

A mágneses permeabilitás meghatározása inverzióval

PRÁCSER ERNŐ[@]

MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet, H-9400, Sopron, Csatka E. u. 6–8.

[@]E-mail: pracser@ggki.hu

Régebben a közegek mágneses permeabilitásának a vákuumétól esetlegesen eltérő értékét nem vették figyelembe a modellezések során. Most kísérletet teszünk a rétegparamétereknek – beleértve a mágneses permeabilitást is – egydimenziós modell inverziójával történő meghatározására. Megmutatjuk, hogy síkhullámú gerjesztés esetén az egy rétegre jellemző három paraméter (fajlagos ellenállás, vastagság és mágneses permeabilitás) közül nem határozható meg valamennyi. Megállapításainkat az előremodellezést meghatározó képletekre és a linearizált inverzió minőségét jellemző felbontóképesség mátrixára alapozzuk. Ezzel ellentétben a nem síkhullámú gerjesztés során lehetőség van egy réteg mindhárom paraméterének a számítására.

Prácsér, E.: Determination of magnetic permeability by inversion

In the past the value of the magnetic permeability of mediums, differing from the vacuum was not considered during the modeling. In this paper the determination of all layer parameters, including also the magnetic permeability is attempted by the inversion of a one dimensional model. It is shown that in case of plane wave excitation all of the three parameters (resistivity, thickness and magnetic permeability) characterizing a layer cannot be determined. Our statements are based on the forward modeling formulas and on the resolution matrix, qualifying the linearized inversion. Contrary to the plain-wave case, the determination of all the three parameters of a layer for the non-plane wave excitation is possible.

Beérkezett: 2011. január 11.; *elfogadva:* 2011. február 22.

Bevezetés

Korábban az elektromágneses módszerek matematikai modellezésekor a közegek mágneses permeabilitásának esetleges változását nem vették figyelembe. Azzal a feltételezéssel számoltak, hogy az megegyezik a vákuuméval. Annak ellenére, hogy a gyakorlatban ez többnyire elegendőnek bizonyult, az utóbbi időben felmerült annak az igénye, hogy a számítások vegyék figyelembe az anyag mágneses permeabilitását is, amely eltérhet a vákuumétól. Bizonyos kőzetek relatív mágneses permeabilitása 1 és 20 között változhat (Zhang, Oldenburg 1997). A mágneses permeabilitás változását okozhatja továbbá a nagyobb mélységekben a hőmérséklet megnövekedése is. A Curie-hőmérsékletnél az anyagok elvesztik permanens mágnesezettségüket, és ennek a hőmérsékletnek a közelében a Hopkinson-hatás az anyagok mágneses permeabilitásának a megnövekedését okozza (Kiss et al. 2005, Ádám 2008). A mágneses permeabilitás inverzióval történő meghatározásával Zhang és Oldenburg foglalkozott (1997) először arra az esetre, amikor az egydimenziós modellben ismert a vezetőképesség eloszlása. Az inverziót légi elektromágneses mérésekre alkalmazták. Zhang és Oldenburg egy következő munkája a vezetőképesség és a mágneses permeabilitás egy lépésben történő meghatározhatóságát elemezte (1999). A féltérlet felbontották

rögzített vastagságú rétegek sorozatára, és a rétegek vezetőképességét és mágneses permeabilitását határozták meg inverzióval. Ebben a cikkben az egydimenziós modellben vizsgáljuk a mágneses permeabilitás hatását az előremodellezésre és a hagyományos (linearizált), azaz nem az Occam-inverzióra. Kísérletet teszünk a mágneses permeabilitás inverzióval történő kiszámítására. Megmutatjuk, hogy síkhullámú gerjesztés esetén a három rétegparaméter (vezetőképesség, vastagság és mágneses permeabilitás) nem határozható meg egyértelműen. Ez az állítás matematikailag igazolható az előremodellező képletekkel, és ez összhangban van a linearizált inverzió felbontóképesség-mátrixával. A nem síkhullámú gerjesztés esetén viszont elméletileg lehetőség van az egydimenziós modell valamennyi rétegparaméterének a meghatározására. Ezt mágneses dipól gerjesztésű mérésekre mutatjuk meg, de a levont következtetések vonatkoznak más mesterséges gerjesztésű frekvenciaszondázásra és a tranziens elektromágneses mérésekre is.

A linearizált inverzió

A bemutatásra kerülő inverziós példák számításait iterációs elven működő linearizált inverzióval végeztük, amely a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásán alapul. A \mathcal{J} Jacobi-mátrix a mérési adatok modellparaméterek sze-

rinti parciális deriváltjait tartalmazza. A szinguláris értékek szerinti felbontást matematikai szempontból Jackson (1972) elemzi kimerítően, a geofizikai inverziók elméletét Tarantola (1987) tárgyalja átfogóan. A Jacobi-mátrix a következőképpen bontható fel:

$$\mathcal{J} = \mathcal{U}\Lambda\mathcal{V}^T, \quad (1)$$

ahol Λ a sajátértékeket tartalmazó átlós mátrix, az \mathcal{U} és \mathcal{V} mátrixok az adat- és a paraméterterbéli sajátvektorokat tartalmazzák. A T felső index a mátrix transzponáltját jelöli. A sajátvektorok ortogonalitása miatt az \mathcal{U} és \mathcal{V} mátrixokra teljesülnek az

$$\mathcal{U}^T\mathcal{U} = \mathcal{I} \quad \text{és a} \quad \mathcal{V}^T\mathcal{V} = \mathcal{I}$$

egyenlőségek, ahol az \mathcal{I} az egységmátrix, amelynek a dimenziója megegyezik a nem 0 sajátértékek számával. Ahány λ_j sajátérték különbözik 0-tól, annyi független modellparaméter határozható meg. Az iterációs lépés stabilitását a legnagyobb (λ_{\max}) és a legkisebb (λ_{\min}) sajátértékek hányadosa határozza meg. Az a kedvező, ha ez az arány a lehető legkisebb. A \mathcal{J} mátrix $m \times n$ méretű, m a mérési adatok, n a modellparaméterek száma. A Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásából képezhető az általánosított, azaz a Lánczos-inverz, amely meghatározza a modellparaméterek (\mathbf{p}) megváltozása és a mérési adatok (\mathbf{m}) megváltozása közötti kapcsolatot. Röviden tekintsük át a Lánczos-inverz levezetését! Az (1) képlet alapján az előremodellezés lineárizált változata

$$\Delta\mathbf{m} = \mathcal{U}\Lambda\mathcal{V}^T\Delta\mathbf{p}.$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet először \mathcal{U}^T -vel, majd Λ^{-1} -gyel

$$\Lambda^{-1}\mathcal{U}^T\Delta\mathbf{m} = \mathcal{V}^T\Delta\mathbf{p}.$$

\mathcal{V} -vel való szorzás után

$$\mathcal{V}\Lambda^{-1}\mathcal{U}^T\Delta\mathbf{m} = \mathcal{V}\mathcal{V}^T\Delta\mathbf{p}.$$

Ha feltételezzük, hogy a $\mathcal{V}\mathcal{V}^T$ mátrix az egységmátrix (Jackson 1972), akkor megkapjuk a linearizált inverzió Lánczos-inverzen alapuló képletét:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathcal{V}\Lambda^{-1}\mathcal{U}^T\Delta\mathbf{m}. \quad (2)$$

A $\Delta\mathbf{p}$ megadja, hogy az éppen aktuális modellparamétereket (\mathbf{p}) milyen mértékben kell módosítani annak érdekében, hogy az ahhoz tartozó előremodellezési adatok (\mathbf{m}) közelebb legyenek a mérési adatokhoz, azaz a két vektor különbségének az L_2 normája csökkenjen. A $\Delta\mathbf{m}$ a mérési adatvektor és a \mathbf{p} paramétervektorhoz tartozó elméleti adatvektor különbsége. A (2) képletben a Λ^{-1} átlós mátrix j -edik eleme $1/\lambda_j$. Ha λ_j kicsi, akkor a reciprokának a nagy értéke kedvezőtlenül hat az inverzió stabilitására. A gyakorlatban ezért $1/\lambda_j$ helyett ennek egy α csillapító tényezővel módosított változatát érdemes alkalmazni,

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \alpha}. \quad (3)$$

A bemutatott inverziós tesztek során viszonylag nagy α értékeket alkalmaztunk, mivel a fő cél nem az inverzió gyorsasága volt, hanem annak az elemzése, hogy mely rétegpáraméterek határozhatók meg. Ehhez pedig fontos volt az inverzió stabilitása, amelyet a viszonylag nagy α érték biztosított. Az előremodellezés egydimenziós esetben olyan gyors, hogy az inverziós kísérletek során néhány száz iteráció elvégzése is csak másodperceket vett igénybe.

Az inverzió által szolgáltatott modellparaméterek megbízhatóságát általában a korrelációs mátrixszal jellemzik. Ez megadja ugyan, hogy két különböző modellparaméter között milyen szoros az összefüggés, de az már nem derül ki belőle, hogy a paraméterek (esetleg kettőnél több) között milyen függvénnyel kifejezhető kapcsolat van. Ezért most a korrelációs mátrix helyett a felbontóképességi mátrixot fogjuk vizsgálni. A felbontóképességi mátrix a Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásában (1) szereplő \mathcal{V} mátrixból képezhető

$$\mathcal{R} = \mathcal{V}\mathcal{V}^T. \quad (4)$$

Ez a mátrix megadja, hogy a paraméterek mely lineáris kombinációi határozhatók meg, azaz (2) helyett valójában az

$$\mathcal{R}\Delta\mathbf{p} = \mathcal{V}\Lambda^{-1}\mathcal{U}^T\Delta\mathbf{m} \quad (5)$$

képlet érvényes, amint az a (2) képlet levezetéséből kiolvasható. Abban a kedvező esetben, ha \mathcal{R} az egységmátrix, akkor az azt jelenti, hogy a \mathbf{p} paramétervektor valamennyi eleme meghatározható. Ha az inverziós algoritmus már konvergált egy olyan modellhez, amelyhez kellően kicsi illeszkedési hiba tartozik, akkor a további iterációs lépések alkalmazásával $\mathcal{R}\Delta\mathbf{p} = 0$ -nak kell teljesülnie. Ha a felbontóképességi mátrix az egységmátrix, akkor ez azt jelenti, hogy a modellparaméterek már alig változnak. Viszont, ha eltér az egységmátrixtól, akkor a gyakorlati számítások során előfordulhat a modellparaméterek változása úgy, hogy a módosított paraméterekkel számított modellezési adatok is jól illeszkednek a mérési adatokhoz. Ebben az esetben a szintetikus adatokkal végzett kísérleteknél az is megtörténhet, hogy az iterációk sorozatát a pontos modellparaméterekkel indítjuk, és az iterációk során kapott modellparaméterek egyre távolabb kerülnek a helyes paraméterértékektől.

Magnetotellurikus mérések inverziója a mágneses permeabilitás figyelembe vételével

Első lépésként elemezzük az egydimenziós direkt feladat megoldására szolgáló rekurziós képletet arra az esetre, amikor a rétegek mágneses permeabilitása is változhat. A magnetotellurikában a mérések feldolgozásának az első lépése az impedancia frekvenciánkénti meghatározása

$$Z(\omega) = E_x(\omega)/H_y(\omega).$$

Az impedanciából, amely egydimenziós esetben egy komplex szám, látszólagos fajlagos ellenállás és fázis számítható, többnyire ezek képezik az inverziós algoritmusok bemenetét

1. táblázat | Modellparaméterek magnetotellurikus inverzióhoz, a) szintetikus adatok számításához, b) inverzió eredménye helyes paraméterekből kiindulva

a)				b)			
réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}	réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}
1.	100	1000	1	1.	90,98	909,82	1,01
2.	20	500	100	2.	30,10	752,84	66,04
3.	100		1	3.	100,01		1,00

$$\rho_a(\omega) = \frac{|Z_1(\omega)|^2}{\omega\mu_1}, \quad \Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}Z_1(\omega)}{\text{Re}Z_1(\omega)}\right).$$

Az 1-es index itt azt jelenti, hogy a képletek az első réteg felszínén érvényesek. ω jelöli a körfrekvenciát, μ a mágneses permeabilitást. A síkhullámú gerjesztésnél feltételezzük, hogy az (x, y, z) koordináta-rendszerben az elektromos tér x , a mágneses térerősség y tengely irányú. Az impedanciát egy, a rétegekre vonatkozó rekurziós képlettel lehet kiszámítani az n -edik réteg impedanciájából kiindulva, ahol n a rétegek száma

$$Z_n(\omega) = i\omega\mu_n/\gamma_n,$$

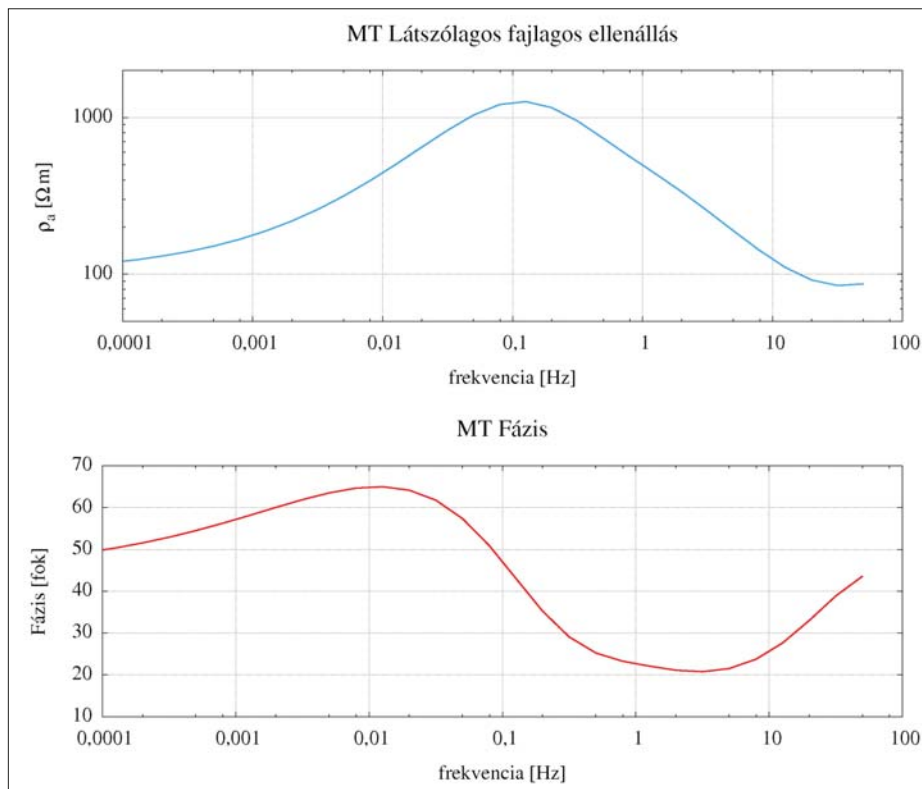
ahol $\gamma_j = \sqrt{i\omega\mu_j\sigma_j}$, σ_j a j -edik réteg vezetőképessége, μ_j a j -edik réteg mágneses permeabilitása,

$$Z_j(\omega) = \frac{i\omega\mu_j}{\gamma_j} \times \frac{(\gamma_j/i\omega\mu_j)Z_{j+1}(\omega) \coth(\gamma_j d_j) + 1}{(\gamma_j/i\omega\mu_j)Z_{j+1}(\omega) + \coth(\gamma_j d_j)}, \quad (6)$$

ahol d_j a j -edik réteg vastagsága. A (6) rekurziós képletet először Wait (1953) vezette le. Ennek most egy másik, tömörebb változatát elemezzük. Megemlítjük ugyanakkor, hogy számítástechnikai szempontból a rekurziós képleteknek az a változata kezelhető jobban, amelyiknél hiperbolikus függvények helyett exponenciális függvények szerepelnek

$$Z_j(\omega) = \frac{i\omega\mu_j}{\gamma_j} \coth\left(\gamma_j d_j + \coth^{-1}\left(\frac{\gamma_j}{i\omega\mu_j}\right)Z_{j+1}(\omega)\right). \quad (7)$$

A (7) képlet alapján megállapíthatjuk, hogy ha egy adott rétegben a három rétegparaméter (σ_j , d_j , μ_j) úgy változik, hogy a $\gamma_j d_j$ és a γ_j/μ_j mennyiségek nem változnak, akkor a



1. ábra | Magnetotellurikus görbék az ekvivalenciavizsgálathoz

Figure 1 | Magnetotelluric curves to the investigation of equivalence

rekurzió megfelelő iterációs lépése sem változik. Azok a modellek tehát, amelyekben egy adott j -edik rétegre $\gamma_j d_j$ és γ_j/μ_j megegyeznek, ekvivalensek, ezért az inverziótól sem várhatjuk el, hogy egyértelműen és egyenként határozza meg a σ_j , d_j és μ_j rétegpárparamétereket. Olyan szintetikus adatokkal vizsgáljuk az inverzió tulajdonságait, hogy az inverziót jellemző tulajdonságok, az ekvivalencia a lehető legjobban felismerhetők legyenek. Az 1. táblázat a) modellparamétereivel végzett számítás eredményei az 1. ábrán láthatók.

A táblázatban μ_{rel} a relatív mágneses permeabilitásra utal. A mágneses permeabilitás ilyen mértékű megnövekedése a Curie-hőmérséklet közelében képzelhető el, pl. magnetit esetében. Ennek a természetben előforduló mértéke a szakirodalomban vitatott (Ádám 2008), bár elméletileg végtelen nagy is lehet. Ebben a cikkben a mágneses permeabilitás meghatározhatóságát matematikai szempontból vizsgáljuk, így a százszoros megnövekedés kiválasztásának a tesztmodelleknél nincs különösebb jelentősége. Annak ellenére, hogy a második réteg fajlagos ellenállása ötöde az első és a harmadik réteg fajlagos ellenállásának, a réteg relatív mágneses permeabilitásának a százszoros megnövekedése azt eredményezi, hogy a látszólagos fajlagos ellenállás görbéjén egy olyan hatás jelentkezik, mintha a második rétegnek nagyobb lenne a fajlagos ellenállása. Az inverzió jellemzőit az ezekkel a modellparaméterekkel számított magneto-

tellurikus látszólagos fajlagosellenállás- és fázisértékek felhasználásával elemezzük. Ennél a példánál nem az volt a fő cél, amely az inverziók vizsgálatánál szokásos, hogy az inverzió miként adja vissza a helyes modellparamétereket, hanem csak az, hogy az 1. táblázatban szereplő a) értékekkel meghatározott modellnek matematikai szempontból milyen tulajdonságai vannak. Ezért egyetlen iterációs lépést számítottunk a helyes modellparaméterekből kiindulva annak érdekében, hogy megkapjuk a Jacobi-mátrixot. A Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásához tartozó sajátértékek, amelyek alapján a modell legfontosabb jellemzőire következtethetünk:

$$\lambda_1 = 5,80279, \lambda_2 = 4,83254, \lambda_3 = 3,30359, \lambda_4 = 1,54804, \\ \lambda_5 = 0,54088, \lambda_6 = 0,00136, \lambda_7 = 0,00108, \lambda_8 = 0,00001.$$

Látható, hogy valójában 5 λ sajátérték különbözik 0-tól. A további három sajátértéknél nyilvánvalóan a számítástechnikai pontatlanság miatt jelenik meg egy elhanyagolhatóan kis érték. A Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásából számítható a felbontóképességi mátrix (4). Abban az esetben, ha az inverzióval nem határozható meg külön-külön valamennyi rétegpárparaméter, akkor ez a mátrix megadja, hogy a rétegpárparamétereknek mely lineáris kombinációi határozhatók meg

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,00 & 0,00 & -0,33 & 0,00 & 0,33 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,67 & 0,00 & 0,00 & -0,33 & 0,00 & 0,33 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,50 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,50 \\ -0,33 & 0,00 & 0,00 & 0,67 & 0,00 & 0,33 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -0,33 & 0,00 & 0,00 & 0,67 & 0,00 & 0,33 & 0,00 \\ 0,33 & 0,00 & 0,00 & 0,33 & 0,00 & 0,67 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,33 & 0,00 & 0,00 & 0,33 & 0,00 & 0,67 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,50 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{matrix} \quad (8)$$

A (8) mátrixból látható, hogy az ugyanahhoz a réteghez tartozó modellparaméterek vannak szoros kapcsolatban. Vegyük figyelembe, hogy az inverziós algoritmus a modellparaméterek logaritmusával számol. Feltételezve, hogy az iterációs lépést egy jó illeszkedést biztosító modellen véghezvük, $j < n$ -re a j -edik réteg esetén egy iterációs lépés alkalmával a felbontóképesség mátrix j -edik sora azt jelenti, hogy a

$$(2/3) \Delta \log \rho_j - (1/3) \Delta \log d_j + (1/3) \Delta \log \mu_j = 0 \quad (9)$$

egyenlőség érvényes. A (9) egyenlet jobb oldalán azért szerepel 0, mert az (5) képletben $\Delta \mathbf{m}$ -et 0-nak vehetjük a feltételezett jó illeszkedés miatt. ρ_j itt a fajlagos ellenállást, a σ_j reciprokát jelenti. A $(j+n)$ -edik sor pedig a

$$-(1/3) \Delta \log \rho_j + (2/3) \Delta \log d_j + (1/3) \Delta \log \mu_j = 0 \quad (10)$$

egyenlőség teljesülését jelenti. Az \mathcal{R} mátrix $(j+2n-1)$ -edik sora a j -edik sor és a $(j+n)$ -edik sor összege, azaz a felbontóképességi mátrix egy rétegre vonatkozó három sora közül csak kettő független. Most megmutatjuk, hogy a (9) és a (10) képletek ekvivalensek azzal, hogy a direkt felada-

tot meghatározó rekurziós képletben $\gamma_j d_j$ és γ_j/μ_j azonos-sága esetén ugyanazt a modellezési eredményt kapjuk. Az inverzió k -edik iterációs lépése során érvényesek a

$$\rho_j^{(k+1)} = \rho_j^{(k)} \exp\{\Delta \log \rho_j^{(k)}\}, \quad (11)$$

$$d_j^{(k+1)} = d_j^{(k)} \exp\{\Delta \log d_j^{(k)}\}, \quad (12)$$

$$\mu_j^{(k+1)} = \mu_j^{(k)} \exp\{\Delta \log \mu_j^{(k)}\} \quad (13)$$

képletek. A $\Delta \log \rho_j^{(k)}$, a $\Delta \log d_j^{(k)}$ és a $\Delta \log \mu_j^{(k)}$ mennyiségeket a (2) képlet határozza meg mint a $\Delta \mathbf{p}$ vektor komponenseit. A k felső index az iteráció sorszámát jelenti. Vizsgáljuk meg, hogy a $\Delta \log \rho_j^{(k)}$, a $\Delta \log d_j^{(k)}$ és a $\Delta \log \mu_j^{(k)}$ értékekre milyen feltétel adódik, ha elvárjuk a

$$\gamma_j^{(k)} d_j^{(k)} = \gamma_j^{(k+1)} d_j^{(k+1)}$$

egyenlőség teljesülését! γ_j -nek ρ_j -vel felírt alakját felhasználva és $\sqrt{i\omega}$ -val egyszerűsítve a

$$\sqrt{\frac{\mu_j^{(k)} \exp\{\Delta \log \mu_j^{(k)}\}}{\rho_j^{(k)} \exp\{\Delta \log \rho_j^{(k)}\}}} d_j^{(k)} \exp\{\Delta \log d_j^{(k)}\} = \sqrt{\frac{\mu_j^{(k)}}{\rho_j^{(k)}}} d_j^{(k)} \quad (14)$$

2. táblázat | Modellparaméterek a magnetotellurikus adatok inverziójához, a) szintetikus adatok generálásához, b) a hagyományos MT inverzió eredménye, c) kezdeti modell a μ -t is figyelembe vevő inverzióhoz, d) a μ -t is figyelembe vevő inverzió eredménye

a)				b)			
réteg	ρ [Ω m]	d [m]	μ_{rel}	réteg	ρ [Ω m]	d [m]	μ_{rel}
1.	100	9000	1	1.	100,0	9000,1	
2.	100	500	100	2.	10000,9	50000,1	
3.	100		1	3.	100,0		
c)				d)			
réteg	ρ [Ω m]	d [m]	μ_{rel}	réteg	ρ [Ω m]	d [m]	μ_{rel}
1.	200	6000	1	1.	46,84	4215,72	2,1348
2.	200	1000	1	2.	739,43	3704,13	13,4989
3.	200		1	3.	141,46		0,7069

egyenlőséget kapjuk. Ebből adódik, hogy teljesülnie kell a

$$-(1/2) \Delta \log \rho_j + \Delta \log d_j + (1/2) \Delta \log \mu_j = 0 \quad (15)$$

egyenlőségnek, ahol már elhagytuk az iteráció sorszámát jelölő k -t. Ha ezt megszorozzuk (2/3)-dal, akkor éppen a felbontóképességi mátrix ($j + n$)-edik sorát kapjuk. Tekintsük most a rekurziós előremodellező képlet egy másik fontos mennyiségét, a γ_j/μ_j hányadost! (11), (12) és (13) alkalmazásával hasonlóan a $\gamma_j d_j$ mennyiséghez levezethető, hogy

$$\frac{\gamma_j^{(k)}}{\mu_j^{(k)}} = \frac{\gamma_j^{(k+1)}}{\mu_j^{(k+1)}}$$

akkor teljesül, ha

$$\Delta \log \rho_j + \Delta \log \mu_j = 0. \quad (16)$$

Ha (16) (1/2)-éből kivonjuk (15) (1/3)-át, akkor megkapjuk a felbontóképességi mátrix j -edik sorát (9). Az n -edik réteg esetében, ahol a rétegvastagság már nem játszik szerepet, a

$$\frac{\gamma_j^{(k)}}{\mu_j^{(k)}} = \frac{\gamma_j^{(k+1)}}{\mu_j^{(k+1)}}$$

feltételből közvetlenül következik a felbontóképességi mátrix n -edik és $(3n - 1)$ -edik sora

$$(1/2) \Delta \log \rho_n + (1/2) \Delta \log \mu_n = 0.$$

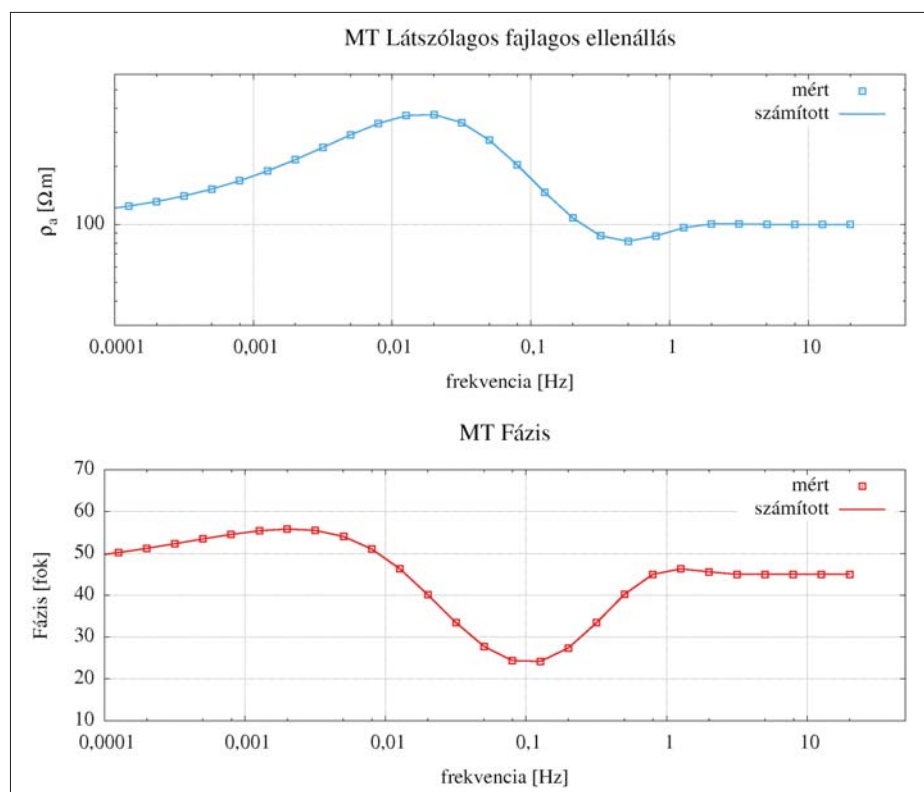
Ezzel a példával megmutattuk, hogy a rekurziós előremodellező képlet elemzése az ekvivalencia szempontjából ugyanazt az információt adja, mint a linearizált inverzió felbontóképességi mátrixa. Az eddig tett megállapítások alapján az sem zárható ki, hogy ha az inverziót a helyes rétegpáraméterekkel indítjuk, az iterációs lépések során az egyes rétegpáraméterek változnak, a helyes modellpáraméterektől egyre távolabb kerülnek úgy, hogy a $\gamma_j d_j$ és a γ_j/μ_j mennyiségek változatlanok maradnak. A mérési adatok és a modellhez tartozó számított adatok eltérése viszont a számítástechnikai hibahatáron belül marad. Erre láthatunk egy példát az 1. táblázat b) modellpáramétereivel. Ezeket a rétegpáramétereket a helyes modellből kiindulva kaptuk 200 iterációs lépés után. A modellpáraméterek lassú eltávolodásának va-

lószerűleg az is az oka, hogy az inverzióban kis értékekkel ugyan, de azok a sajátértékek is szerepet kapnak, amelyeknek elméletileg 0-nak kellene lenniük. A paramétereknek ez a típusú megváltozása összhangban van a paraméterekre vonatkozó, a felbontóképességi mátrix által meghatározott összefüggésekkel is.

A következőekben elemezendő modell esetében elsősorban a mágneses permeabilitás nagyobb mélységben előforduló megváltozásával foglalkozunk. A modell három rétegének megegyezik a vezetőképessége. A szintetikus adatok számításához alkalmazott modellpáramétereket a 2. táblázat a) adatai tartalmazzák.

Először a hagyományos, azaz a mágneses permeabilitással nem számoló inverziót alkalmazzuk, azaz az inverzió során azt feltételezzük, hogy mindegyik réteg mágneses permeabilitása a vákuuméval egyezik meg annak ellenére, hogy a szintetikus adatok számításához használt modell esetében a második réteg mágneses permeabilitása a vákuuménak 100-szorosa. Az inverzió a 2. táblázat b) rétegpáramétereit adja eredményül. Az illeszkedés ebben az esetben tökéletes (2. ábra), pedig a második réteg fajlagos ellenállása 100-szorosára növekedett, tehát a mágneses permeabilitás hatásának a figyelmen kívül hagyása, amint az várható is volt, teljesen eltorzította a modellt. A következő kísérlet a mágneses permeabilitást is figyelembe vevő inverzió. Tekintettel arra, hogy ez az inverzió nagymértékben függ a kezdeti modelltől, megadjuk annak a paramétereit is (2. táblázat, c) paraméterek). Az inverzió eredményét a 2. táblázat d) paramétereit tartalmazzák.

Összhangban azzal a (7) képlet elemzésekor tett megállapításunkkal, hogy a síkhullámú gerjesztés esetén nem határozható meg a rétegezett modell valamennyi paramétere, a kapott modell meglehetősen távol van a szintetikus adatok generálására szolgáló modelltől. A szintetikus mérési adatok és az inverziós modellhez tartozó számított adatok illeszkedése viszont itt is tökéletes, megfelel a 2. ábrának. A 2. táblázat d) modelljéhez tartozó sajátértékek:



2. ábra | A 2. táblázat b) és d) paramétereivel számított MT inverziós görbék illeszkedése

Figure 2 | The fit of MT inversion curves calculated with the b) and d) parameters of Table 2

$$\lambda_1 = 6,33228, \lambda_2 = 4,41243, \lambda_3 = 3,57432, \lambda_4 = 2,35852, \\ \lambda_5 = 0,01114, \lambda_6 = 0,00289, \lambda_7 = 0,00001, \lambda_8 = 0,00001.$$

Ezeknél a sajátértékeknél a legfeltűnőbb a λ_5 sajátérték viszonylag kis értéke. Mivel az előzőekben azt állítottuk, hogy háromréteges modell esetén 5 sajátérték különbözhet 0-tól, a λ_5 kis értéke magyarázatra szorul. A kapott modell első rétegének fajlagos ellenállása lényegesen kisebb, mint a második rétegé, így egy árnyékoló hatás érvényesül. Ezért a magnetotellurikus adatok a viszonylag rosszul vezető második réteg fajlagos ellenállásának a megváltozására csak kis mértékben lesznek érzékenyek, ennek megfelelően a megbízhatóan meghatározható rétegpármeterek száma 4-re csökkent.

Abban az esetben, amikor az inverziót az elvárt rétegpármeterekkel indítjuk, a rétegpármeterek fokozatosan, de

egyre távolabb kerülnek a helyes rétegpármeterektől. A modellpármetereket a 3. táblázat a) adatai tartalmazzák 200 iteráció után. Ezeket a rétegpármetereket érdemes összevetni az 1. táblázat b) rétegpármetereivel. A lényegesen vastagabb első réteg azt eredményezte, hogy az ekvivalenciafeltételek teljesülése mellett lényegében csak az első réteg pármeterei változtak, míg az 1. táblázat b) esetében a második réteg pármeterei is változtak. Tétélezzük fel most, hogy a réteghatárookra vonatkozólag vannak előzetes információink, és végezzük el az inverziót úgy, hogy a rétegvastagságokat megadjuk, és nem engedjük meg, hogy az inverziós algoritmus változtassa azokat! Az így kapott inverziós pármetereket a 3. táblázat b) adatai adják. Az első és a második réteg fajlagos ellenállását és mágneses permeabilitását helyesen megkaptuk, a harmadik réteghez tartozó γ_3/μ_3 érték megegyezik a szintetikus adatok számí-

3. táblázat | Inverziós eredmények a 2. táblázat a) modellpármetereivel számolt szintetikus adatokkal, a) a helyes rétegpármeterekből kiindulva, b) a rétegvastagságok rögzítésével

a)				b)			
réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}	réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}
1.	87,37	7593,18	1,1853	1.	100,01	9000,00	0,9999
2.	100,05	499,96	100,0080	2.	99,74	500,00	100,0040
3.	100,01		1,0000	3.	141,44		0,7070

tásához használt modellhez tartozó γ_3/μ_3 -mal, azaz, összhangban az előzőekben tett megállapításunkkal, az inverzió ezt a mennyiséget csak kismértékben változtatta.

Egydimenziós inverzió nem síkhullámú gerjesztésnél

Az egyszerűség kedvéért foglalkozunk a mágneses dipól gerjesztésű mérésekkel! A mért mennyiséget meghatározó képletek ugyanis ebben az esetben állnak a legközelebb a magnetotellurikus esethez. A függőleges mágneses dipól függőleges mágneses terét meghatározó képlet egy Hankel-transzformáció típusú integrál

$$H_z(\omega) = \frac{IS}{4\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \lambda^2 e^{-\lambda(z+h)} [1 + R_0(\lambda)] d\lambda, \quad (17)$$

ahol J_0 az elsőfajú, nulladrendű Bessel-függvény, IS a mágneses dipól momentuma, r az adó–vevő távolság, h és z az adó, illetve a vevő magassága. Az integrál jobb konvergenciájának az érdekében egy kis h vagy z érték megadása még a felszínen levő mérési rendszer esetén is célszerű. A rétegpárparaméterektől függő $R_0(\lambda)$ magfüggvény rekurzióval határozható meg. A rekurzióknak többféle, ekvivalens változata létezik, most egy olyat választunk, amelyik a legjobban hasonlít a magnetotellurikus esetre (7):

$$1 + R_0(\lambda) = 2\lambda \left[\lambda + \frac{\lambda_1 \mu_0}{S_1(\lambda) \mu_1} \right]^{-1}. \quad (18)$$

A rekurziót az $S_0(\lambda)$ függvényre írjuk fel:

$$S_j(\lambda) = \coth \left(\lambda_j d_j + \coth^{-1} \left(\frac{\lambda_j \mu_{j+1}}{\lambda_{j+1} \mu_j} S_{j+1}(\lambda) \right) \right). \quad (19)$$

Ez a rekurzió formailag hasonlít a magnetotellurikus (7) képletre. A (19) képlet ugyanolyan, mint amelyet Kaufman (1994) könyvében közöl, azzal az eltéréssel, hogy ott a μ mágneses permeabilitás mindegyik rétegben ugyanaz. A (7) és (19) között a legfontosabb eltérés az, hogy (19)-ben γ_j helyett a $\lambda_j = [\lambda^2 + \gamma_j^2]^{1/2}$ érték szerepel. Mivel λ értéke a

$(0, \infty)$ intervallumban bármely értéket felvesz, nem végezhető el azok az egyszerűsítések, amelyek a síkhullámú esetben megtehetőek, ezért nem lehet egyszerű ekvivalenciakifejezéseket megadni a rétegpárparaméterekre (ρ_j, d_j, μ_j) vonatkozólag. Ezért remény van arra, hogy az egydimenziós inverzióval valamennyi rétegpárparaméter meghatározható. A szintetikus adatok generálásához tételezzük fel, hogy az adó egy függőleges mágneses dipól, és attól r távolságra mérjük a mágneses térerősség függőleges komponensének a képzetes részét, $\text{Im}(H_z(\omega))$ -t különböző frekvenciájú gerjesztésekkel. A modellparaméterek ugyanazok, mint az első magnetotellurikus példánál (4. táblázat, a) paraméterek).

Először egy szintetikus adatokon végzett olyan inverziót tekintünk, ahol csak egyetlen $r = 2500$ m adó–vevő távolsággal végeztünk frekvenciaszondázást. Az inverzió kezdeti modelljét a 4. táblázat b) adatai tartalmazzák. Az inverzió eredményeként kapott c) modellparamétereket a 4. táblázat tartalmazza 200 iteráció után. A táblázat alapján megállapítható, hogy az inverzió lassan ugyan, de a megfelelő modellparaméterekhez konvergál. Ez lényeges különbség a síkhullámú esethez képest, mivel ott a helyes rétegpárparaméterekkel indítva az inverziót a paraméterek lassan távolodnak a helyes értékektől. Az $\text{Im}(H_z(\omega))$ illeszkedése a 3. ábrán látható. Az ábrával kapcsolatban azt kell megjegyezni, hogy az adatok a vákuumbeli értékre normálva vannak, és a függőleges tengely nem logaritmikus, mivel az ábrázolt mennyiségek 0-hoz közeli értékeket is felvehetnek. Az egy r értékkel végzett méréseken alapuló inverzió is megmutatja, hogy a nem síkhullámú gerjesztés a nyolc rétegpárparaméter meghatározhatóságának szempontjából lényegesen kedvezőbb, mint a magnetotellurikus módszer.

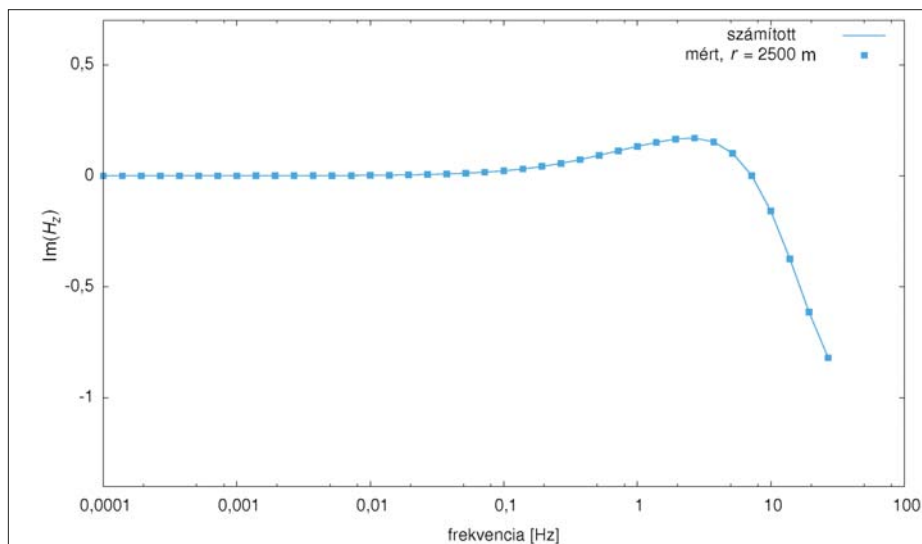
Az 5. táblázat 2. oszlopa tartalmazza az $r = 2500$ m értékkel végzett mérések inverziójához tartozó sajátértékeket. A sajátértékek itt is csökkennek, de az a fajta ugrásszerű csökkenés, amely a magnetotellurikus esetet jellemezte az 5. sajátérték után itt nem jelentkezik.

A következő kísérlet a két adó–vevő távolsággal ($r = 2500$ m és $r = 4000$ m) mért szintetikus adatokon elvégzett inverzió. A szintetikus adatok generálására szolgáló modell

4. táblázat | Modellparaméterek mágneses dipól gerjesztésű mérések inverziójához, a) generáló modell, b) kezdeti modell, c) az inverzió eredménye $r = 2500$ m-rel végzett méréseknél

a)				b)			
réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}	réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}
1.	100	1000	1	1.	120,0	1500,0	1,0
2.	20	500	100	2.	40,0	400,0	50,0
3.	100		1	3.	120,0		1,0

c)			
réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}
1.	101,58	1005,21	1,024
2.	27,59	678,05	73,342
3.	109,59		1,071



3. ábra | A mért és számított értékek ($\text{Im}H_z(\omega)$) illeszkedése mágneses dipól gerjesztésű mérésre egy adó–vevő távolsággal
Figure 3 | The fit of the calculated and measured values ($\text{Im}H_z(\omega)$) for measurement with magnetic dipole excitation with one transmitter–receiver separation

5. táblázat | Az inverzió sajátértékei mágnesesdipól-gerjesztés esetén az adó vevő távolságok számának függvényében

Index	1 db r érték	2 db r érték	7 db r érték
1	412,75113	415,04578	415,25110
2	1,47099	10,21085	25,81511
3	1,52276	4,90454	12,59127
4	0,54295	2,51982	10,72603
5	0,36770	0,99047	3,06328
6	0,12302	0,64518	2,18058
7	0,03319	0,11472	0,61311
8	0,01101	0,02529	0,10704

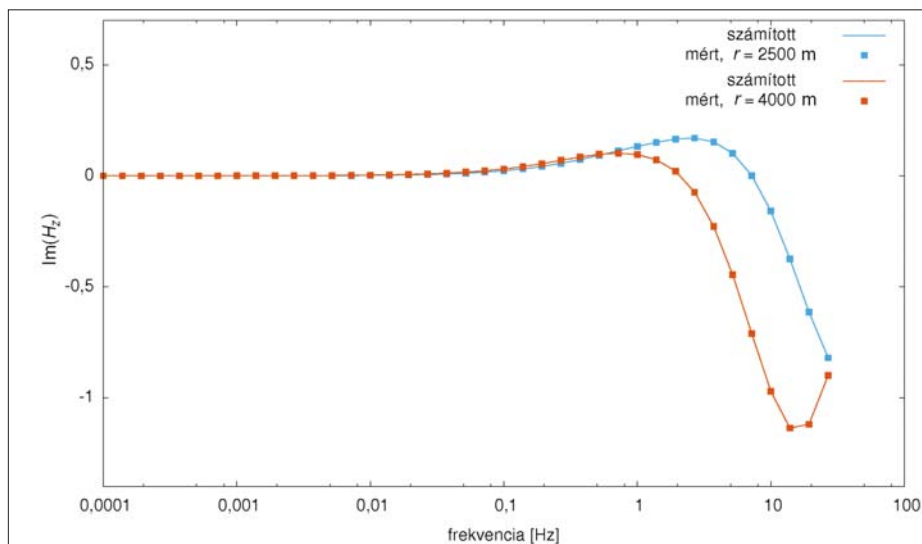
és az inverzió kezdeti modellje ugyanaz, mint az előző példánál (4. táblázat, a) és b) paraméterek). A 200 iterációs lépés után kapott inverziós modellparamétereket a 6. táblázat a) adatai mutatják. Ezek egyértelműen közelebb vannak az eredeti paraméterekhez, mint a 4. táblázat c) paraméterei. A mérési és a modellhez tartozó számított adatok a 4. ábrán láthatók. A modellhez tartozó sajátértékek az 5. táblázat

harmadik oszlopában szerepelnek. A javulás az egy r távolsággal végzett méréssel szemben nyilvánvaló, a legkisebb sajátértékek nagyobb értéket vettek fel.

Végül szintetikus adatokkal arra az inverzióra is mutatunk példát, amikor 7 db különböző adó–vevő távolsággal mérünk ($r = 2500$ m, 3000 m, 3500 m, 4000 m, 4500 m, 5000 m, 5500 m). Az inverzió eredményeként kapott modell paramétereit a 6. táblázat b) adatai tartalmazzák. Az iterációk száma most is 200 volt, de meg kell jegyezni, hogy szemben a két előző példával a rétegparaméterek már a 100-adik iteráció után elérték a táblázatban szereplő értékeket, és ezután lényegében nem változtak. Az inverzió sajátértékei az 5. táblázat 4. oszlopában láthatók. Látszik, hogy a sajátértékek nagysága a 7 különböző adó–vevő távolsággal végzett mérések esetén, amint az várható is volt, itt a legkedvezőbb. A mágneses dipól gerjesztésű mérések inverziójához tartozó sajátértékek esetében egy másik fontos eltérés a síkhullámú esethez képest az, hogy az első sajátérték lényegesen nagyobb, mint a többi. Ennek nyilvánvalóan az az oka, hogy az adó közvetlenül a felszínen van, ezért az első réteg mérési adatokra gyakorolt hatása lényegesen felülmúlja a többi réteg hatását.

6. táblázat | Inverziós eredmények, a) 2 adó–vevő távolsággal, b) 7 adó–vevő távolsággal

a)				b)			
réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}	réteg	ρ [Ωm]	d [m]	μ_{rel}
1.	100,041	1000,144	1,0006	1.	100,021	1000,112	1,0003
2.	20,270	506,521	98,7344	2.	20,089	502,010	99,5849
3.	100,125		1,0012	3.	100,082		1,0007



4. ábra | Mágneses dipól gerjesztésű mérések inverziós görbéinek az illeszkedése 2 adó–vevő távolsággal
Figure 4 | The fit of inversion curves of measurements by magnetic dipole excitation with 2 transmitter–receiver separations

A sajátértékek és az inverziós modellparaméterek értékei a mágnesesdipól-gerjesztésnél egyértelműen kedvezőbbek, mint a síkhullámú gerjesztésnél. A magnetotellurikus esethez képest az 5. és 6. sajátérték aránya a mágnesesdipól-gerjesztés mellett lényegesen jobb. A magnetotellurika esetén $\lambda_5/\lambda_6 = 397,7$, amely két nagyságrenddel nagyobb, mint a mágnesesdipól-gerjesztéshez tartozó $\lambda_5/\lambda_6 = 1,405$. Az eddigi példák alapján megállapítottuk, hogy mágnesdipól-gerjesztéssel a háromréteges modellnek mind a nyolc ré-

tegaparamétere meghatározható, és a legkisebb sajátértékek a síkhullámú gerjesztéstől eltérően nem csak számítástechnikai pontatlanságként jelennek meg. Ennek ellenére a kis értékű sajátértékeknek is van információtartalmuk. Hagyjuk el például a legkisebb, nyolcadik sajátértéket, és számítsuk ki a felbontóképesség mátrixot 7 sajátérték felhasználásával, amiből megállapítható, hogy az inverzió által meghatározott paraméterekre milyen bizonytalanság jellemző

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,66 & -0,01 & 0,00 & -0,34 & 0,00 & 0,33 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,01 & 0,00 & 1,00 & 0,01 & 0,00 & -0,01 & 0,00 \\ 0,00 & -0,34 & 0,00 & 0,01 & 0,66 & 0,00 & 0,33 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,33 & 0,00 & -0,01 & 0,33 & 0,00 & 0,69 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{matrix} \quad (20)$$

Ebből a mátrixból a második réteg paramétereire (ρ_2, d_2, μ_2) ugyanolyan ekvivalenciatulajdonságok állapíthatók meg, mint a síkhullámú esetben. Ismét kihangsúlyozzuk a különbséget, azaz itt a nyolcadik sajátérték kicsi ugyan, de 0-tól egyértelműen különbözik. Ha ezt a legkisebb sajátértéket is figyelembe vesszük a sajátérték számításakor, akkor az egységmátrixot kapjuk, ami azt jelenti, hogy valamennyi rétegaparaméter meghatározható. A megállapításaink szintetikus, zajmentes adatokra vonatkoznak, zajjal terhelt adatok esetében már elképzelhető, hogy nem oldható fel a modelleknek ez a típusú ekvivalenciája. A (20) mátrixszal jellemzett ekvivalencia gyakran előfordul frekvenciaszondázásoknál és tranziens elektromágneses méréseknél, amikor egy viszonylag vékony, de a környezetéhez

képest jól vezető rétegről van szó. Szintetikus adatokon végzett inverzióval megmutatható, hogy azokra a mérésekre is jellemző, hogy a jól vezető, vékony rétegek paramétereire (σ_j, d_j) csak rendkívül lassú konvergenciával határozható meg.

Összefoglalás

Szintetikus adatokkal megmutattuk, hogy síkhullámú gerjesztés esetén a felbontóképességi mátrix megadja, hogy mely rétegaparaméterek között van lineáris kapcsolat. Ez az információ teljesen ekvivalens az előremodellező képlet rekurziós formulájából adódó összefüggésekkel. Más szóval, ha az egydimenziós modell esetében a mágneses permea-

bilitás hatásával is számolunk, a magnetotellurikus inverzió nem oldható meg egyértelműen. A nem síkhullámú gerjesztés esetére a képletek alapján nem lehet a síkhullámú gerjesztéshez hasonlóan bizonyítani az ekvivalenciát. Ezért itt az inverziós algoritmus Jacobi-mátrixának a szinguláris értékek szerinti felbontásából adódó sajátértékei és a felbontóképességi mátrix tulajdonságai alapján vonjuk le azt a következtetést, hogy elméletileg lehetséges mindegyik rétegparaméter meghatározása. Fontos különbség továbbá a kétféle gerjesztés között, hogy síkhullámú gerjesztésnél az inverzió a helyes rétegparaméterekkel indítva sem bizonyult stabilnak, míg a mágnesesdipól-gerjesztés esetén az inverzió a helyes értékekhez közeli rétegparaméterekkel indítva a helyeshez egyre közelebbi értékeket adott, bár a konvergencia meglehetősen lassú volt.

Köszönetnyilvánítás

A cikkben ismertetett inverziós vizsgálatok az OTKA 68475 projekt keretében készültek.

Hivatkozások

- Ádám A., 2008: Keressük a Hopkinson-hatást, azaz a Curie hőmérséklet közelében történő jelentős szuszceptibilitás-növekedést a Pannon-medencében. *Magyar Geofizika* 49, 68–74
- Jackson D. D., 1972: Interpretation of Inaccurate, Insufficient and Inconsistent Data. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 28, 97–109
- Kaufman A. A., 1994: *Geophysical Field Theory and Method. Part C, Electromagnetic Fields II.* Academic Press, Inc.
- Kiss J., Szarka L., Prácsér E., 2005: Second-order magnetic phase transition in the Earth, *Geophys. Res. Lett.* 32, L24310
- Tarantola A., 1987: *Inverse Problem Theory.* Elsevier, Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo
- Wait J. R., 1953: Induction by a horizontal oscillating magnetic dipole over a conductive homogeneous earth. *Trans. Am. Geophys. Union* 34, 185–188
- Zhang Z., Oldenburg D. W., 1997: Recovering magnetic susceptibility from electromagnetic data over one-dimensional earth. *Geophys. J. Int.* 130, 422–434
- Zhang Z., Oldenburg D. W., 1999: Simultaneous reconstruction of 1-D susceptibility and conductivity from electromagnetic data. *Geophysics* 64/1, 33–47