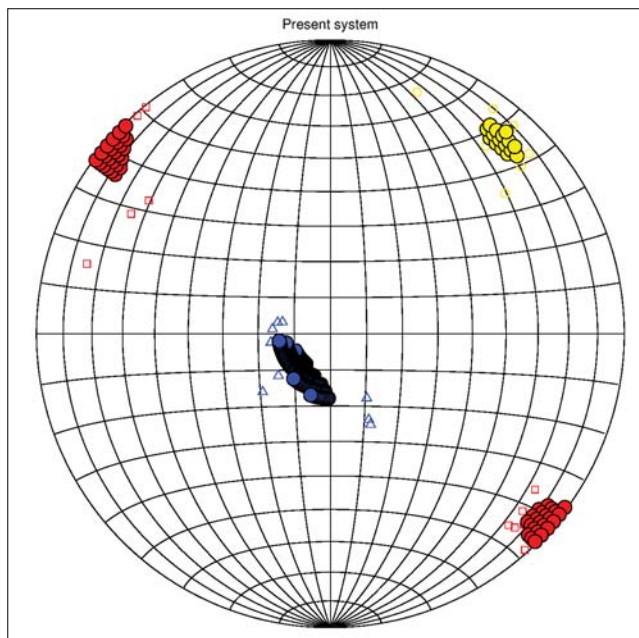
Tenzorok összehasonlításakor dönthetünk úgy, hogy σ sajátvektorait egyesével elemezzük. Ha egyik sajátvektor esetén sem tudjuk a (15) H_0 hipotézisét elvetni, akkor az α szignifikanciaszint mellett a két tenzor különbsége nem állapítható meg (legalább is a sajátvektor irányai alapján). Azonban ebben az esetben nem vettük figyelembe a (9) egyenletben definiált vektor elemei közötti kovarianciát. Ez a megközelítés azt a kritikát veti fel, hogy lényegében itt három, egymástól független vektorként tekintünk σ sajátvektoraira. Egzaktabb eljáráshoz elő kell állítani a σ tenzor minden egyes v_i sajátvektorához ($i = 1, 2, 3$) az A_i vektort és a 3×6 -os (normált esetben 3×5) B mátrixot (ld. a (11)–(13) egyenleteket). Legyen $A = [A_1^T A_2^T A_3^T]^T$ és

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Meg lehet mutatni, hogy v_i tulajdonságaiból (ortogonális egységvektorok) következik, hogy B rangja 3. A lineárisan függő sorokat törölve nyerjük az \hat{A} vektort és a \hat{B} mátrixot. A T^2 -próbával vizsgálandó vektor pedig $\hat{e} = \hat{A} + \hat{B}k_e$. Az \hat{e} vektor zérus voltát a (15) próbával analóg módon, $p = 3$ paraméteres vizsgálattal igazoljuk vagy vetjük el.

4.3. Példák

Egy vektor és a k_e tenzor egy sajátirányának összehasonlítását a csapásirány és a maximális szuszceptibilitás (lineáció) összevetésén mutatjuk be. Az $N = 15$ elemű minta Lengyelországból, Chmiel helység mellől származik. A minta



8. ábra A Chmiel (Lengyelország) helyiségnél vett mintacsoport. A helyszínen mért csapásirány (310° – 130°) jól egyezik az anizotrópiatenzor maximális főirányával

Figure 8 The specimens from Chmiel, Poland. The strike (310° – 130°) of the locality fits well to lineation of the anisotropy tensor

a 2. fejezet szerinti elemzéssel anizotrop (3C) osztály (*8. ábra*). A helyszíni mérési adatok szerint a vetősík ($220^\circ/80^\circ$)-as, ebből a csapásirány (310° – 130°)-nak adódik. A csapásirány vektora nagyon jó egyezést mutat az eredő tenzor lineációjával, a (32) egyenlet szerinti arányszám $C = 0,95!$

Ugyanezen minta esetén merült fel az a kérdés, hogy statisztikai alapon elkülöníthető-e az első $N_1 = 5$ mérés az utolsó $N_2 = 10$ méréstől, hiszen ezek ugyanazon mérési hely mélyebb rétegeiből származnak. A 3. fejezet szerinti eljárás szerint nem különíthető el két klaszter. Ennek ellenére vizsgáljuk meg a két részhalmaz eredő tenzorait! A 4.1. alfejezet szerinti összehasonlítás $C = 0,39$ -et eredményez, ami a két részhalmaz azonosságát mutatja. A sajátirányok összehasonlítása eltérő eredményre vezet: amíg az 5 elemes részhalmaz pseudo-sajátvektorai tartalmazzák a 10 elemes részhalmaz eredő tenzorának sajátvektorait, addig a fordított vizsgálatnál ez nem igazolható. Mivel a 4.2. alfejezet vizsgálatainál v és σ szórását nem vettük figyelembe, a próbák eltérő viselkedése nem meglepő. A két részhalmaz 2. fejezet szerinti ábrázolása minden kétséget eloszlat: amíg az 5 elemes részhalmaz kevés és nagy szórású adata miatt forgási anizotrópiát mutat, addig a 10 elemes részhalmaz anizotrop. Összességében a statisztikai elemzés alapján nem lehet kijelenteni, hogy a két részhalmaz elkülöníthető (ennek elsődleges oka az ötelemes részhalmaz kicsiny elemszáma).

Befejezésként a 3. fejezetben bemutatott, orondpusztai mérést elemezzük (*6. és 7. ábra*). A klaszterek száma $c = 3$. Az i -edik klaszter esetén megvizsgáljuk, hogy lehet-e azonos a j -edik klaszterrel ($i, j = 1, 2, \dots, c, i \neq j$). Ehhez a (33) összefüggésekkel adott próbát hajtjuk végre. (Mivel mindegyik klaszter adatait normáljuk, a (23) transzformáció alkalmazására nincs is szükség.) Minden esetben a próba H_1 hipotézisét kell elfogadnunk, azaz módszerünk valószínűsíti a három klaszter létét, a mérési eredmények különválasztását eljárásunk alátámasztja. A sajátvektorok 4.2. alfejezet szerinti vizsgálata ugyanerre az eredményre vezet, amit a *7. ábra* jobb oldalán szereplő sztereogramok vizuális összehasonlításával is könnyű belátni.

5. Összefoglalás

Cikkünkben közel izotrop, stocasztikus tenzorok sajátértékeinek és sajátvektorainak elemzésére szolgáló statisztikai módszereket ismertettünk. Rámutattunk arra, hogy amennyiben a tenzor ábrázolására használt mátrix elemei valószínűségi változók, akkor a sajátirányok elkülönülő halmazainak száma és a sajátértékek multiplicitása közötti kölcsönös összefüggés nem áll fenn. Ez drasztikusan eltér a determinisztikus tenzorok esetén megszokott képtől. A stocasztikus tenzorokra bevezetett új osztályozás ígéretes alkalmazási területe a harmadidőszaki üledékeken mért mágneses szuszceptibilitási minták eddigieknél finomabb és részletesebb elemzése.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Mártonné Szalay Emőnek (MFGI Paleomágneses Laboratórium), hogy felhívta figyelmemem a forgási anizotrópia problémájára és Sipos-Benkó Krisztínának, hogy segített a terepi eredmények kiértékelésében. A kutatást az OTKA 105245. témája támogatta.

A tanulmány szerzője

Sipos András Árpád

Hivatkozások

- Angelier J., 1990: Inversion of field data in fault tectonics to obtain the regional stress – III. A new rapid direct inversion method by analytical means. *Geophys. J. Int.* 103, 363–376
- Borradaile G., 2003: *Statistics of Earth Science Data*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg
- Constable C., Tauxe L., 1990: The bootstrap for magnetic susceptibility tensors. *J. Geophys. Res.* 95, 8383–8395
- Ester M., Kriegel H. P., Sander J., Xu X., 1996: A density based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. *Proceedings of 2nd International Conference of Knowledge Discovery and Data Mining*, pp. 226–231
- Fisher N. I., Lewis T., Embleton B. J. J., 1993: *Statistical analysis of spherical data*. Cambridge University Press

Appendix

A.1. 3×3 szimmetrikus tenzor kétszeres multiplicitású sajátértékkel

Tekintsünk a forgási anizotrop \mathbf{k} tenzort, ennek kétszeres multiplicitású sajátértékét jelölje $\lambda_{12} = \lambda_1 = \lambda_2$ (a hozzá tartozó sajátvektorok \mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2), az egyszeres multiplicitású sajátérték legyen λ_3 ! Tegyük fel, hogy \mathbf{k} a (23) transzformáció eredményeként állt elő. $t_1 = 1$ és $t_2 = \lambda_{12}$ helyettesítéssel kapjuk:

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}} + \lambda_{12} \mathbf{I}. \quad (38)$$

Ekkor a $\hat{\mathbf{k}}$ tenzor sajátértékei: $\hat{\lambda}_{12} = \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = 0$ (kétszeres multiplicitású) és $\hat{\lambda}_3 = \lambda_3 - \lambda_{12} \neq 0$. A (8) definíció és a (23) transzformáció tulajdonságai alapján teljesül, hogy

$$\hat{\mathbf{k}}\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{k}}\mathbf{u}_2 = 0, \quad (39)$$

azaz a $\hat{\mathbf{k}}$ tenzor sorvektorai az \mathbf{u}_1 és \mathbf{u}_2 vektorok által kifesztített síkra merőlegesek (ami egyben azt jelenti, hogy \mathbf{u}_3 skalárszorosai). Így

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 \\ p\hat{k}_1 \\ q\hat{k}_1 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

ahol a $\hat{\mathbf{k}}_1$ vektor a tenzor első sora, p és q tetszőleges, nem zérus valós szám. Azonban a feltevéseink nyomán $\hat{\mathbf{k}}$ szim-

Henry B., Le Goff M., 1995: Application de l'extension bivariate de la statistique Fisher aux données d'anisotropie de susceptibilité magnétique: intégration des incertitudes de mesure sur l'orientation des directions principales. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Iia* 320, 1037–1042

Hext G. R., 1963: The estimation of second-order tensors, with related tests and designs. *Biometrika* 50/3–4, 353–373

Itskov M., 2007: *Tensor algebra and tensor analysis for engineers. With applications to continuum mechanics*. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg

Jelinek V., 1978: Statistical processing of anisotropy of magnetic susceptibility measured on groups of specimens. *Studia Geoph. et Geod.* 22, 50–62

Jelinek V., 1988: *The statistical theory of measuring anisotropy of magnetic susceptibility of rocks and its application*. Geofizika, Brno

Roman S., 2005: *Advanced linear algebra*. 2nd ed., Springer

Sipos-Benkó K., Márton E., Fodor L., Pethe M., 2014: An integrated magnetic susceptibility anisotropy (AMS) and structural geological study on Cenozoic clay rich sediments from the Transdanubian Range. *Central European Geology* 57, közlésre elfogadva

Tauxe L., Kylstra N., Constable C., 1991: Bootstrap statistics for paleomagnetic data. *J. Geophys. Res.* 96, 11723–11740

Tauxe L., Constable C., Stokking L., Badgley C., 1990: Use of anisotropy to determine the origin of characteristic remanence in the Siwalik Red Beds of northern Pakistan. *J. Geophys. Res.* 95, 4391–4404

Timm N. H., 2002: *Applied multivariate analysis*. Springer

Wettl F., 2011: *Lineáris algebra*. BME TTK

metrikus, így (40) alapján elemeire a következő összefüggéseknek kell fennállniuk:

$$\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & p\hat{k}_{11} & q\hat{k}_{11} \\ p\hat{k}_{11} & p^2\hat{k}_{11} & pq\hat{k}_{11} \\ q\hat{k}_{11} & pq\hat{k}_{11} & q^2\hat{k}_{11} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

ahol \hat{k}_{11} a $\hat{\mathbf{k}}$ tenzor bal felső eleme. Így az eredeti forgási anizotrop \mathbf{k} tenzor elemei között a teljesülnie kell, hogy

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} + \lambda_{12} & p\hat{k}_{11} & q\hat{k}_{11} \\ p\hat{k}_{11} & p^2\hat{k}_{11} + \lambda_{12} & pq\hat{k}_{11} \\ q\hat{k}_{11} & pq\hat{k}_{11} & q^2\hat{k}_{11} + \lambda_{12} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Ismeretlenjeink: \hat{k}_{11} , λ_{12} , p és q . A $\hat{\mathbf{k}}$ tenzor k_{11} , k_{12} , k_{13} és k_{23} elemei az ismeretleneket egyértelműen meghatározzák ($p = k_{23}/k_{13}$, $q = k_{23}/k_{12}$, $\hat{k}_{11} = k_{12}/p$ és $\lambda_{12} = k_{11} - \hat{k}_{11}$). Ezek segítségével a következő nemlineáris összefüggések adódnak:

$$k_{22} = p^2\hat{k}_{11} + \lambda_{12} = k_{11} + \left(\frac{k_{23}}{k_{13}}\right)^2 k_{11} - \frac{k_{12}}{k_{23}} k_{13}, \quad (43)$$

$$k_{33} = q^2\hat{k}_{11} + \lambda_{12} = k_{11} + \left(\frac{k_{23}}{k_{12}}\right)^2 k_{11} - \frac{k_{12}}{k_{23}} k_{13}. \quad (44)$$