

# Sorfejtéses inverzió – Fourier-transzformáció mint inverz feladat<sup>1</sup>

VASS PÉTER<sup>2</sup>, DOBRÓKA MIHÁLY<sup>2,3</sup>

*Az időtartományban mért jelek frekvenciatartománybeli feldolgozásának alapját a Fourier-transzformáció képezi. Ennek számítógépen megvalósítható speciális esete, a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) széles körben alkalmazott eljárás, ám az eredményeinek felhasználásakor figyelembe kell venni, hogy a mérési zajokra nagyon érzékenyen reagál. A Fourier-transzformációt inverziós feladatként értelmezve, a zajokkal szemben rezisztens viselkedést biztosító módszert dolgoztunk ki. Az eljárás alapja a komplex spektrum sorfejtéses diszkrétizációja, amelynek együtthatóit túlhatározott inverz feladat keretében határozzuk meg. Bemutatjuk az Hermite függvényrendszerrel diszkrétizált frekvenciaspektrum meghatározására szolgáló inverz Fourier-transzformáció két algoritmusát. A legkisebb négyzetek elve szerinti Fourier-transzformáció (LSQ-FT) Gauss-eloszlást követő zaj jelenlétekor, az iteratív újraszámítás elve szerinti Fourier-transzformáció (IRLS-FT) pedig kiugró hibaértékek fellépésekor mutat figyelemre méltó zajcsökkentő hatást, amit az általunk elvégzett vizsgálatok eredményei szemléltetnek.*

**P. VASS, M. DOBRÓKA: Series expansion based inversion – Fourier transform as an inverse problem**

*Fourier transform plays a determining role in geophysical data processing. In computer applications the discrete Fourier transform (DFT) is extensively used. The Fourier transform itself is very sensitive for the noise contaminating the measurement data. Interpreting the Fourier transform as an inverse problem, we have worked out a method providing high resistance to noises. The model in the inverse problem is the frequency spectrum approximated by finite series expansion. The expansion coefficients play the role of the unknown parameters to be determined in the framework of an overdetermined inversion problem. We introduce two variants of the inverse Fourier transform determining the frequency spectrum discretized by the Hermite system of functions. In case of Gaussian noise the least square Fourier transform (LSQ-FT), and for the appearance of outliers the iteratively reweighted least squares Fourier transform (IRLS-FT) produce significant noise reduction effect which is represented by the results of the examinations performed by us.*

## Bevezetés

A geofizikai mérési adatokban foglalt információ kiolvasása rendszerint hosszú művelet sor végén válik lehetővé. E folyamatban az adatfeldolgozás jelenti a kezdetet, amelynek eszköztárában kiemelten fontos szerepet játszik a Fourier-transzformáció. Időben (vagy térben) változó jelenségek vizsgálatára a műszaki és természettudományok területén igen hasznos eszköznek bizonyult a Fourier-analízis, melynek segítségével az időtartományban mért jel frekvenciatartománybeli (spektrális) jellemzése végezhető. A spektrum előállítására egzakt matematikai formulákon, ill. azok bázisán különböző feladatokra kidolgozott algoritmusokon alapul, így széles körben alkalmazott eszköz a diszkrét idősorok Fourier-analízisében a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT), ill. annak számítógépi környezetbe specializált változata, az FFT.

A mérési adatok mindig zajjal terheltek, így a feldolgozás, ill. értelmezés módszereit abból a szempontból is vizsgálunk kell, milyen mértékben zajérzékenyek. A Fourier-transzformáció lineáris leképezés, diszkrét variánsaiban (DFT, FFT) pedig a spektrumot inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásaként állíthatjuk elő. Érthető te-

hát, hogy az időtartományban jelentkező zajt a lineáris transzformációval leképezzük a frekvenciatartományba, emiatt a Fourier-transzformáció zajérzékeny eljárás.

## A folytonos Fourier-transzformáció

A Fourier-transzformáció a jel regisztrálásának tartományát (pl. időtartományt) és a jel vizsgálatának tartományát (frekvenciatartományt) kapcsolja össze az

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (1)$$

összefüggés alapján, melyben az  $x(t)$  a jel időfüggvényét, az  $X(f)$  pedig annak frekvenciaspektrumát jelöli. A Fourier-transzformáció bázisfüggvénye a  $K(f,t) = e^{-j2\pi ft}$  komplex függvény, és ennek megfelelően a frekvenciaspektrum is általában komplex értékű függvényként áll elő. A bázisfüggvény reciproka adja meg az inverz transzformáció bázisfüggvényrendszerét, melynek segítségével felírható a fordított irányú (frekvenciatartományból időtartományba történő átalakítást biztosító inverz) Fourier-transzformáció (IFT):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df. \quad (2)$$

Az elméletileg felírható időfüggvények nem mindegyikének létezik a Fourier-transzformáltja. A Fourier-transzformált létezésére vonatkozóan a Dirichlet-féle feltételek érvényesek [HÜTTE 1993]. Ezek a feltételek nem jelentenek erős korlátozást a gyakorlat szempontjából, mivel a determinisz-

<sup>1</sup> Beérkezett: 2010. február 9., elfogadva: 2010. február 15.

<sup>2</sup> Miskolci Egyetem, Geofizikai Tanszék, 3515 Miskolc, Egyetemváros; E-mail: gfvassp@uni-miskolc.hu

<sup>3</sup> MTA-ME Műszaki Földtudományi Kutatócsoport, Miskolci Egyetem, 3515 Miskolc, Egyetemváros

tikus jelek időtartománybeli viselkedése a legtöbb esetben leírható, ill. jól közelíthető olyan függvényekkel, amelyek négyzetesen integrálhatók a valós számok értelmezési tartományán. Ennek a jelentősége abban mutatkozik meg, hogy a négyzetesen integrálható időfüggvényekkel megadható (véges energiájú) jelek esetében a Fourier-transzformált létezik.

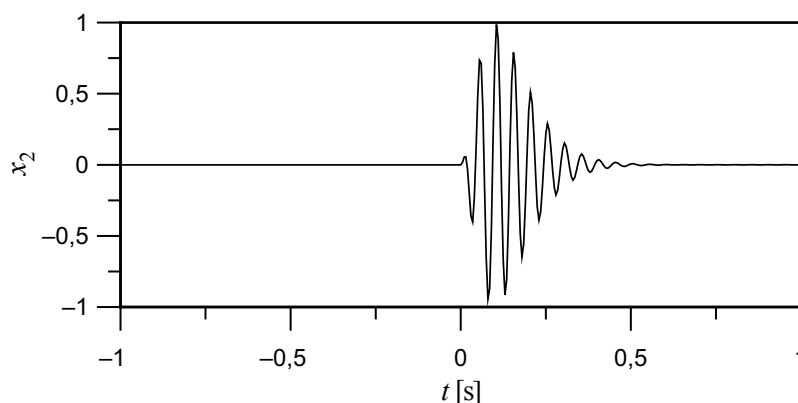
### A diszkrét Fourier-transzformáció

A digitális mérés technika és a számítógépes adatfeldolgozás fejlődésének már a korai szakaszában megmutatkozott az igény egy olyan módszer kifejlesztésére, melynek segítségével a folytonos Fourier-transzformáció lehetőségei véges hosszúságú diszkrét adatrendszerekre is kiterjeszthetők. A diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) a folytonos Fourier-transzformációból levezethető, annak számítógépes adatfeldolgozásra alkalmazható speciális esete [ORAN BRIGHAM E. 1974]. A DFT művelete, a folytonos  $x(t)$  időfüggvény origóra szimmetrikus  $2T$  hosszúságú intervallumán  $\Delta t$  időközzel vett,  $N$  darab  $x(k\Delta t)$  függvényértékből képzett, véges hosszúságú diszkrét időfüggvényből kiindulva állítja elő az ugyancsak diszkrét  $X(n\Delta f)$  frekvenciaspektrumot az alábbi összefüggés alapján:

$$X(n\Delta f) = \Delta t \sum_{k=-N/2}^{N/2} x(k\Delta t) \cdot e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad \Delta f = \frac{1}{N\Delta t}.$$

A bemutatott formula dimenzióhelyes, és arra az esetre vonatkozik, amikor a mintavételi értékek a mintavételi időközök közepére vonatkoznak. Az alul megtört zárójelpár,  $\lfloor \rfloor$ , az egészrészképzés műveletét jelzi. A diszkrét frekvenciaspektrum-értékeket azonosító,  $n$  egész értékű változó a  $k$ -hoz hasonlóan, ugyancsak a  $\lfloor -N/2 \rfloor, \lfloor N/2 \rfloor$  zárt intervallumban vehet fel értéket.

A DFT által előállított frekvenciaspektrumok jól közelítik az elméletileg elvárható frekvenciaspektrumot, ha a vizsgált jel hibáktól mentes, valamint a mintavételi időközt és a regisztrálási időtartamot megfelelően megválasztjuk. Erre mutatunk példát a következő ábrákon. Az 1. ábrán egy zajmentes oszcilláló jelcsomag időtartománybeli képe látható, a 2. ábra pedig ennek a jelnek a matematikai formában ismert frekvenciaspektrumát mutatja be. A 3. ábrán jelenik meg a hibamentes jel DFT-vel számított frekvenciaspektruma.



1. ábra. A zajmentes jel időtartománybeli képe

Fig. 1. The time domain representation of the noise-free signal

A DFT-vel számított és a pontos frekvenciaspektrum között vizuálisan észlelhetetlen az eltérés (az egyes mintavételi értékek közötti eltérések nagyságrendje  $10^{-7}$ ).

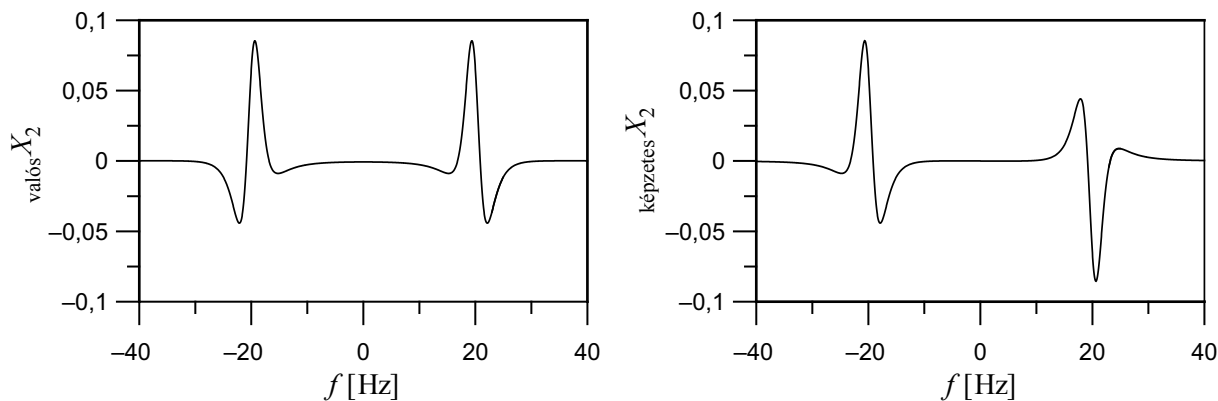
Annak szemléltetésére, hogy az időtartományban megjelenő zajokra azonban milyen érzékenyen reagál a DFT, az előzőleg bemutatott jelet módosítottuk úgy, hogy  $\sigma = 1$  szórási Gauss-eloszlást követő zaj z1 értékűt adtuk hozzá. A zajjal terhelt jelet a 4. ábra mutatja. Ennek DFT-vel számított frekvenciaspektruma a 5. ábrán látható, melyen megfigyelhetők ugyan a hibamentes jelnél tapasztalt csúcsok, ám a zaj hatására jelentős torzulást tükröznek a képek.

A gyakorlat a Gauss-eloszlásnál rendszerint nehezebben kezelhető zajt tartalmazó adatrendszereket produkál, ezért az előző adatrendszer véletlenszerűen kiválasztott 10%-ához további extra zajt keverve (kiugró adatok) előállítottuk a 6. ábrán látható adatrendszert. Az 1. ábra hibamentes képével összevetve, az adatrendszer erősen zajosnak tekinthető. Megdöbbentő képet kapunk, ha az adatrendszer DFT-vel számított spektrumát ábrázoljuk. A 7. ábrán megjelenített spektrumon a hibamentes esethez tartozó csúcsokra és elhelyezkedésükre vonatkozóan már szinte semmilyen következtetést nem vonhatunk le.

A bemutatott ábrák egyértelműen szemléltetik a DFT zajérzékeny viselkedését. Ennek az előnytelen tulajdonságnak az ismeretében joggal merül fel az igény egy rezisztensebb (zajjal szemben kevésbé érzékeny) és robusztusabb (a zaj eloszlásától kevésbé függő) tulajdonságokkal bíró frekvenciaspektrum-számítási módszer kifejlesztésére. A geofizikai inverzióelmélet kész eszköztárában kínál a mérési hibákkal terhelt adatrendszerekben foglalt információ kiolvasására. Ebből a tényből kiindulva alakíthatjuk ki a frekvenciaspektrum inverziós módszerekkel történő meghatározásának új koncepcióját, melynek lényegét a Fourier-transzformáció inverz feladatmegoldásra történő visszavezetése képezi.

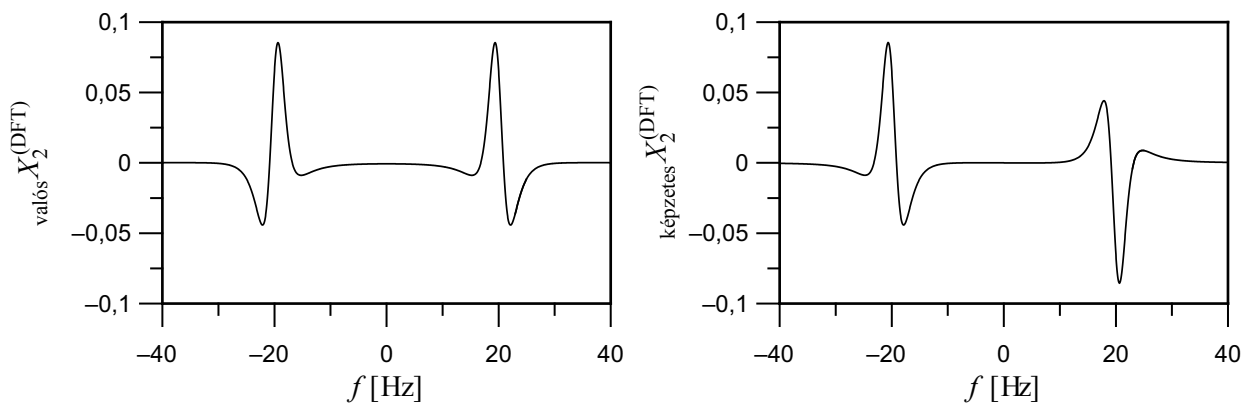
### A Fourier-transzformáció mint inverz feladat

A folytonos Fourier-transzformációval az  $x(t)$  folytonos jel  $X(f)$  spektrumát állítjuk elő. Gyakorlati feladatokban a folytonos  $X(f)$  függvényt diszkrétizálnunk kell. Az inverz feladatok megoldása terén ennek igen hatékony eszköze a sorfejtés, ahol a függvényt egy alkalmasan választott bázisfüggvényrendszer szerint fejtjük ki:



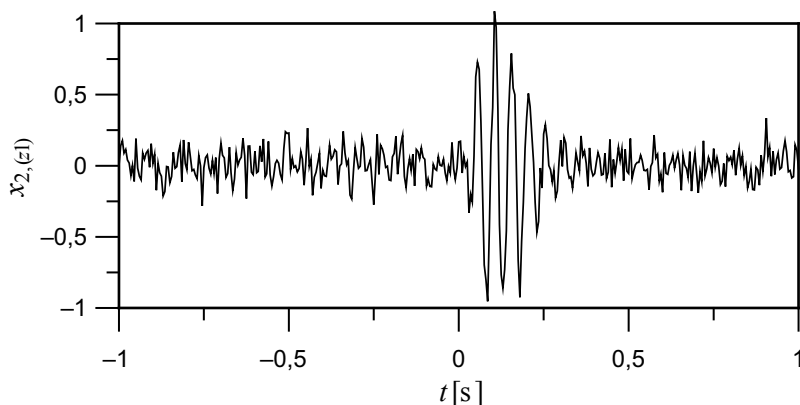
2. ábra. A zajmentes jel analitikusan számított frekvenciaspektruma

Fig. 2. The two parts of the exact frequency spectrum of the noise-free signal



3. ábra. A zajmentes jel DFT-vel számított frekvenciaspektruma

Fig. 3. The two parts of the DFT-computed frequency spectrum of the noise-free signal



4. ábra. Gauss-eloszlású zajjal terhelt jel időtartománybeli képe

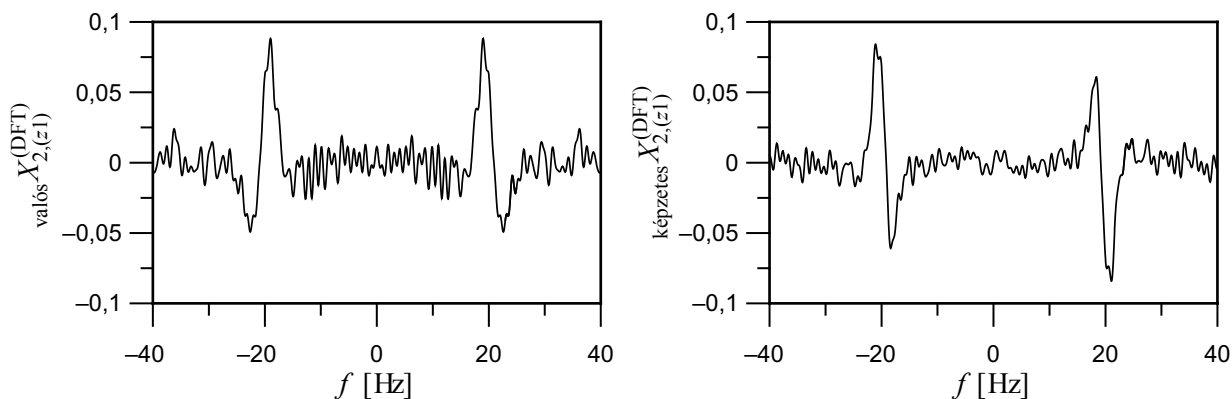
Fig. 4. The time domain representation of the signal distorted by Gaussian noise

$$X(f) = \sum_{i=1}^M c_i \Phi_i(f), \quad (3)$$

ahol  $\Phi_i(f)$  az  $i$ -edik bázisfüggvényt,  $c_i$  az  $i$ -edik sorfejtési együtthatót jelöli, amely komplex és frekvenciafüggetlen,  $M$  pedig a sorfejtésben figyelembe vett tagok számát jelenti. Ennek véges értéke egyben a közelítés véges pontosságát is jelenti, műszaki feladatok megoldása esetén azonban  $M$

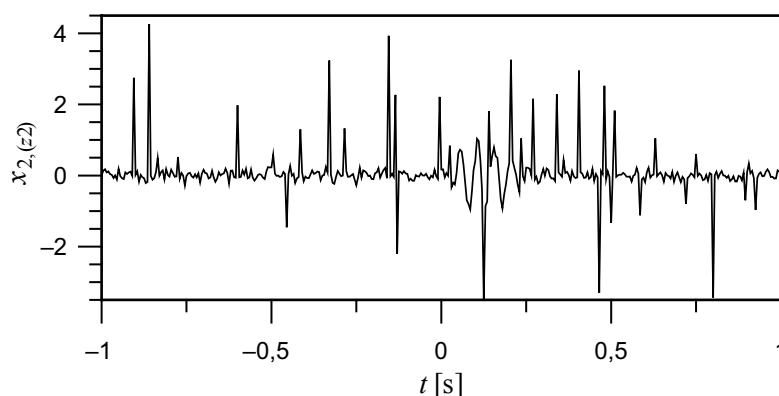
megválasztása a probléma természetéhez igazodva rendszerint adódik. Mivel a  $\Phi_i(f)$  bázisfüggvényrendszer elemei ismertek, a  $c_i$  sorfejtési együtthatók ismeretében a spektrum előállítható.

Ha a Fourier-transzformációt inverz feladatnak tekintjük, a sorfejtési együtthatókat az inverzió ismeretlenjeként – vagy az inverzió terminológiáját használva modellparaméterekként – kell kezelnünk. Az inverz feladat elméletében kiindulási pont az ún. direkt feladat, amely egy elméleti össze-



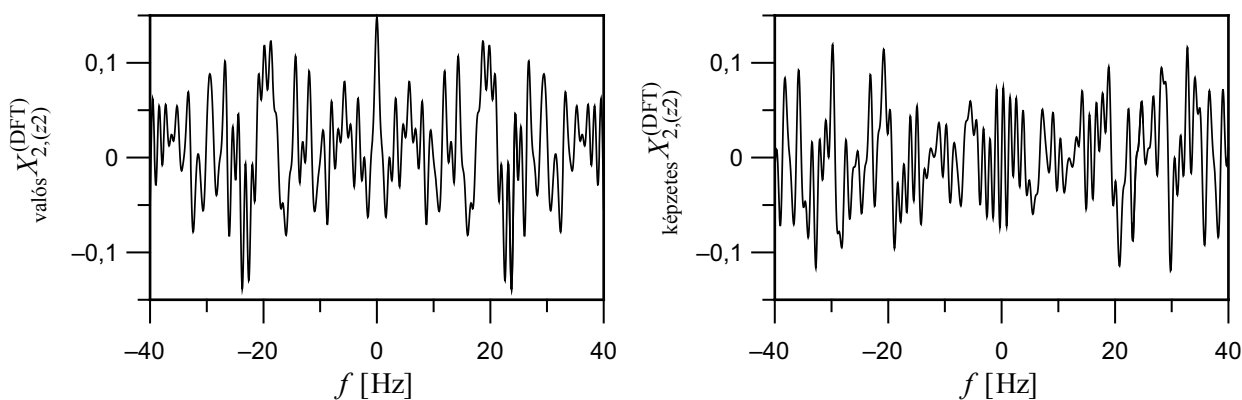
5. ábra. A Gauss-eloszlású zajjal terhelt jel DFT-vel előállított frekvenciaspektruma

Fig. 5. The two parts of the DFT-computed frequency spectrum of the signal distorted by Gaussian noise



6. ábra. Kiugró hibával terhelt adatrendszer időtartománybeli képe

Fig. 6. The time domain representation of the signal distorted by outliers



7. ábra. Kiugró hibával terhelt adatrendszer DFT-vel számított frekvenciatartománybeli képe

Fig. 7. The two parts of the DFT-computed frequency spectrum of the signal distorted by outliers

függést jelent a modell paraméterei (modelltér elemei, esetenként sorfejtési együtthatók) és a (számított vagy elméleti) adatok (az adattér elemei) között. A Fourier-transzformáció esetében a direkt feladat megoldását jelentő formula, amely az elméleti adatok előállítására szolgál, nyilvánvalóan az inverz folytonos Fourier-transzformáció (2) kifejezése – a diskretizáció módszerével választott (3) formulát felhasználva – az

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^M c_i \Phi_i(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

$$= \sum_{i=1}^M c_i \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \quad (4)$$

alakban írható fel. Ha az  $x(t)$  függvényt a  $t_k$  időpontban kérdezzük, akkor

$$x_k = x(t_k) = \sum_{i=1}^M c_i \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(f) \cdot e^{j2\pi ft_k} df. \quad (5)$$

Bevezetve a

$$G_{ki} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(f) \cdot e^{j2\pi ft_k} df \quad (6)$$

jelölést, az (5) egyenlet a mérés  $k$ -adik időpontjára vonatkozóan számított (elméleti) jelre az

$$x_k^{(\text{elm})} = x(t_k) = \sum_{i=1}^M c_i G_{ki} \quad (7)$$

lineáris kifejezést adja, vagy mátrix-vektor írásmódban:

$$\mathbf{x}^{(\text{elm})} = \mathcal{G} \mathbf{c}. \quad (8)$$

Látható a (6) egyenlet alapján, hogy a  $\mathcal{G}$  mátrix (a geofizikai inverzióban szokásos elnevezéssel Jacobi-mátrix) elemei komplex számok.

Ezen a ponton a Fourier-transzformáció egyszerűen beilleszthető az inverz feladat problémakörébe. A modellparaméterek száma  $M$ , a jel diszkrét időpontban mért mintáinak száma  $N$ . Ha jól választjuk meg a bázisfüggvényeket, elérhetjük, hogy az adataink számától akár jóval kisebb számú sorfejtési tag (ugyanennyi együttható) elegendő pontossággal közelítse a spektrumot. Ebben az esetben  $N > M$ , azaz a problémát túlhatározott inverz feladatként fogalmazhatjuk meg, ami megnyitja előttünk a geofizikai inverzió zajelnyomásra kidolgozott eszköztárát.

A számított adatokhoz hasonlóan a  $k$ -adik mért adatot  $x_k^{(\text{mért})}$ -ként jelölve vezessük be a mért adatok vektorát:  $\mathbf{x}^{(\text{mért})}$ . A mért és számított adatok

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}^{(\text{mért})} - \mathbf{x}^{(\text{elm})}$$

eltérésvektorának normája fontos szerepet játszik az inverzióban. Ha az ún.  $L_2$ -normát választjuk, akkor az

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{k=1}^N e_k^2 = \sum_{k=1}^N (x_k^{(\text{mért})} - x_k^{(\text{elm})})^2 \\ &= \sum_{k=1}^N \left( x_k^{(\text{mért})} - \sum_{i=1}^M c_i G_{ki} \right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

sorfejtési együtthatóktól függő skálárhoz jutunk, amelynek minimumával definiáljuk a túlhatározott inverz feladat megoldását. A minimum feltétele a

$$\frac{\partial E_2}{\partial c_l} = 0, \quad (l = 1, \dots, M)$$

egyenletrendszer teljesülése. Mint ismeretes, ekkor a Gauss-féle legkisebb négyzetek (LSQ) módszerének

$$\mathcal{G}^T \mathcal{G} \mathbf{c} = \mathcal{G}^T \mathbf{x}^{(\text{mért})} \quad (10)$$

normálegyenlet-rendszeréhez jutunk, amelynek megoldásával

$$\mathbf{c} = (\mathcal{G}^T \mathcal{G})^{-1} \mathcal{G}^T \mathbf{x}^{(\text{mért})} \quad (11)$$

a sorfejtési együtthatók rendszere előállítható, és a spektrum a (3) kifejezéssel (az ismert bázisfüggvényeket felhasználva) tetszőleges frekvencián számítható (itt a  $-1$  kitevő mátrix-inverziót jelöl). A Fourier-transzformált ezen, legkisebb négyzetek elvét alkalmazó változatát nevezzük legkisebb négyzetek elve szerinti Fourier-transzformációnak, és jelölje ezt az eljárást az LSQ-FT rövidítés.

A (10) egyenletrendszer megoldásakor elvégzendő kritikus művelet az egyenletrendszer  $\mathcal{G}^T \mathcal{G}$  mátrixának numerikus módszerekkel történő invertálása. A mátrix invertálásának végrehajtása közben keletkező numerikus hiba erősen befo-

lyásolja az egyenletrendszer megoldásával kapott eredmény megbízhatóságát. A különböző módon képzett kondíciószámokkal lehet jellemezni azt a kockázatot, amelyet az adott mátrix numerikus invertálása jelent az egyenletrendszer megoldásának megbízhatósága szempontjából. Az egyik leggyakrabban alkalmazott kondíciószám, amely a mátrix legnagyobb és legkisebb sajátértékének az arányával azonos [GALÁNTAI A., JENEI A. 2008], a következőképpen írható fel:

$$K = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}. \quad (12)$$

Minél nagyobb a kondíciószám értéke, annál rosszabbul kondicionált a probléma, ami azt jelzi, hogy már a bemenet kismértékű megváltozása is érzékenyen érinti a probléma egyenletrendszerének megoldását. Természetesen ez a nagyság relatív módon értelmezendő, és környezetfüggő (azaz, alapvetően a számítógép aritmetikájától és a közelítés megkövetelt pontosságától függ) [GALÁNTAI A., JENEI A. 1988]. A nagyságrendileg 1-hez közeli értékek azonban nagyon jó kondicionáltságra utalnak minden esetben.

Ha az adatsort terhelő véletlen zaj eloszlása jelentősen eltér a Gauss-eloszlásútól, vagy a többféle forrásból származó eltérő eloszlású zajok hatása együttesen érvényesül, akkor a legkisebb négyzetek elve nem ad optimális becslést. Ilyenkor a hibaeloszlások szélesebb tartományán is jó eredményeket szolgáltatató, ún. robusztus inverziós eszközök alkalmazására van szükség. A kiugró adatokat tartalmazó adatsorozatok inverziójára a (9)-ben bemutatott norma helyett alkalmasabbnak mutatkozik az ún.  $L_1$ -norma:

$$E_1 = \sum_{k=1}^N |e_k| = \sum_{k=1}^N \left| x_k^{(\text{mért})} - \sum_{i=1}^M c_i G_{ki} \right|.$$

Az ennek minimalizálásával kidolgozott eljárás a legkisebb abszolút érték módszer (angol rövidítéssel LAD). Az eljárást az iteratív újrásúlyozás módszerével az igen egyszerűen algoritmizálható, súlyozott legkisebb négyzetek módszerére vezették vissza SCALES és szerzőtársai (*Iteratively Reweighted Least Squares Method*, rövidítve IRLS) [SCALES J. A. et al. 1988]. A módszer nevét onnan kapta, hogy a megoldást iteratív úton állítja elő, és az egyes iterációs lépésekben az előző lépés eredménye alapján számított eltérésvektor elemeinek felhasználásával számít súlyokat, melyeket az adott iterációban (az ismeretlenektől független) konstansoknak tekinthetünk. Ezáltal az IRLS módszer alkalmazható olyan esetekben is, amikor a minimalizálandó függvény az inverziós változóktól függő súlyokat tartalmaz.

Az adattérben számított súlyokat alkalmazó eljárások közül kiugró adatok kezelésére vonatkozó hatékonyságával tűnik ki a Cauchy-féle súlyozás, melynek alakja a következőképpen írható fel

$$w_k = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + e_k^2}. \quad (13)$$

A formulában szereplő  $\varepsilon$  a Cauchy-eloszlás skálaparamétere, az  $e_k$  eltérésvektor  $k$ -adik eleme. Mivel  $e_k$  az inverziós változókat is tartalmazza, a  $w_k$  súlyokkal definiált norma

$$E_C = \sum_{k=1}^N w_k e_k^2 \quad (14)$$

nem kvadratikus, így minimalizálása nemlineáris egyenletrendszerre vezet, amely az IRLS módszerrel oldható meg. Ennek tipikus,  $j$ -edik iterációs lépésében a súlyokat az előző ( $j-1$ )-edik lépés eredményei alapján számítjuk. Ezáltal a  $\mathcal{W}$  súlymátrix (az adott iterációban) ismert konstansnak tekinthető, így az iterációnként megoldandó normálegyenlet a súlyozott legkisebb négyzetek egyenletrendszerre:

$$\mathcal{G}^T \mathcal{W}^{(j-1)} \mathcal{G} \mathbf{c}^j = \mathcal{G}^T \mathcal{W}^{(j-1)} \mathbf{x}^{(\text{mért})}.$$

Az így definiált Cauchy-inverzió a geofizikai inverzióban gyakran alkalmazott – a kiugró hibákat is tartalmazó mérési adatrendszer inverziójára kiválóan alkalmas – módszerként ismert. Az algoritmushoz természetesen megfelelő leállási kritériumot kell megfogalmazni. Az inverz Fourier-transzformációnak a fentiek szerint kialakított robusztus módszerét iteratív újrasúlyozás elve szerinti Fourier-transzformációnak nevezzük, és az angol elnevezés (*Iteratively Reweighted Least Squares*) kezdőbetűi alapján az IRLS-FT rövidítés-sel jelöljük.

### A spektrum diszkrétizálása Hermite függvényrendszerrel

A sorfejtéses geofizikai inverzióban az ismeretlen paraméterek számának csökkentése és az inverziós feladat numerikus stabilitásának javítása érdekében leginkább az ortogonális függvényrendszereket alkalmazzuk a folytonos függvényekkel leírható mennyiségek diszkrétizálása során. A  $\{\Phi_i; i = 1, 2, \dots\}$  ortogonális függvényrendszer tagjai négyzetesen integrálhatók az  $\Omega$  értelmezési tartományukon, és teljesítik az alábbi két feltételt [KORN G. A., KORN T. M. 1961]:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi_m(t) \Phi_n(t) dt &= 0, & m \neq n, \\ \int_{\Omega} \Phi_m(t) \Phi_n(t) dt &\neq 0, & m = n. \end{aligned} \quad (15)$$

A teljes ortogonális rendszerek olyan függvényt sorozatot alkotnak, amelyek már nem bővíthetők további, az ortogonalitás (15) feltételeit kielégítő függvénnyel. Ha a frekvenciaspektrumot valamely teljes ortogonális függvényrendszer felhasználásával kívánjuk közelíteni, akkor figyelembe kell vennünk a közelítendő függvény értelmezési tartományát. Az (1) és (2) formula szerint a frekvenciaspektrum általános esetben a valós számok  $(-\infty, \infty)$  intervallumán értelmezett. Ennek megfelelően olyan függvényrendszert kell választani, amely ugyanezen a tartományon képez teljes ortogonális rendszert. Az Hermite függvényrendszer eleget tesz ennek a követelménynek, ezért a diszkrétizálás (3)-ban általánosan jelölt bázisfüggvényrendszerét e szerint választottuk. A függvényrendszer  $i$ -edik tagja a következő alakban adható meg [GRÖBNER W., HOFREITER N. 1958]:

$$H_i(f; a) = \frac{e^{-\frac{1}{2}af^2} P_{i-1}^H(f; a)}{\sqrt{(2a)^{(i-1)}(i-1)! \sqrt{\pi/a}}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

ahol  $P_{i-1}^H$  az  $(i-1)$ -ed fokú Hermite-polinom,  $\rho^2(f, a) = \exp\{- (1/2)af^2\}$  pedig az ortogonalitást biztosító súlyfüggvény. Az  $a > 0$  valós szám (a továbbiakban skálázó tényező) fontos szerepet kap a vizsgált folyamat frekvenciaspektrumának közelítésére leginkább alkalmas spektrális modell ki-

alakításában. A (16) formula nevezőjében szereplő kifejezés a polinom fokszámától és a skálázó tényezőtől egyaránt függő normáló tényező, amely biztosítja, hogy a függvényrendszer bármely tagjának normája egységnyi legyen:

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} H_i^2(f; a) df} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

azaz a bázisfüggvényrendszer nemcsak ortogonális, de ortonormált is. Az Hermite függvényrendszer felhasználásával a frekvenciaspektrum sorfejtéses diszkrétizálása (3) szerint az

$$X(f) = \sum_{i=1}^M c_i H_i(f),$$

a Jacobi-mátrix elemei pedig a (6) formula alapján a

$$G_{ki} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}af^2} P_{i-1}^H(f; a) e^{j2\pi f t_k} df}{\sqrt{(2a)^{(i-1)}(i-1)! \sqrt{\pi/a}}}, \quad (18)$$

alakban írhatók. A (18) összefüggésben szereplő integrál előállítható a polinom tagjaiból képzett integrálok összegeként. Mivel az Hermite-polinomokban a változó  $f^q$  alakban szerepel, a továbbiakban elegendő az alábbi formában felírható integrálok kiszámításával foglalkozni:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha f^2} f^q e^{j\beta f} df &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha f^2} f^q \cos \beta f df \\ &+ j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha f^2} f^q \sin \beta f df, \end{aligned} \quad (19)$$

melyben a  $q$  kitevő pozitív egész és nulla, az  $\alpha$  pozitív valós, a  $\beta$  pedig tetszőleges valós értékeket vehet fel. A  $q$  kitevő páros és páratlan értékű is lehet, aminek a trigonometrikus függvényekkel felírt integrálok értéke szempontjából van jelentősége. A Jacobi-mátrix elemeit az így meghatározott integrálok (ismert konstansokkal számított) lineáris kombinációiként állíthatjuk elő. Vezessük be a

$$q = 2n + m, \quad m = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

jelölést, amellyel a páros és páratlan kitevőértékek egyértelműen azonosíthatók. Ha  $m = 1$ , azaz a  $q$  kitevő értéke páratlan, akkor a páros és páratlan függvények szimmetrikus intervallumon vett integráljára vonatkozó szabályok alkalmazásával az integrálkifejezés a következő alakra egyszerűsödik:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha f^2} f^{2n+m} \sin \beta f df. \quad (20)$$

Az  $m = 0$  esetben  $q$  páros, ekkor hasonlóan egyszerű integrál áll elő:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha f^2} f^{2n+m} \cos \beta f df. \quad (21)$$

A két integrál analitikusan számítható [CAMPBELL G. A., FOSTER M. 1948] a következő összefüggés szerint:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha f^2} f^{2n+m} \begin{Bmatrix} \sin \beta f \\ \cos \beta f \end{Bmatrix} df \\ = (-1)^n \sqrt{\pi} 2^{-2n-1-m} \alpha^{-(2n+1+m)/2} \\ \times e^{(-\beta^2/4\alpha)} P_{2n+m}^H \left( \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}; 1 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Az összefüggésben szereplő  $P_{2n+m}^H$  az  $a = 1$  skálázó tényezőjű,  $(2n + m)$ -ed fokú Hermite-polinomot jelöli. Ennek alapján a  $\mathcal{G}$  mátrix komplex értékű elemei közvetlenül számíthatók, amelyeknek birtokában a szintén komplex sorfejtési együtthatók (mint ismeretlen paraméterek) is előállíthatók a megfelelően választott inverziós eljárás normálegyenlet-rendszerének megoldásával.

Az Hermite függvényrendszer súlyfüggvényének értéke a független változó ( $f$ ) abszolút értékének növekedésével a nullához tart. Ennek következtében az Hermite függvényrendszer csak olyan jelek frekvenciaspektrumának közelítésére alkalmas, amelyek jó közelítéssel sávkorlátozottnak tekinthetők az időtartománybeli regisztrálás felbontóképessége által meghatározott véges frekvenciatartományon belül. A súlyfüggvény lecsengésének mértékét az  $a$  skálázó tényező értéke szabja meg, amelynek nagyon fontos szerepe van a frekvenciaspektrum közelítésének pontossága terén. A különböző jelenségekhez kapcsolódó frekvenciaspektrumok ugyanis a skálázó tényező különböző értékei mellett közelíthetők legjobban, megegyező számú tagból képzett függvény sorok felhasználásával.

### A vizsgálatok során felhasznált jelek bemutatása

A kidolgozott, új Fourier-transzformációs módszerek alkalmazhatóságának numerikus vizsgálata céljából, a véges energiájú és jó közelítéssel sávkorlátozottnak tekinthető jeleknek egy olyan csoportját választottuk, amelynek időtartománybeli és frekvenciatartománybeli megjelenési formáit leíró függvények analitikusan előállíthatók. A választott időfüggvény általános alakja

$$x(t) = \kappa t^\eta e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (23)$$

melyben  $\eta$  pozitív egész szám vagy nulla,  $\lambda$  pozitív valós szám,  $\kappa$  és  $\omega$  valós szám,  $\varphi$  pedig a  $[0, \pi/2]$  tartománybeli valós szám lehet.

Az  $x(t)$  időfüggvény  $X(p)$  Laplace-transzformáltját a transzformációs táblázatok alapján magasabb szintű matematikai műveletek végrehajtása nélkül lehet képezni [ERDÉLYI A. et al. 1954]. A Fourier- és a Laplace-transzformáció közötti kapcsolatot megteremtő  $p = j2\pi f$  helyettesítés alapján a jelcsoport  $X(f)$  frekvenciaspektruma is előállítható. A (23) formulában szereplő görög betűkkel jelölt paraméterek

értékeinek rögzítése mellett kétféle jelet választottunk az Hermite függvényrendszerrel diszkrétizált inverz Fourier-transzformációs eljárás (H-IFT) vizsgálatára. A jelek időtartománybeli mintavételezése,  $\Delta t = 0,005$  s, és a regisztrálás tartománya,  $|t| \leq 1$  s, mindkét esetben azonos volt. Az első (I.) jel  $x_1(t)$ -vel jelölt impulzus időfüggvényének képe a 8. ábrán látható, és paramétereinek értékei sorrendben a következők:  $\lambda = 40$ ,  $\kappa = 1/\bar{x}$ ,  $\eta = 6$ ,  $\omega = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$ . A  $\kappa$  paraméter értékének előállításához felhasznált  $\bar{x}$  mennyiség az időfüggvény burkológörbéjének a maximumát jelöli, amely a következő összefüggés alapján számítható:

$$\bar{x} = t^n e^{-\alpha t} \Big|_{t=n/\alpha}.$$

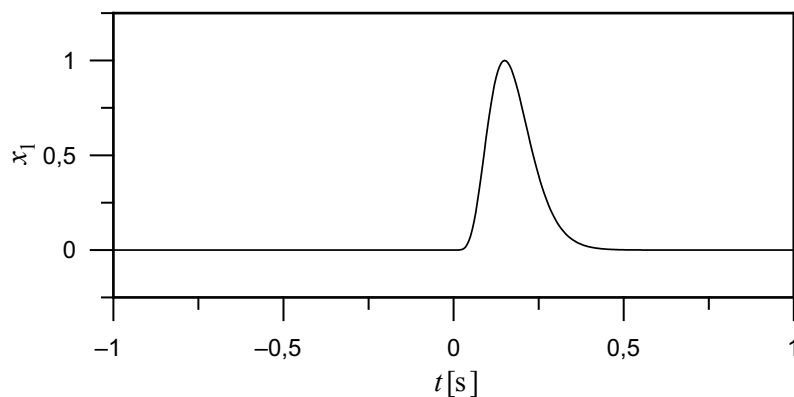
A  $\kappa$  paraméter ilyenformán történő előállításával az időfüggvény értékészlete a  $[-1, 1]$  intervallumra korlátozódik.

A 9. ábra a jel frekvenciaspektrumának valós és képzetes részét mutatja be az  $|f| \leq 20$  Hz tartományban. Az ábrán látható, hogy a jel jó közelítéssel sávkorlátozott, mivel a 10 Hz-nél (abszolút értékben) nagyobb frekvenciájú összetevői már csak nagyon kis amplitúdóval vannak jelen.

A második jelet (II.) a  $\lambda = 20$ ,  $\kappa = 1/\bar{x}$ ,  $\eta = 2$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 20$ ,  $\varphi = \pi/4$  paraméterekkel definiáltuk. A  $\kappa$  paraméter értékének számítása az első jelhez hasonlóan történt. Az így előálló zajmentes jelet az 1. ábrán, a Gauss-zajjal terhelt változatát a 4. ábrán már bemutattuk a DFT zajérzékenységének szemléltetését szolgáló szakaszban. A II. jel 2. ábrán megjelenő frekvenciaspektrumán látható, hogy a jel kialakításában lényeges szerepet játszó harmonikus összetevők frekvenciasávja az I. jelhez képest (9. ábra) eltolódott a nagyobb értékek felé. Emiatt a II. jel frekvenciaspektrumának megjelenítése, az előző esettel megegyező frekvenciatartománybeli felbontás mellett, kétszer olyan hosszú tartományban történt ( $|f| \leq 40$  Hz).

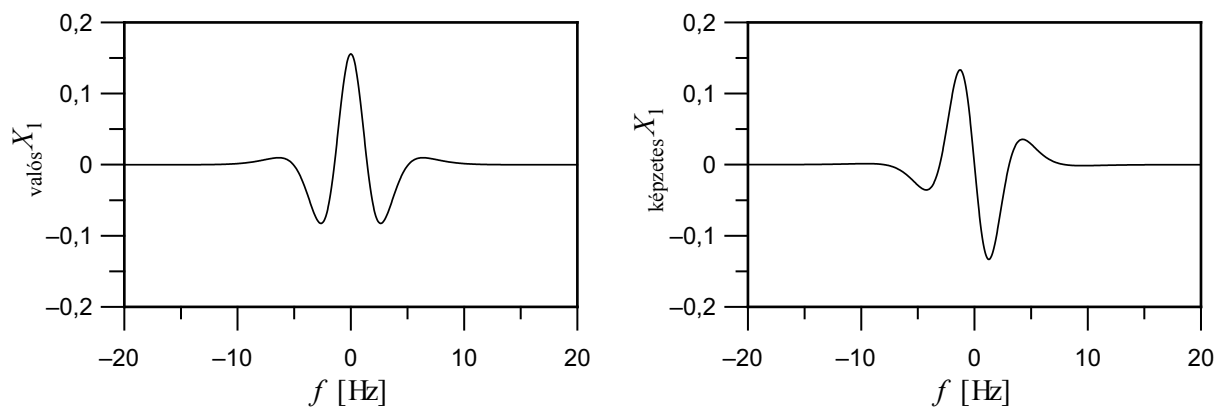
### Az eredmények minősítésére szolgáló mennyiségek

Mielőtt az inverz Fourier-transzformációval (I-FT) kapott eredmények bemutatására térnénk, vezessünk be olyan skálázási mennyiségeket, melyekkel az inverzió eredményének jóságát jellemezhetjük. Mivel a fenti példákban az elméleti spektrum analitikusan ismert, számíthatjuk az inverz Fourier-transzformációval becsült spektrum ettől való eltérésvektorát



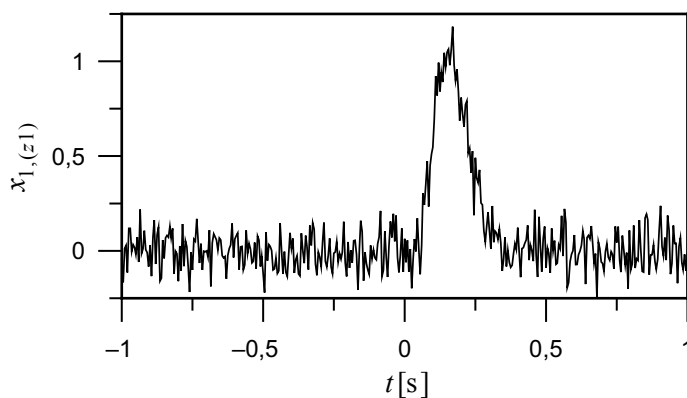
8. ábra. Az I. jel időfüggvénye

Fig. 8. The time domain representation of signal I



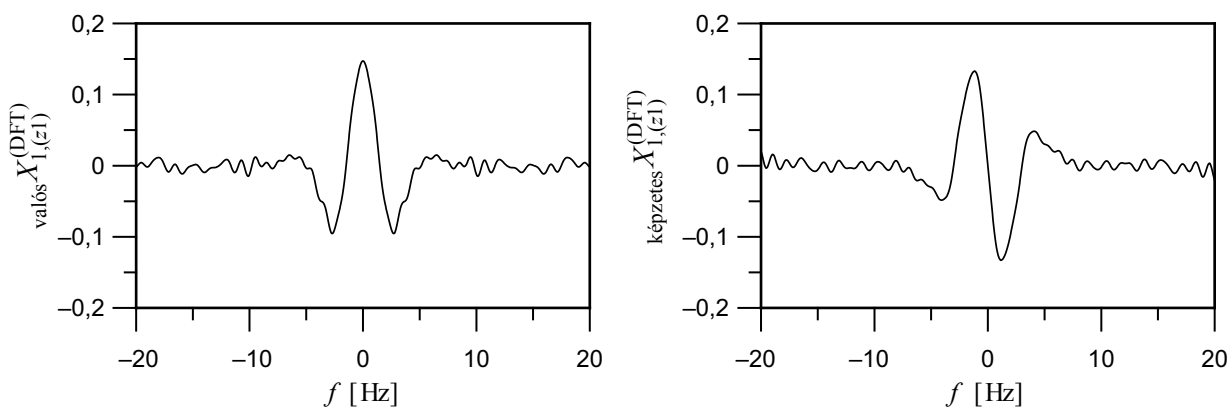
9. ábra. Az I. jel frekvenciaspektruma

Fig. 9. The two parts of the frequency spectrum of signal I



10. ábra. Az I. jel Gauss-eloszlású zajjal terhelve ( $I^{z1}$ )

Fig. 10. The time domain representation of signal I distorted by Gaussian noise ( $I^{z1}$ )



11. ábra. Az  $I^{z1}$  jel DFT-vel számított frekvenciaspektrumának valós és képzetes összetevője

Fig. 11. The two parts of the DFT-computed frequency spectrum of signal  $I^{z1}$

$$\mathbf{e}^{(f)} = \mathbf{X}_{\text{számított}} - \mathbf{X}_{\text{elméleti}}, \quad (24)$$

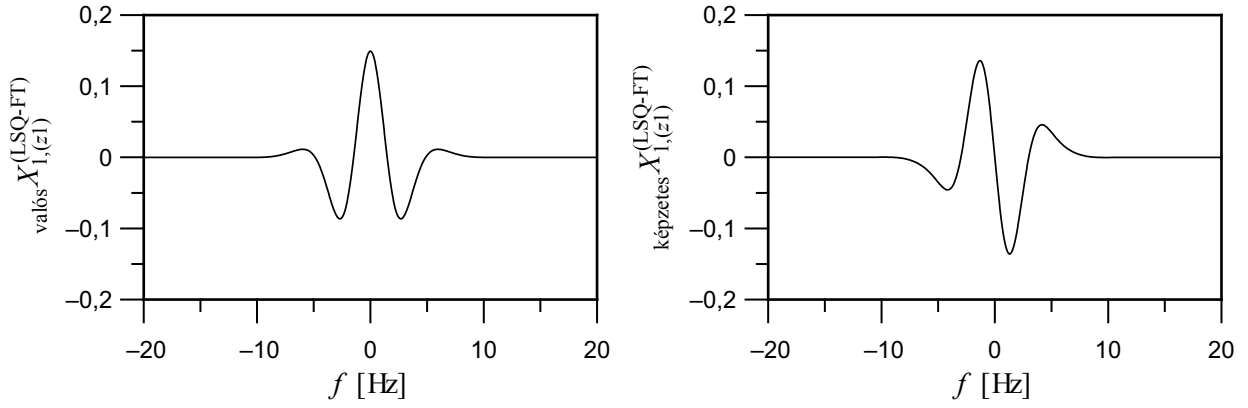
ill. ennek normájaként bevezetjük a modelltávolságot

$$D_f = \sqrt{N_f^{-1} \sum_{i=1}^{N_f} |e_i^{(f)}|^2}, \quad (25)$$

amely az egzakt, ill. a becslt spektrum (modell) eltérését egyetlen skálárban méri ( $N_f$  az összehasonlításra kijelölt frekvenciapontok száma).

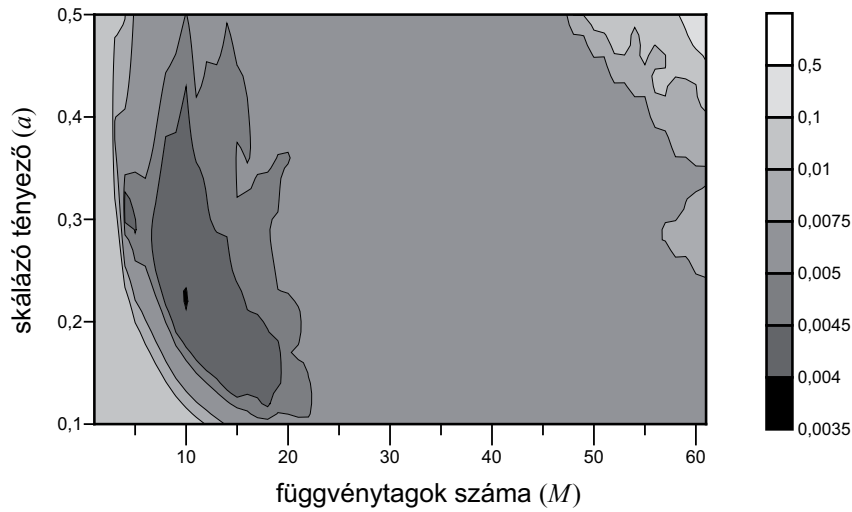
A Fourier-transzformáció inverz feladatra történő visszavezetésével azonban nemcsak a frekvenciaspektrumnak egy közelítését (becslés) lehet előállítani, hanem a sorfejtési együtthatókból képzett  $\mathbf{e}$  vektort behelyettesítve a direkt feladat (8) összefüggésébe számított időfüggvény is előállítható, amely a spektrum ismeretében végrehajtott inverz Fourier-transzformáció eredményének tekinthető. Ennek segítségével az időtartományban kétféle adattávolságot definiálhatunk. Egyrészt számíthatjuk a „mért” (zajjal terhelt szinte-





12. ábra. Az  $I^{z1}$  jel jel LSQ-FT módszerrel kapott frekvenciaspektruma

Fig. 12. The two parts of the LSQ-FT-computed frequency spectrum of signal  $I^{z1}$



13. ábra. A frekvenciatartománybeli eltérésjellemző  $D_f$  értékének alakulása az  $a$  és  $M$  paraméterek függvényében az  $I^{z1}$  jel esetében

Fig. 13. The dependence of the model distance  $D_f$  on the parameters  $a$  and  $M$  for signal  $I^{z1}$

tikus) adatok és a spektrum ismeretében számított adatok távolságát,

$$d_t = \sqrt{N^{-1} \sum_{k=1}^N (x_k^{(\text{mért})} - x_k^{(\text{becsült})})^2}, \quad (26)$$

amely az adatrendszert terhelő zajt jellemzi. Ennél érdekesebb az inverz Fourier-transzformációval számított adatrendszer és az elméleti formula alapján számított (zajmentes) adatrendszer közötti távolság,

$$D_t = \sqrt{N^{-1} \sum_{k=1}^N (x_k^{(\text{egzakt})} - x_k^{(\text{becsült})})^2}, \quad (27)$$

mivel ez a skalár arra jellemző, hogy az inverzióval előállított spektrumon számított adatrendszer mennyiben „szabadult meg” a zajtól, azaz az inverz Fourier-transzformációval milyen mértékű zajnyomás valósítható meg.

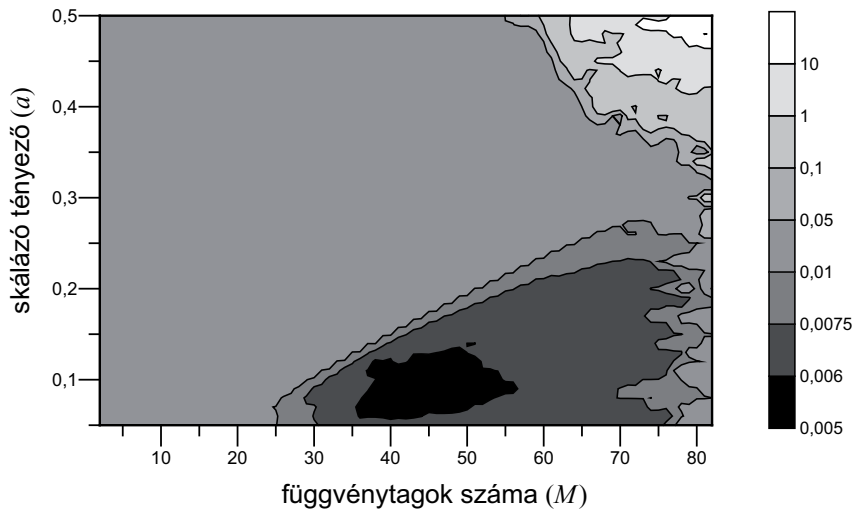
### Az LSQ-FT módszer vizsgálata Gauss-eloszlást követő zajjal terhelt jelek esetében

Mint azt az előzőekben már bemutattuk, az LSQ-FT módszer túlhatározott, lineáris inverz feladat megoldására épül. Az eljárás zajérzékenységének vizsgálatára zajjal terhelt

adatrendszereket generáltunk  $\sigma = 0,1$  szórású Gauss-eloszlást követő  $z1$  hiba értéksort hozzáadva a már bemutatott két jel időtartománybeli adatsorához. A 10. ábrán látható az  $I$  jel zajos változatának ( $I^{z1}$ ) időtartománybeli képe, melynek a hibamentes adatrendszertől ( $I$ ) való eltérését jellemző adattávolság: 0,09405. Ennek a jelnek a DFT-vel számított  $X_{I,(z1)}^{(\text{DFT})}$  frekvenciaspektrumát mutatja be a 11. ábra. Az elméleti frekvenciaspektrumhoz viszonyított eltérést jellemző érték (modelltávolság):  $D_{f,1,(z1)}^{(\text{DFT})} = 0,00873$ . Mivel az inverz DFT a bemenő jelet egzaktul előállítja, az adattérben definiált távolság  $D_{t,1,(z1)} = 0,09405$ .

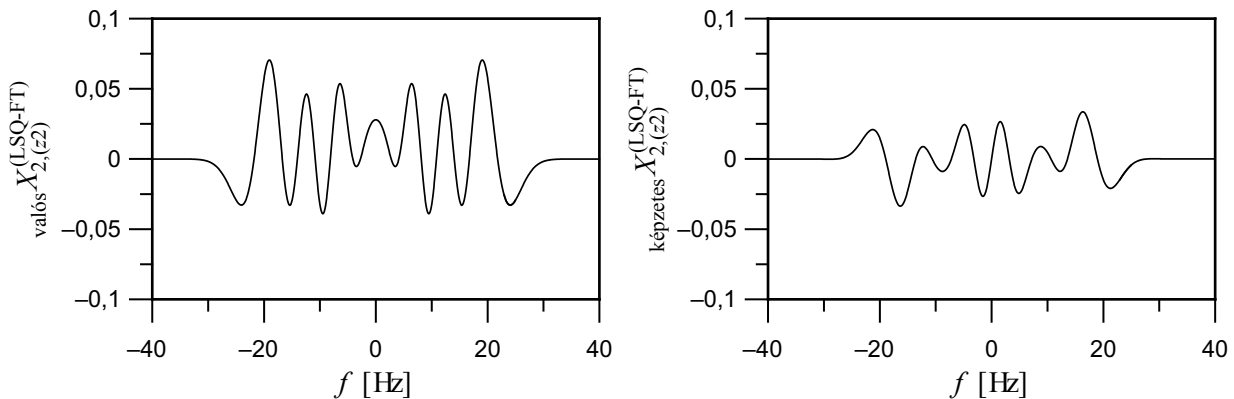
Az LSQ-FT módszer alkalmazásával kapott eredményt a 12. ábrán mutatjuk be. Az elméleti spektrumot szemléltető 9. ábrával összevetve vizuálisan alig észlelhető különbség. A DFT által ugyanezen adatrendszeren nyújtott eredményhez képest jelentős javulás látható, noha a frekvenciatérben számított távolság csupán egy kettes faktossal javult:  $D_{f,1,(z1)}^{(\text{LSQ-FT})} = 0,00398$ .

Az LSQ-FT spektrumot felhasználva, a direkt feladat megoldásával időtartományba visszszámított adatsor eltérése is jelentősen lecsökkent:  $D_{t,1,(z1)}^{(\text{LSQ-FT})} = 0,01781$ , amely a DFT-hez képest mintegy 5-ször kisebb. Ezek az eredmények tehát összhangban vannak azzal az elvárással, miszerint az



14. ábra. Az LSQ-FT-vel kapott  $D_f$  modelltávolság függése az  $a$  és az  $M$  paraméterektől a  $\Pi^{z1}$  jel esetében

Fig. 14. The dependence of the model distance  $D_f$  obtained by LSQ-FT on the parameters  $a$  and  $M$  for signal  $\Pi^{z1}$



15. ábra. A  $\Pi^{z2}$  adatrendszer LSQ-FT módszerrel kapott frekvenciaspektruma

Fig. 15. The two parts of the LSQ-FT-computed frequency spectrum of the dataset  $\Pi^{z2}$

LSQ-FT módszer – amely a Fourier-transzformációt mint túlhatározott inverz feladatot kezeli – lehetőséget teremt a zaj hatásának csökkentésére.

A 13. ábrán a frekvenciatartománybeli eltérésjellemző ( $D_f$ ) értékének az  $a$  és  $M$  paraméterektől való függése tanulmányozható. A térképen jól látható, hogy a legkedvezőbb frekvenciaspektrum-közelítést eredményező fekete tartomány kiterjedése ugyan egészen kicsi, de a közelítés szempontjából szintén jónak minősülő sötétszürke terület már jóval nagyobb. Ennek elhelyezkedése és alakja arra enged következtetni, hogy egyrészt a skálázó tényező viszonylag széles tartományban képes jó eredményt biztosítani, másrészt a kevesebb Hermite függvénytag használata a spektrális modell kialakításában ismét előnyösebbnek mutatkozik a hibákkal terhelt adatrendszerek esetében.

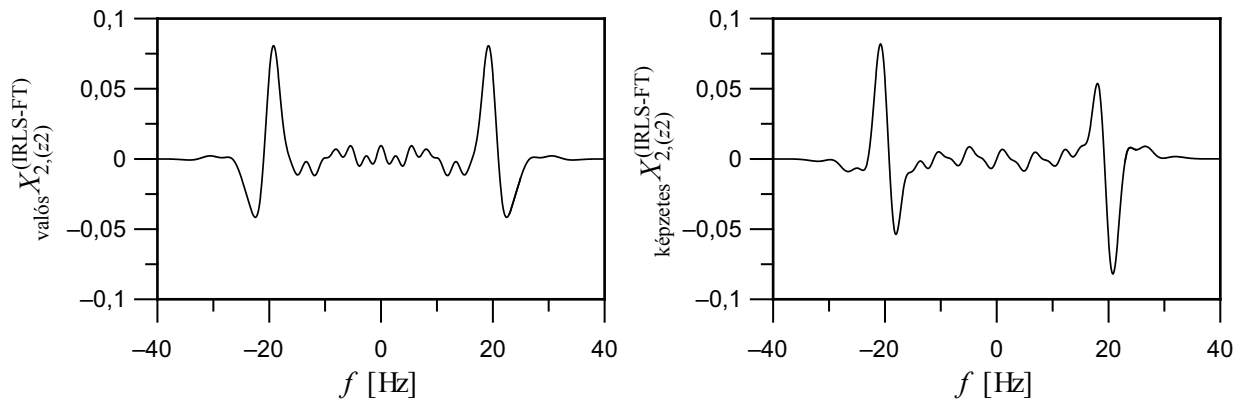
A  $\Pi$  jel  $z1$  zajjal terhelt változatánál ( $\Pi^{z1}$ ) az időtartománybeli eltérésjellemző 0,1032 értéket vett fel. A DFT alkalmazása az 5. ábrán már bemutatott spektrumot eredményezte  $D_{f,2,(z1)}^{(DFT)} = 0,01075$  modelltávolsággal. Az LSQ-FT módszer alkalmazásával kapott spektrum frekvenciatartománybeli eltérés értéke (az első jelnél tapasztalható hasonlóan) nagyjából fele akkora:  $D_{f,2,(z1)}^{(LSQ-FT)} = 0,005479$  ( $a = 0,08$ ,  $M = 43$  paraméterek mellett). Az időtartománybeli

illeszkedés is jelentősen javult:  $D_{f,2,(z1)}^{(LSQ-FT)} = 0,03468$ . A frekvenciatartománybeli eltérésjellemzőnek az  $a$  és  $M$  paraméterektől való függését mutatja be a 14. ábra.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából biztató, hogy a  $D_{f,2,(z1)}^{(LSQ-FT)} < 0,0075$  relációnak eleget tevő (kedvező eredményeket produkáló) sötét terület viszonylag nagy. Az elvégzett vizsgálatok eredményei egyértelműen mutatják, hogy Gauss-eloszlású zajjal terhelt adatok esetén az LSQ-FT módszer sokkal kevésbé zajérzékeny, mint a DFT eljárás.

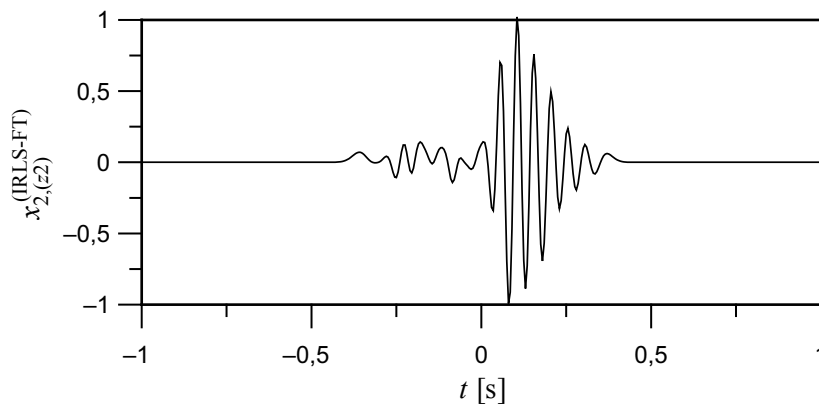
### Robusztus Fourier-transzformáció az iteratív újrasúlyozás módszerével: IRLS-FT

A legkisebb négyzetek elve (LSQ) olyan inverz feladatok esetében vezet optimális megoldáshoz, amelyeknél a feldolgozandó jelet terhelő zaj Gauss-eloszlást követ. A gyakorlati adatrendszerek igen sokszor ettől eltérő, sőt olykor nem is ismert eloszlású zajjal terhelték. Ilyen esetekben az LSQ módszer nem ad optimális eredményt. Fontos szerepet kapnak a geofizikai inverzióban azok az eljárások, amelyek erősen zajos vagy ún. kiugró értékeket (*outlier*) tartalmazó adat-sorok esetében is jó eredményt szolgáltatnak.



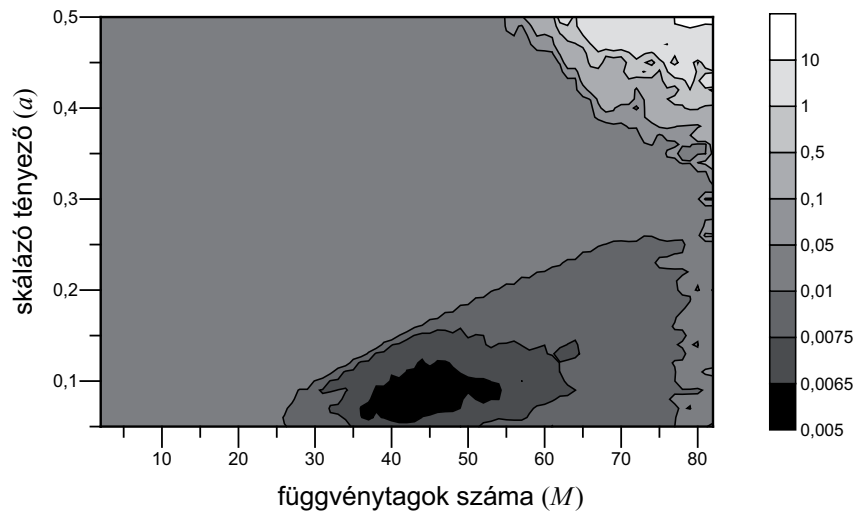
16. ábra. A II.<sup>22</sup> adatrendszer IRLS-FT módszerrel kapott frekvenciaspektruma

Fig. 16. The two parts of the IRLS-FT-computed frequency spectrum of the dataset II<sup>22</sup>



17. ábra. A II.<sup>22</sup> adatrendszer IRLS-FT-spektruma alapján számított időfüggvény

Fig. 17. The time function determined from the IRLS-FT-computed frequency spectrum of the dataset II<sup>22</sup>



18. ábra. Az IRLS-FT esetén kapott  $D_f$  modelltavolság függése az  $a$  és az  $M$  paramétereiktől, a II.<sup>22</sup> jel esetében

Fig. 18. The dependence of the model distance  $D_f$  obtained by IRLS-FT on the parameters  $a$  and  $M$  for signal II<sup>22</sup>

Erősen zajos (nem Gauss-eloszlású II.<sup>22</sup>) adatrendszert úgy állítottunk elő, hogy a 4. ábrán bemutatott II.<sup>21</sup> adatrendszer véletlenszerűen kiválasztott 10%-át további – az előzőhöz képest jóval nagyobb ( $\sigma = 2$ ) szórású – Gauss-eloszlású zajjal terheltük. Így kaptuk a 6. ábrán korábban már bemutatott II.<sup>22</sup> adatrendszert. Ennek rendkívül zajos –

fizikai hatásokat alig tükröző – DFT-spektrumát a 7. ábrán mutattuk be. A zaj hatására az elméleti jelhez képest megjelenő eltérés jellemzője időtartományban  $D_{t,2,(z2)} = 0,63563$ , frekvenciatartományban pedig  $D_{f,2,(z2)}^{(DFT)} = 0,062227$ . Ezek az értékek az II.<sup>21</sup> adatrendszerénél tapasztaltakhoz képest lényeges növekedést mutatnak.

A legkisebb négyzetek elvét alkalmazó LSQ-FT módszer ennél a jelnél  $D_{f,2,(z2)}^{(LSQ-FT)} = 0,026737$  frekvenciatartománybeli eltérést produkált ( $a = 0,05$  és  $M = 18$  előzetesen beállított paraméterek mellett). Ez a megoldás az időtartományba visszazámított adatsorra vonatkozóan  $D_{t,2,(z2)}^{(LSQ-FT)} = 0,16894$  adattávolság-értéket eredményezett. A 15. ábrán bemutatott LSQ-FT-spektrum – bár a 7. ábrához képest sokkal tisztább – a 2. ábrán látható elméleti spektrumot igen durván közelíti. Ez nem meglepő, hiszen az LSQ módszer csupán Gauss-eloszlású zajt hordozó adatrendszerek inverziójánál ad jó (optimális) eredményt.

A korábbiakban bevezetett Cauchy-súlyokkal definiált (14) norma minimalizálását IRLS módszerrel megvalósító inverziós eljárást a Fourier-transzformált inverziós előállítására is alkalmazhatjuk. Ez a módszer a 6. ábrán látható adatrendszer IRLS-FT inverziójával a 16. ábrán bemutatott spektrumot adja. Ez az eredmény a 7. ábra DFT-spektrumához képest rendkívüli javulást tükröz. A modell-távolság  $D_{f,2,(z2)}^{(IRLS-FT)} = 0,005984$ , amely a DFT-nél kapott értéknél több mint 10-szer, az LSQ-FT-hez viszonyítva pedig 4,5-ször kisebb.

Az IRLS-FT módszer hatékonyságát bizonyítja az is, hogy az IRLS-FT-spektrum felhasználásával kapott időfüggvény távolsága az egzakt (zajmentes) jeltől  $D_{t,2,(z2)}^{(IRLS-FT)} = 0,03782$ . Ennek jelentősége akkor nyilvánvaló, ha összehasonlítjuk az IRLS-FT alapján kapott, a 17. ábrán látható jelet a zajmentes jellel (1. ábra) a kiugró zajjal terhelt (az IRLS-FT bemenő adatrendszereként használt, a 6. ábrán bemutatott) jelet. Az ábrák alapján megállapíthatjuk, hogy az IRLS-FT algoritmus jelentős zajelnyomási kapacitással rendelkezik.

A 18. ábra mutatja be az IRLS-FT módszer alkalmazásával kapott eredmények minősítésére szolgáló frekvenciatartománybeli eltérésjellemző (modell-távolság) értékének változását az  $a$  és  $M$  előzetesen beállítandó modellparaméterek függvényében. A jó inverziós eredményt kínáló paraméter-tartomány – a  $D_{f,2,(z2)}^{(IRLS-FT)} < 0,0075$  relációval megadható terület – ugyan lecsökkent a 14. ábrán láthatóhoz képest, azonban még így is viszonylag tág lehetőséget ad az előzetesen beállítandó modellparaméterek értékének kedvező megválasztására.

## Összefoglalás

A Fourier-transzformáció (FT) nagyon hasznos problémamegoldó eszköznek minősül a jelfeldolgozás területén, azonban nem lehet egzakt módon számítógépi algoritmus formájába önteni. Az FT speciális esetének tekinthető diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) alkalmazásával válik lehetővé a számítógépen is végrehajtható áttérés az időtartományból frekvenciatartományba. A DFT nagyon jó eredményeket ad kedvező jel/zaj-viszonnyal jellemezhető esetekben. Nagyon érzékenyen reagál ugyanakkor az adatokat terhelő hibák megnövekedésére. A Fourier-transzformáció inverziós feladatra történő visszavezetésével lehetővé válik a

méréseket terhelő zajok hatásának csökkentése a frekvenciaspektrum számításakor. A megoldandó inverz feladat középpontjában álló spektrális modell kialakítása az Hermite függvényrendszer szerinti sorfejtésen alapul, és a sorfejtési együtthatók játsszák a diszkrét modellparaméterek szerepét.

A sorfejtésen alapuló modell ismeretlen együtthatóinak meghatározása túlhatározott, lineáris inverz feladat megoldására vezethető vissza. Kétféle inverziós feladatmegoldó eszköz alkalmazásával az inverz Fourier-transzformáció (I-FT) két változatát mutattuk be. A legkisebb négyzetek elve szerinti Fourier-transzformáció (LSQ-FT) véges energiájú, determinisztikus, Gauss-eloszlású zajt hordozó jelek esetében bizonyult hatékonynak és a DFT-hez képest lényegesen kevésbé zajérzékenynek. Erősen zajos, kiugró hibákkal terhelt adatrendszer esetén az LSQ-FT nem bizonyult kielégítőnek, helyette a jelen dolgozatban bemutatott IRLS-FT módszer ajánlható, amely – amellet, hogy elegendően pontos spektrumot eredményez – jelentős zajelnyomó képességgel is rendelkezik.

Összességében elmondható, hogy megfelelően felvett spektrális modell és jól megválasztott inverziós feladatmegoldó eszköz alkalmazása esetén az inverz Fourier-transzformáció nagyon előnyös zajhatást csökkentő tulajdonságot mutatott mind az idő-, mind a frekvenciatartományra vonatkozóan.

## Köszönetnyilvánítás

A cikkben bemutatott eredményekhez kapcsolódó kutatást az Országos Tudományos Kutatási Alap az OTKA T049852. és az OTKA 49479. számú projekt keretében támogatta, amit ezúton is megköszönnek a szerzők. További köszönet illeti a Magyar Tudományos Akadémiát az MTA-ME Műszaki Földtudományi Kutatócsoport létrehozásáért és támogatásáért, a kutatómunka számára nyújtott segítségért.

## HIVATKOZÁSOK

- HÜTTE 1993: A mérnöki tudományok kézikönyve. Springer Hungarica Kiadó Kft., ISBN 963 7775 50 1
- ORAN BRIGHAM E. 1974: The Fast Fourier Transform. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, ISBN 0-13-307496-X
- GALÁNTAI A., JENEI A. 2008: Numerikus módszerek. Miskolci Egyetemi Kiadó
- SCALES J. A., GERSZTENKORN A., TREITEL S. 1988: Fast Lp solution of large, sparse, linear systems: Application to seismic travel time tomography. Journal of Comp. Phys. 75, 314–333
- KORN G. A., KORN T. M. 1961: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York – Toronto – London
- GRÖBNER W., HOFREITER N. 1958: Integraltafel. Zweiter Teil. Bestimmte Integrale. Springer-Verlag, Wien und Innsbruck
- CAMPBELL G. A., FOSTER M. 1948: Fourier Integrals for Practical Applications. D. Van Nostrand Company, Inc.
- ERDÉLYI A., MAGNUS W., OBERHETTINGER F., TRICOMI F.G. 1954: Tables of Integral Transforms. Volume I, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York – Toronto – London