

A polilogaritmus függvények bevezetése a mérnöki gyakorlatba¹

ÓNODI TIBOR²

A cikk célja, hogy felhívja a figyelmet egy függvénytípusra, amelyik nagyon jól használható néhány differenciálegyenlet analitikai megoldására. Egyik ilyen példa a hőmérsékleti sugárzás adott spektrumtartományának, valamint adott tartomány fotonáramának határozott integrálja, amelyik mérnöki számításokra ugyanúgy alkalmas, mint egzakt fizikai számításra. Az utóbbit az teszi lehetővé, hogy a numerikus integrálásnál fellépő hibahalmazódás itt elkerülhető.

A szélsőértékek számítására is tartalmaz a cikk néhány példát, ugyancsak a hőmérsékleti sugárzás területéről. A függelékben két rövid, BASIC nyelven írt program segíti az elindulást.

T. ÓNODI: Adopting polylogarithmic functions for engineering practice

The purpose of this article is to draw attention to a special function type, which is very useful in the analytical solution of some differential equations. One solution is applicable to calculate a discrete range of thermal radiation spectrum and photon flow in engineering practice by analytic definite integral, as numeric drift — caused by accumulation of minor failures using finite numerical integral formulae — can be avoided. The final failure of calculation is determined by the preciscity at the upper and lower limits only.

To demonstrate the use of this function to solve engineering problem, the calculation of limited spectral range of heat radiation energy is discussed.

Methods to calculate extreme values of thermal radiation spectra are also analysed.

Moreover two short programs in appendix are attached in BASIC language.

Bevezetés

A polilogaritmus függvények érdekes módon még a komolyabb matematikai kézikönyvek látóköréből is kiesnek. Sem oktatással, sem irodalommal, sem szoftverrel nincsenek igazán alátámasztva. Az interneten is csak angol, német, francia (Jonquièrre-függvény) [3], [4] és egy kevés olasz nyelvű forrást lehet találni. Még a jelölése sem véglegesen kialakult, a PolyLog(n, x), $Li(n, x)$, $Li_n(x)$ jelölésekkel lehet találkozni. Ebben a cikkben az utolsó változat szerepel, a döntés alapja egyszerűen az irodalmi gyakoriság. Ahhoz képest, hogy ennyire ismeretlen függvénytípus, sok differenciálegyenlet megoldására alkalmas, többek között műszaki számításokban is.

A cikkben szereplő, Planck-eloszlással kapcsolatos számításokon kívül példaképpen a Debye-törvény fizikai-kémiai alkalmazása említhető.

A hiány pótlására nem okoz különösebb nehézséget egy-egy szubrutin megírása — l. pl. a *Mellékletek* részben található BASIC programokat.

A polilogaritmus függvények

A polilogaritmus függvény definíciója:

$$Li_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n} . \quad (1)$$

A polilogaritmus függvények néhány tulajdonsága:

$$\frac{dLi_n(x)}{dx} = \frac{Li_{n-1}(x)}{x} , \quad (2)$$

$$\int \frac{Li_n(x)}{x} dx = Li_{n+1}(x) , \quad (3)$$

$$Li_n(x) + Li_n(-x) = \frac{Li_n(x^2)}{2^{n-1}} . \quad (4)$$

A (4) összefüggés alkalmazható a konvergencia gyorsítására. A levezetés mellőzésével:

$$Li_n(x) = -Li_n(-x) - \frac{Li_n(-x^2)}{2^{n-1}} - \frac{Li_n(-x^4)}{(2^{n-1})^2} - \frac{Li_n(-x^8)}{(2^{n-1})^3} - \dots - \frac{Li_n(-x^{2^k})}{(2^{n-1})^k} . \quad (5)$$

Miután a fenti összefüggés tagjai alternáló sorból állnak, minden egyes tag hibája kisebb, mint a legutolsó tag értéke. Ezáltal az összesített sor hibája is könnyen behatárolható.

A láncszabályból következően:

$$\frac{dLi_n(e^x)}{dx} = Li_{n-1}(e^x) , \quad (6)$$

$$\frac{dLi_n(x^m)}{dx} = \frac{mLi_{n-1}(x^m)}{x} , \quad (7)$$

$$\frac{dLi_n(\sin(x))}{dx} = \text{ctg}(x) Li_{n-1}(\sin(x)) , \quad (8)$$

$$\frac{dLi_n(\cos(x))}{dx} = -\text{tg}(x) Li_{n-1}(\cos(x)) , \quad (9)$$

$$\int Li_n(e^x) dx = Li_{n+1}(e^x) , \quad (10)$$

¹ Beérkezett: 2007. szeptember 19-én

² onodi.tibor@upcmail.hu

$$\int \frac{\text{Li}_n(x^m)}{x} dx = \frac{\text{Li}_{n+1}(x^m)}{m} . \quad (11)$$

A polilogaritmusok sora az (1) egyenlet alapján nulla és negatív kitevőjű sorokra is értelmezhető. Megjegyzendő, hogy nem egész számok és komplex számok irányába is kiterjeszthető, de ez nem a cikk tárgya.

A polilogaritmusok szokásos elnevezése főleg a francia irodalomban a Jonquiére-integrál.

Az alábbi függvényt szokták még dilogaritmusként, vagy Spence-függvénynek nevezni:

$$\text{Li}_2(x) = - \int \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \sum_1^{\infty} \frac{x^k}{k^2} . \quad (12)$$

Egyik ismert függvény:

$$\text{Li}_1(x) = -\ln(1-x) . \quad (13)$$

A 0 és kisebb kitevőjű polilogaritmusok racionális függvényekkel is kifejezhetők:

$$\text{Li}_0(x) = \frac{x}{1-x} , \quad (14)$$

$$\text{Li}_{-1}(x) = \frac{x}{(1-x)^2} , \quad (15)$$

$$\text{Li}_{-2}(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} , \quad (16)$$

$$\text{Li}_{-3}(x) = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} , \quad (17)$$

$$\text{Li}_{-4}(x) = \frac{x^4+11x^3+11x^2+x}{(1-x)^5} , \quad (18)$$

$$\text{Li}_{-5}(x) = \frac{x^5+26x^4+66x^3+26x^2+x}{(1-x)^6} , \quad (19)$$

$$\text{Li}_{-6}(x) = \frac{x^6+57x^5+302x^4+302x^3+57x^2+x}{(1-x)^7} , \quad (20)$$

$$\text{Li}_{-7}(x) = \frac{x^7+120x^6+1191x^5+2416x^4+1191x^3}{(1-x)^8} + \frac{120x^2+x}{(1-x)^8} , \quad (21)$$

$$\text{Li}_{-8}(x) = \frac{x^8+247x^7+4293x^6+15619x^5+15619x^4}{(1-x)^9} + \frac{4293x^3+247x^2+x}{(1-x)^9} , \quad (22)$$

$$\text{Li}_{-9}(x) = \frac{x^9+502x^8+14608x^7+88234x^6}{(1-x)^{10}} + \frac{156190x^5+88234x^4+14608x^3+502x^2+x}{(1-x)^{10}} . \quad (23)$$

Ha $n \geq 2$, akkor 1 is az értelmezési tartomány része. Ebben az esetben a Riemann $\zeta(n)$ (zéta) függvényhez jutunk:

$$\text{Li}_n(1) = \zeta(n) , \quad (24)$$

a Dirichlet-éta pedig:

$$\text{Li}_n(-1) = \zeta(n)(2^{1-n} - 1) = \eta(n) . \quad (25)$$

A polilogaritmus segítségével lehetséges az alábbi határozott integrálok megoldása, mivel

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} = \text{Li}_0(e^{-x}) , \quad (26)$$

$$- \int \frac{1}{e^x-1} dx = \text{Li}_1(e^{-x}) , \quad (27)$$

$$- \int \frac{x}{e^x-1} dx = x \text{Li}_1(e^{-x}) + \text{Li}_2(e^{-x}) , \quad (28)$$

$$- \int \frac{x^2}{e^x-1} dx = x^2 \text{Li}_1(e^{-x}) + 2x \text{Li}_2(e^{-x}) + 2 \text{Li}_3(e^{-x}) , \quad (29)$$

$$- \int \frac{x^3}{e^x-1} dx = x^3 \text{Li}_1(e^{-x}) + 3x^2 \text{Li}_2(e^{-x}) + 6x \text{Li}_3(e^{-x}) + 6 \text{Li}_4(e^{-x}) . \quad (30)$$

A $-\int \frac{x^n}{e^x-1} dx$ típusú integrálok sora folytatható az alábbi háromszöggel (a Pascal-háromszög mintájára):

1							
1	1						
1	2	2					
1	3	6	6				
1	4	12	24	24			
1	5	20	60	120	120		
1	6	30	120	360	720	720	
1	7	42	210	840	2520	5040	5040
$\frac{n!}{n!}$	$\frac{n!}{(n-1)!}$	$\frac{n!}{(n-2)!}$			$\frac{n!}{2!}$	$\frac{n!}{1!}$	$\frac{n!}{0!}$

Az $x^3/(e^x-1)$ alakú egyenlet szerepet kap a hőmérsékleti sugárzás résztartományainak a számításánál, mivel a Planck-féle eloszlás a frekvencia függvényében erre az alakra redukálható.

Az integrációs konstans számítására az a megoldás, hogy $x=0$ helyen a második és harmadik tag értelemszerűen 0, az első tag viszont $0 \cdot \infty$ típusú határozatlanság, ami határérték-számítás után szintén 0-nak bizonyul. Az utolsó tag viszont a polilogaritmus függvények alapján, ha $x=0$, akkor $e^{-x} = 1$, és csak ez a tag különbözik nullától.

Hasonlóképpen az $\int \frac{x^n}{e^x+1} dx$ típusú integrálok is kiszámíthatók, mivel

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - e^{-4x} \dots \pm e^{-nx} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-kx} = -\text{Li}_0(-e^{-x}) . \quad (31)$$

Az $\int \frac{x^n}{e^x - 1} dx$ típusú integrálok $0 - \infty$ tartományra a következő értékeket adják:

$$C_n = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = n! \cdot \zeta(n+1) , \quad (32)$$

ahol a $\zeta(n)$ azonos a Riemann-zétával, tehát $n = 3$ esetén

$$C_3 = 3! \cdot \zeta(4) = \frac{6\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15} . \quad (33)$$

Ezek után bizonyításképpen álljon itt néhány példa, hogy üres matematikai játék mellett gyakorlati feladatokra is alkalmas ez a függvénytípus. Az alkalmazáshoz azonban a hőmérsékleti sugárzással kapcsolatban néhány alapfogalom felidézése szükséges annak a tisztázásához, hogy mit is számolunk.

A hőmérsékleti sugárzás tulajdonságai

Először a probléma ismertetése:

Minden test a felületi hőmérséklet függvényében elektromágneses sugárzás formájában energiát sugároz a környező térbe. Az elektromágneses sugárzás spektruma a kozmikus sugárzástól a hosszúhullámú rádióhullámokig folytonosan értelmezhető, ugrásszerű változás nincs a szomszédos hullámhossztartományok közt.

Az elektromágneses sugárzás adott esetben nagyobb lehet, mint a (34) és (35) egyenletekben adott, ez azonban nem lehet termikus eredetű. Ilyen pl. a mesterséges rádió-sugárzás, a röntgensugárzás, a természetes gamma-sugárzás, fénycső stb. Ezek egy részét úgy is nevezik, hogy „hideg fény”. Senkinek nem jut eszébe a TV egy tábortűz jeleneténél, hogy a képernyő előtt szalonnát süssön. De ha a fény gerjesztésének az oka hőmérsékleti eredetű, mint pl. a lángfestés, akkor az emissziós sávok energia-eloszlása sehol nem lépheti át a hőmérsékleti sugárzás burkológörbéjét.

„Tudományos”, iskolásoknak szánt fogalomgyűjteményben: “Infrared radiation is also called <heat radiation>”. Itt jön a fogalomzavar. A hőmérsékleti sugárzás egy spektrumeloszlást jelent, és nem tartományt. Hőmérsékleti sugárzás például a napfény vagy az ívfény is. A lézer viszont eleve nem kezelhető a hőmérsékleti sugárzás részeként sem, még a szén-dioxid lézer sem, mivel a statisztikai véletlen összes feltétele hiányzik. A szinkron hullámfront és a szigorúan egy síkba eső polarizáltság ezt eleve kizárja. A legfontosabb pedig, hogy nincs sávszélessége, tehát az energia-eloszlásnál a nullával való osztás összes problémája és ellentmondása fellép.

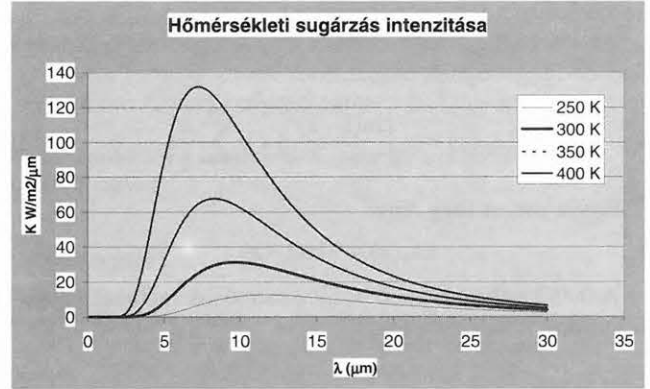
Hőmérsékleti sugárzás tehát a teljes spektrumtartományban hőmérsékleti eredetű és elektromágneses sugárzás.

A fekete test hőmérsékleti sugárzásának hullámhossz szerinti energia-eloszlását Max PLANCK adta meg az alábbi

képlettel:

$$\frac{dE(\lambda, T)}{d\lambda} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} . \quad (34)$$

Ez a megszokott diagram a hullámhossz függvényében, képe az 1. ábrán látható.



1. ábra. A hőmérsékleti sugárzás intenzitása

Fig. 1. Intensity of the thermal radiation

Ha csak a hőmérsékletet változtatjuk, a hőmérsékletek diagramvonalai soha nem metszik egymást. Egy magasabb hőmérsékletű test minden hullámhosszon több energiát bocsát ki.

A skála bármilyen transzformációjánál tekintettel kell lenni a láncszabályra. Ennek egyik következménye az is, hogy más skálát alkalmazva (frekvencia szerinti, logaritmus stb.) a maximumok is eltolódnak:

$$\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}$$

A (34) összefüggés ismert a rezgésszám függvényében is:

$$v = \frac{c}{\lambda} , \quad dv = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda ,$$

ezért

$$\frac{dE(v, T)}{dv} = \frac{2\pi}{c^2 h v^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h v}{kT}} - 1} . \quad (35)$$

A dimenzió nélküli rezgésszám

A (35) egyenlet a gyakorlati használathoz egyszerűsíthető a dimenzió nélküli frekvencia bevezetésével:

$$x = \frac{h v}{kT} = \frac{N_A h v}{RT} , \quad dx = \frac{h}{kT} dv . \quad (36)$$

(Közbevetőleges megjegyzés: a $h v$ szorzat az egyes fotonok energiáját jelenti, az RT szorzat pedig érdekes kapcsolatot jelent a gáztörvényekkel, és ez a kapcsolat a hőkapacitás formájában létezik is. De ez most nem a cikk tárgya.)

Felmerülhet a kérdés, hogy mire jó egy ilyen, első pillanatra bonyolultnak tűnő fogalmat bevezetni. A válasz pedig az, hogy sokkal könnyebb vele a számolás, miután a spektrális eloszlás tartományait csak egyszer kell ki-

számolni, aztán ez a régi függvénytáblázatok módjára, a spektrumok hasonlóságát kihasználva, egyszerű transzformációval könnyen kezelhető. De ahogy mostanában már senki nem használja a négyjegyű logaritmustáblát (a legol-

csóbb számológépek is tartalmaznak ilyen függvényeket), ugyanúgy az 1. táblázat is csak a szemléltetés és gyakorlás céljára jó.

A pont tulajdonsága Property of point	$\lambda_i T$ (μmK)	$x = \frac{h\nu}{kT}$	$\frac{\lambda_i}{\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \max\right)}$
$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \max$	2897,8	4,965114	1,000000
$\frac{\partial E}{\partial \nu} = \max$	5099,4	2,821439	1,759781
$\frac{\partial E}{\partial \ln \lambda} = \max$	3663,9	3,926904	1,264384
$E(0-\lambda) = 1\%$	1447,9	9,937051	0,4996532
$E(0-\lambda) = 25\%$	2897,5	4,965526	0,999910
$E(0-\lambda) = 50\%$	4107,3	3,503019	1,417372
$E(0-\lambda) = 75\%$	6148,1	2,340186	2,12166
$E(0-\lambda) = 99\%$	22884,3	0,628727	7,897039
* $\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{\max}{2}$	1777,0 5265,2	8,096616 2,732600	0,613224 1,816965
* $\frac{\partial E}{\partial \nu} = \frac{\max}{2}$	2658,7 12430,3	5,411549 1,157469	0,917489 4,289564
* $\frac{\partial E}{\partial \ln \lambda} = \frac{\max}{2}$	2117,4 7395,1	6,794968 1,945570	0,730692 2,551970
$\lambda T \left(x = \frac{h\nu}{kT} = 1\right)$	14387,686	1,000000	4,965038
Fotonfluxus maximumai:			
$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \max$	3663,9	3,926904	1,264384 $\left(\frac{\partial E}{\partial \ln \lambda} = \max\right)$
$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \max$	9028,3	1,593624	3,116116
$\frac{\partial \Phi}{\partial \ln \lambda} = \max$	5099,4	2,821439	1,759781 $\left(\frac{\partial E}{\partial \nu} = \max\right)$

1. táblázat. A hőszugárzás energia (E) és fotonáram (N_f) eloszlásának jellegzetes pontjai. * — félértékek az adott skálán, azaz az ordináta a maximum fele

Table 1. Characteristic points of energy (E) and photon flow (N_f) distribution of thermal radiation. * — half value of the given scale i.e. ordinate is half of maximum

Ez a dimenzió nélküli változó a későbbi számításokban nagyon hasznos lesz. A (35) egyenlet ezután a következőképp alakul:

$$E = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \cdot \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (37)$$

A fenti integrál teljes tartományra számított integrálja ismert, (33) egyenlet alapján

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (38)$$

A (37) és (38) egyenletekből az állandókra az alábbi összevonást alkalmazva

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \quad (39)$$

Ez az ismert Stefan-Boltzmann állandó, ami tehát nem független a többi kvantummechanikai állandótól.

Ezek után az ideális hőmérsékleti sugárzás energia-kibocsátása egységnyi felületen a félgömb irányába (2π szteradián szögterományba):

$$E = \sigma T^4 \quad (40)$$

Tehát minden test az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányosan hőszugárzást bocsát ki. A valóságos testek esetén figyelembe kell venni az emisszióképességet. Egyszersmind az alábbi (41) képlet az első, amellyel gyakran lehet találkozni az energetikai számításokban. Itt

azonban meg kell állni a levezetésben, mert ennek a használatára a gyakorlati számításban inkorrekt. Ez ugyanis az abszolút fekete test sugárzása lenne. Ilyen pedig nincs. Külön irodalma van, hogy hogyan lehet ezt megközelíteni.

Az irodalmi hivatkozásokban gyakran szereplő abszolút fekete test csupán fizikai absztrakció, azaz egy olyan elvont fogalom, ami ha létezne, minden fényt elnyelne. Az abszolút fekete testet arról lehet felismerni, hogy csak akkor látható, ha a hátteret kitakarja. A valóságban legjobban hasonlít rá a barlang szája. Példaképpen a Hold albedója 7%, azaz a látható tartományban az abszorpciós együtthatója $\alpha = 0,93$, tehát elég sötét, a Földhöz képest körülbelül egyötödnyi fényt ver vissza felületegységként. Ehhez képest elég fényesen látszik. Abszolút fekete testként csak napfogyatkozáskor érzékelnénk, vagy a csillagtakarások révén. De még a teljes holdfogyatkozáskor is kap annyi fényt a földi légkör szórt fényéből, hogy nagyon szépen vöröslök az égbolton.

A fekete test hősugárzása ugyanilyen absztrakció. Modellként a kemenceszáj hősugárzása szolgál (nem azért, mert kormos, hanem mert üreg hőmérsékleti sugárzása). A hősugárzást, illetve a sugárzás elnyelődését ehhez az eszményi tulajdonságú testhez viszonyítjuk. Úgy is lehet mondani, hogy az adott hőmérsékleten az összes hősugárzó test energiaspektrum-maximumának a burkológörbéje.

A legújabb mérések szerint a kozmikus háttérsugárzás 2,725 K hőmérsékletű ideális — vagy legalábbis ettől ma még kimérhetetlenül eltérő — fekete test sugárzásának felel meg [7]. A magyarázat egyszerű: a világűr is üreg. Meg kell adni tehát a valóságos test feketeségi fokát, ez pedig az emissziós együttható (ε):

$$E = \varepsilon \sigma T^4, \quad (41)$$

ahol $\varepsilon < 1$.

Fontos figyelembe venni, hogy az emisszióképesség csak az abszolút fekete test esetében hagyható el. Ezt az esetet közelíti pl. a magas hőmérsékletű plazma sugárzása. De ismert, hogy a Nap sugárzása is eltér az ideális fekete eloszlástól, mert olyan elnyelési sávok vannak benne, amelyeket már a XIX. század elejének technikájával is ki lehetett mutatni [WOLLASTON 1802, FRAUNHOFER 1814].

Az emissziós és abszorpciós együtthatókkal kapcsolatban a levezetést mellőzve, feltétlenül meg kell említeni a Kirchhoff-törvényt:

$$\alpha(\lambda) = \varepsilon(\lambda). \quad (42)$$

Eszerint az emissziós és abszorpciós együttható minden hullámhosszon egyenlő. Úgy is kifejezhető, hogy azonos! Ez a törvény tulajdonképpen azt mondja ki, hogy a sugárzás sem sértheti a termodinamika II. főtételét, azaz a hő hidegebb testről melegebb testre sugárzás formájában sem terjedhet. Mellesleg ez rögtön lehetővé is tenné egy perpetuum mobile létrehozását. A Kirchhoff-törvény csak az azonos hullámhosszú sugárzásokra vonatkozik. Különböző hullámhosszakon tehát eltérhet (és el is tér) az abszorpciós, ill. emissziós együttható, azaz színes testeknél (tkp. minden valóságos test színes):

$$\alpha(\lambda_1) \neq \varepsilon(\lambda_2). \quad (43)$$

A fenti egyenlőtlenség sem teszi jogossá az olyan levezetéseket, amelyek úgy indulnak, hogy a besugárzásnál figyelembe vesszük az abszorpciós együtthatót, ami fogal-

milag azonos az albedó komplementerével, a kisugárzást viszont elintézzük a fekete testre vonatkozó törvénnyel. Ez olyan, mintha a gázt reális gázként nyomnánk össze, és ideális gázként expandáltatnánk. Ez nemcsak az energia-, hanem az anyagmegmaradás elvét is sértené.

A számításokban gyakran szereplő szürke test, amelyre $\alpha = \varepsilon$, ugyancsak a számítás könnyítésére alkalmazott absztrakció. A fekete és fehér testekkel ellentétben a szürke test a gyakorlatban fizikai paradoxon nélkül is elképzelhető. Legjobb eredményt az adja, amelynél hőmérséklettől függő teljes spektrumra integrált abszorpciós és emissziós együtthatókkal számolunk. Itt is igaznak kell lenni azonban, hogy

$$\alpha(T) = \varepsilon(T). \quad (44)$$

De hogy ne legyen ilyen egyszerű, lehet, hogy az emissziós tényező adott hőmérsékleten értelmét veszti. Például a jég abszorpciós tényezője jól mérhető a napfény spektrumában, de értelmetlen a feltételezés, hogy milyen lenne az emissziós tényezője 6000 K hőmérsékleten.

Ezt a közelítést alkalmazzuk a gázok hősugárzásánál (és abszorpciójánál) is, annak ellenére, hogy a gázok infravörös színeke jellegzetesen vonalas, ezeken a sávokon kívül mindegyik gáz átlátszó. Később látni fogjuk, hogy a bonyolult, hőmérséklettől, nyomástól, koncentrációtól függő transzformációs eljárások helyett a gázoknál sokkal egyszerűbb a sávzélességre vett határozott integrál alkalmazása. Eddig az volt a kifogás, hogy az integrál „zárt alakban” nem fejezhető ki. A zárt alak viszont már a matematikai filozófia világába vezet, mert akkor mitől „zárt” például egy hiperbolikus vagy akár egy exponenciális függvény? Gyakorlati szempontból tehát az a lényeg, hogy a függvényt definiálni tudjuk, és véges pontossággal véges lépésben ki lehessen számítani.

A (37) egyenletből látható, hogy ha

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{N_A h\nu}{RT} = \frac{hc}{\lambda kT} = \text{const},$$

akkor a termikus spektrum minden pontjára van egy kényelmes transzformációs eljárás, azaz a Wien-törvény a teljes spektrumra alkalmazható. Közismert alakja

$$\lambda_i T = \frac{cT}{\nu_i} = \text{const}. \quad (45)$$

Ennek alapján elég a (35) egyenlet integrálását megadott határok között egyszer elvégezni, az energia-eloszlás az összes hőmérsékletre egyszerűen számítható lesz a hullámhosszok arányos transzformációjával. Néhány jellegzetes pont látható az 1. táblázatban.

Visszautalva az 1. ábrára, a görbe alatti terület kb. Egy-negyede esik a maximumtól balra, a rövidebb hullámhosszakra.

Az energia-eloszlás számítását segíti elő a 2. táblázat. A (34) egyenlet görbe alatti területének százalékos megoszlása

olvasható le, a $\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \max$ hullámhosszat egységnek véve.

Tehát ha a hőmérséklet 289,78 K (16,63 °C), akkor a $\lambda_{\max} = 2897,8/T = 10 \mu\text{m}$, ennél rövidebb hullámhosszra esik a kisugárzott energia kb. 25%-a. A táblázatból olvashatóan spektrum energiájának 66%-a az $1,800483 \cdot \lambda_{\max}$, azaz 18 μm alatti, 34%-a ennél hosszabb hullámhosszakra esik.

	0%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
0%	0,0000000	0,4996532	0,5533772	0,5917331	0,6230777	0,6503105	0,6748170	0,6973783	0,7184827	0,7384585
10%	0,7575383	0,7758934	0,7936550	0,8109256	0,8277875	0,8443079	0,8605428	0,8765398	0,8923391	0,9079760
20%	0,9234816	0,9388832	0,9542055	0,9694706	0,9846992	0,9999099	1,0151206	1,0303476	1,0456064	1,0609123
30%	1,0762792	1,0917211	1,1072515	1,1228838	1,1386312	1,1545064	1,1705228	1,1866930	1,2030303	1,2195486
40%	1,2362610	1,2531815	1,2703245	1,2877047	1,3053372	1,3232383	1,3414239	1,3599116	1,3787193	1,3978661
50%	1,4173716	1,4372571	1,4575447	1,4782581	1,4994223	1,5210642	1,5432122	1,5658964	1,5891505	1,6130093
60%	1,6375108	1,6626955	1,6886090	1,7152983	1,7428172	1,7712212	1,8005751	1,8309472	1,8624123	1,8950554
70%	1,9289683	1,9642547	2,0010300	2,0394225	2,0795777	2,1216598	2,1658547	2,2123756	2,2614672	2,3134115
80%	2,3685365	2,4272265	2,4899368	2,5572085	2,6296935	2,7081845	2,7936571	2,8873305	2,9907556	3,1059394
90%	3,2355287	3,3831201	3,5537539	3,7547534	3,9973240	4,2996879	4,6942139	5,2460423	6,1159987	7,8970385

2. táblázat. A hősugárzás energiaeloszlása ($x = 4,96511425317/\lambda_h$)

Table 2. Energy distribution of thermal radiation ($x = 4,96511425317/\lambda_h$)

Ellenőrizhető, hogy az 5800 K hőmérsékletű Nap ($\lambda_{\max} = 2897,8/T = 0,5 \mu\text{m}$) energiájának 10%-a ultraibolya, 47%-a látható, 43%-a infravörös hullámhosszakon érkezik.

Ebben a cikkben azért λ_{\max} az alappont, mert ez az érték közismert. Tehát ha valaki a $\lambda T = 2896,6 \mu\text{mK}$ összefüggésből kiindulva a relatív hullámhossz arányában keresi az integrál értékét, annak a fenti táblázat kényelmes segédletet jelent. Az integrál pontos értékéhez még be kell szorozni a (40), illetve (41) egyenlet értékével.

Ha $x = 1$, akkor

$$\frac{hc}{\lambda kT} = 1,$$

azaz $\lambda T = \frac{hc}{k} = 0,0143876866 \text{ m}$, azaz $14387,6866 \mu\text{m}$,

így az $x = \frac{0,0143876866}{\lambda T}$ helyettesítés alkalmazható.

Néhány évtizeddel ezelőtt a fenti táblázat alapján kiváló számológépet lehetett volna szerkeszteni. De a digitális számítógépek korában ez a logarléccel együtt feleslegessé vált.

Ha valaki figyelmesen követte a polilogaritmusok integráljait, lehet, hogy ismétlésnek tűnik az alábbi okfejtés. Az is. Annak a szemléltetése, hogy hogyan vezet az út a polilogaritmusok alkalmazásához.

A fekete test sugárzásának alapfüggvényéhez az x dimenzió nélküli frekvencia, utalva a (35) és (36) képletekre, a hőmérsékleti sugárzás valamely jellemzője alapján az alábbi módon számítható:

$$x = \frac{h\nu}{kT} = \frac{N_A h\nu}{RT} = \frac{N_A h}{c\lambda RT} = 100 \frac{hcn_w}{kT} = 1,43876866 \frac{n_w}{T} = 11604,45 \frac{E_0}{T}$$

Egy adott spektrumtartományra eső energia kiszámításának kulcsa az alábbi függvény integrálása:

$$F(x) = \frac{x^3}{e^{-x} - 1} \quad (46)$$

Nagy x értékekre (rövidhullámú, azaz nagyfrekvenciájú tartomány, Wien-Planck, infrakatasztrófa) célszerűbb alak a következő:

$$F(x) = \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} \quad (47)$$

A fenti függvény $0 - \infty$ tartományra eső határozott integrálja több kézikönyvben is megtalálható, ld. (32) képlet.

Az alábbiakban néhány közelítés:

Mivel nagy x értéknél ($x > 6$) $1 - e^{-x} \approx 1$, ezért

$$\int_x^\infty F(x) dx = \int_x^\infty x^3 e^{-x} dx = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} \quad (48)$$

Az eredmény osztandó $\frac{\pi^4}{15}$ -tel.

A pontosság fokozható a következő sorfejtéssel:

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + \dots + e^{-nx} \quad (49)$$

Az integrálokat összegezve:

$$I(x) = \int_x^\infty F(x) dx = \int_x^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{x^3}{n} + \frac{3x^2}{n^2} + \frac{6x}{n^3} + \frac{6}{n^4} \right) e^{-nx} \quad (50)$$

Az eredmény itt is osztandó $\frac{\pi^4}{15}$ -tel.

A számítási módszert tovább lehet tökéletesíteni, mivel

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^3}{n} e^{-nx} = -x^3 \ln(1 - e^{-x}) \quad (51)$$

Így nagy x értékekre (rövidhullám) az integrál értéke:

$$\frac{15}{\pi^4} \int_x^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1-e^{-x}} dx = \frac{15}{\pi^4} (-x^3 \ln(1-e^{-x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3x^2}{n^2} + \frac{6x}{n^3} + \frac{6}{n^4} \right) e^{-nx}) \quad (52)$$

Kis x értékekre (hosszúhullámú tartomány, Rayleigh-Jeans, UV-katasztrófa) a fenti képletek csak határérték-számítással közelíthetők. Ha ebben a tartományban van szükség pontosabb számításra, az alábbi eljárás javasolt: mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = x, \quad (53)$$

ezért

$$\int_0^{4x} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{4x} x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3}. \quad (54)$$

Pontosabban az $x^3 e^{-x}$ és $1 - e^{-x}$ végtelen sorának hányadosát számítva és az eredményt tagonként integrálva:

$$\int_0^{4x} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{272160} - \frac{x^{11}}{13305600} + \frac{x^{13}}{622702080} \quad (55)$$

azaz

$$\int_0^{4x} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+3} B_k (-1)^k}{(2k+3) \cdot (2k)!} \quad (56)$$

Az eredmény természetesen itt is osztható $\frac{\pi^4}{15}$ -tel.

A polilogaritmus függvény használata

Integrálok:

Visszatérve a (47) egyenletre, az $\frac{1}{e^x - 1}$ a következőképpen is leírható:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} = \text{Li}_0(e^{-x}) \quad (57)$$

azaz

$$\frac{x^3}{e^x - 1} = x^3 \text{Li}_0(e^{-x}). \quad (58)$$

Az (52) képlet így a következőképpen alakul:

$$\frac{15}{\pi^4} \int_x^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \frac{15}{\pi^4} \left[x^3 \text{Li}_1(e^{-x}) + 3x^2 \text{Li}_2(e^{-x}) + 6x \text{Li}_3(e^{-x}) + 6 \text{Li}_4(e^{-x}) \right] \quad (59)$$

Az integrációs konstans számítására a (5) képlet alapján számolt peremfeltételt is alkalmazhatjuk.

Az $\frac{x^3}{e^x - 1}$ alakú egyenlet szerepet kap a hőmérsékleti

sugárzás résztartományainak a számításánál, mivel a Planck-féle eloszlás a frekvencia függvényében erre az alakra redukálható.

Az integrációs konstans számítására a megoldás, hogy $x = 0$ helyen a második és harmadik tag értelemszerűen 0, az első tag viszont $0 \cdot \infty$ típusú határozatlanság, ami határérték-számítás után szintén 0-nak bizonyul. Az utolsó tag viszont a polilogaritmus függvények alapján, ha $x = 0$, akkor $e^{-x} = 1$, és csak ez a tag különbözik nullától.

Hasonlóképpen az $\int \frac{x}{e^x - 1} dx$ típusú integrálok alkalmazására egy másik példa a fotonfluxus számítása. Miután minden egyes foton $h\nu$ energiával rendelkezik, ezért a (35) egyenletből a foton-szám-eloszlás is levezethető:

$$d\Phi(\nu, T) = \frac{dE(\nu, T)}{h\nu} = \frac{2\pi}{c^2 \nu^2} \cdot \frac{1}{e^{kT} - 1} \cdot d\nu \quad (60)$$

Átalakítva:

$$d\Phi(\nu, T) = \frac{2\pi k^2 T^2}{h^2 c^2} \cdot \frac{h^2 c^2}{k^2 T^2} \cdot \frac{1}{e^{kT} - 1} d\nu \quad (61)$$

Újra alkalmazva a $x = \frac{h\nu}{kT}$ és $d\nu = \frac{kT}{h} dx$ helyettesítéseket:

$$d\Phi(x) = \frac{2\pi k^3 T^3}{h^3 c^2} \cdot \frac{x^2}{e^x - 1} dx = C_0 T^3 \cdot \frac{x^2}{e^x - 1} dx = C_0 T^3 \cdot x^2 \text{Li}_0(e^{-x}) dx \quad (62)$$

Tehát adott hőmérsékleten a teljes spektrumot átfogó fotonfluxus:

$$\Phi(T) = C_0 T^3 \int_0^\infty x^2 \text{Li}_0(e^{-x}) dx \quad (63)$$

A fenti integrál értéke pedig a (32) képlet alapján

$$C_2 = 2! \cdot \zeta(3) = 2 \cdot 1,2020569.$$

(Megjegyzés: a $\zeta(3) = 1,2020569031$ Apéry-konstans néven is ismert.)

Ezek után a fekete test teljes spektrumú fotonárama T hőmérsékleten

$$\Phi(T) = 2 \cdot 1,2020569 \frac{2\pi k^3}{h^3 c^2} T^3 = 1,520486910^{15} T^3 = C_f T^3 \quad (64)$$

A fenti összefüggés tanulsága az, hogy akár nullához tartó energiájú kvantumokat is figyelembe véve az egységnyi felület véges számú fotont bocsát ki megadott idő alatt. A fenti összefüggésnek konkrét haszna is lehet, ha adott energia fölötti fotonok számát kell figyelembe venni valamilyen műszer hitelesítéséhez. Ez a (62) képlet határozott integrálásával szintén megoldható, miután az integrál konkrét értékei a polilogaritmus függvények segítségével már könnyen számíthatók.

Fontos megjegyezni: a hősugárzással kilépő fotonok darabszáma is véges. Tehát a végtelenül kis energiájú fotonok száma sem lesz végtelen. Ennek csak filozófiai jelentősége van, viszont az adott energiánál nagyobb fotonok darab-

száma már érdekes lehet egyes műszerek, például fotocellák érzékenységeinek és jelleggörbéjének a számításánál. Utalva a (29) egyenletre:

$$-\int \frac{x^2}{e^x - 1} dx = x^2 \text{Li}_1(e^{-x}) + 2x \text{Li}_2(e^{-x}) + 2 \text{Li}_3(e^{-x}) . \quad (65)$$

A fenti integrálok határozott integrálként is használhatók. Ha $x = 0$, akkor az első tag értéke külön indokolandó, mivel $\text{Li}_1(e^{-x}) = \infty$.

Szélső értékek számítása

A differenciálási szabályok megfelelő alkalmazásával a polilogaritmusok szélső értékek meghatározására is használhatók. Példa a frekvencia szerinti energia-eloszlás maximumának meghatározására:

$$\frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x^3 \text{Li}_0(e^{-x}) = \max , \quad (66)$$

$$3x^2 \text{Li}_0(e^{-x}) - x^3 \text{Li}_{-1}(e^{-x}) = 0 , \quad (67)$$

azaz

$$\frac{3x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{x^3 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = 0 .$$

Miután $x \neq 0$, egyszerűsíthető:

$$3 - \frac{x}{1 - e^{-x}} = 0 ,$$

$(1 - e^{-x})$ -szel beszorozva és rendezve

$$e^{-x} - 1 + \frac{x}{3} = 0 . \quad (68)$$

Ennek pontos kiszámítására akár a Newton–Raphson approximáció, akár a regula falsi módszer használható ($x = 2,821439372122$).

A hullámhossz szerinti maximális energiafluxus számításához ($\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \max$) az $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ helyettesítéssel, kihasználva, hogy dimenzió nélküli skálával dolgozunk:

$$dE(t) = -\frac{1}{t^5} \text{Li}_0(e^{-t}) dt . \quad (69)$$

Szélső érték feltétele, differenciálással:

$$\frac{t^{-6}}{5} \text{Li}_0(e^{-t}) - t^{-7} \text{Li}_{-1}(e^{-t}) = 0 . \quad (70)$$

Visszahelyettesítve, az egyszerűsítések után, a végső numerikusan megoldandó egyenlet:

$$e^{-x} - 1 + \frac{x}{5} = 0 \quad (x = 4,9651142317) . \quad (71)$$

Hasonlóan oldható meg a $\frac{\partial E}{\partial \ln \lambda} = \max$, ill. $\frac{\partial E}{\partial \ln \nu} = \max$ (vég-eredményben egymás tükörképe) az $x = e^t$ és $dx = e^t \cdot dt$ helyettesítéssel.

A frekvencia függvényében a maximális fotonfluxus (tehát ahol az egységnyi frekvenciatartományra eső fotonok

száma maximális):

$$\frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x^2 \text{Li}_0(e^{-x}) = \max , \quad (72)$$

$$2x \text{Li}_0(e^{-x}) - x^2 \text{Li}_{-1}(e^{-x}) = 0 , \quad (73)$$

azaz

$$\frac{2x e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{x^2 e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = 0 .$$

Miután $x \neq 0$, egyszerűsíthető: $2 - \frac{x}{1 - e^{-x}} = 0$,

$(1 - e^{-x})$ -szel beszorozva és rendezve:

$$e^{-x} - 1 + \frac{x}{2} = 0 \quad (x = 1,59362426004004) . \quad (74)$$

Miután a szélsőértékek egyszerűsített alakja rendkívül hasonló, több egybeesik, érdekes táblázatosan áttekinteni ezeket.

$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \max$	$e^{-x} - 1 + \frac{x}{2} = 0$	$x_{\max} = 1,59362426004004$
$\frac{\partial E}{\partial \nu} = \max$	$e^{-x} - 1 + \frac{x}{3} = 0$	$x_{\max} = 2,821439372122$
$\frac{\partial \Phi}{\partial \ln \lambda} = \max$		
$\frac{\partial E}{\partial \ln \lambda} = \max$	$e^{-x} - 1 + \frac{x}{4} = 0$	$x_{\max} = 3,92690394$
$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \max$		
$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \max$	$e^{-x} - 1 + \frac{x}{5} = 0$	$x_{\max} = 4,9651142317$

Miután $x = 1$ esetén $\lambda T = \frac{hc}{k} = 14387,6866 \mu\text{mK}$, az összes szélsőérték az alábbi módon számítható:

$$\lambda T = \frac{hc}{kx_{\max}} . \quad (75)$$

Néhány gyakorlati feladat

1. Néhány optikai anyag véges áteresztőképességének hullámhosszhatára μm -ben a következő:

	alsó	felső
Üveg	0,35	2,0
Kvarcüveg	0,2	3,5
Kvarc	0,185	3,8

Kérdés, hogy a napfény energiájának mekkora részét engedik át a fenti optikai anyagok 5800 K-nek megfelelő eloszlású napsütésből ($\lambda_{\text{Emax}} = 0,4996187 \mu\text{m}$)?

	λ_{\min}	x	$E(x)$	λ_{\max}	x	$E(x)$	$\Delta E(x)$
Üveg	0,35	7,087306	0,07146848	2,0	1,24279	0,9402178	0,86875 = 86,9%
Kvarcüveg	0,2	12,40279	0,0015494	3,5	0,7087306	0,9861271	0,98458 = 98,5%
Kvarc	0,185	13,40842	0,000725165	3,8	0,6527782	0,9889145	0,98819 = 98,8%

Megjegyzés a táblázathoz:

Ezek az értékek csak a légkör nagy magasságaiban érvényesek. Az ultraibolya sávot ugyanis az oxigén és ózon (igen: a kettő együtt!) eléggé legyengíti, az infravörös sávban pedig már a vízpára három igen erős sávja is megjelent (1,37, 1,87 és 2,66 μm).

A tanulság:

Ha energianyerés a célunk, a fenti anyagok közt alig van különbség. Az anyagválasztás akkor fontos, ha információ-szerzés végett az ultraibolya és a közeli infravörös (fototechnikai infravörös, NIR) vizsgálata a célunk.

2. Még érdekesebb a gázok elnyelési sávjainak a számítása. A gázok csak megadott sávokban nyelik el a sugárzást, és ugyanezekben a sávokban sugároznak is.

a) 280 K hőmérsékleten a fekete test sugárzása 348,54 W/m² ($\lambda_{E_{\max}} = 10,34925 \mu\text{m}$). Mennyi az infravörös ablak átteresztőképessége 280 K hőmérsékleten?

8 μm $x = 6,422871$ $E(x) = 0,1084174$

13 μm $x = 3,952536$ $E(x) = 0,4117562$

$\Delta E(x) = 0,3033388 = 30,33\%$

Ez az a tartomány, ahol a légkör átlátszóbb, mint a látható tartományban. A használatát egészen más problémák nehezítik — pl. a hűtési igény és a nem páraérzékeny optikai anyagok szűk választéka.

b) Mennyit szűr ki a széndioxid a 13–17 μm közötti elnyelési sávja a 280 K hőmérsékleti sugárzásból?

13 μm $x = 3,952536$ $E(x) = 0,4117562$

17 μm $x = 3,022528$ $E(x) = 0,60208$

$\varepsilon = \Delta E(x) = 0,1903238 = 19\%$

Ennek hőmérsékleti hatása:

$280 - 280 \cdot (1 - \varepsilon/2)^{1/4} = 280 - 273,1 = 6,9 \text{ K}$.

A fenti összefüggés akkor lenne pontos, ha a földfelszín fekete testként sugározna, Az elnyelt kvantumot ugyanis a gerjesztett molekula ugyanolyan kvantumként késve kisugározza a tér minden irányába, tehát 50% az esélye, hogy felfelé, és 50% eséllyel lefelé. Közben újra ismétlődik ugyanez a folyamat. Optikai tartományban ezt opálosodás-

nak látjuk. A végén az elnyelési sávba eső kvantumok fele eltávozik a világűr irányába, fele pedig visszatér a földfelszínre, ahol az a fekete felszínen maradéktalanul elnyelődik. Csak hogy fekete test nincs, még a korom is visszaver 5–10%-ot.

Ha a felszín emissziós együtthatója 15 μm -en ε , akkor a Kirchoff-törvény értelmében ugyanezen a hullámhosszon szükségképpen $\varepsilon = \alpha = (1 - a)$. Tehát a kisugárzott energia a fekete test ε -szorososa, ebből a felszínre visszaverődik (pontosabban visszasugárzódik) $\varepsilon/2$, ugyanennyi eltávozik a világűrbe. A visszavert sugárzásból elnyelődik ε , visszaverődik $(1 - \varepsilon)$, amiből visszajön $(1 - \varepsilon)/2$, kisugárzódik ugyanennyi. Ebből újra visszaverődik ennek az $(1 - \varepsilon)$ -szorososa, aminek megint csak fele távozik, fele újra visszatér.

Legyen a fekete test sugárzása E_f , akkor ε emissziós együtthatójú felszínnél a végső soron távozó energia végül

$$E = E_f \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} \right)^n = E_f \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad (76)$$

Ennek egy érdekes következménye, hogy a teljes elnyelődés sávjában nézve a felszínt, az opálosodás ellenére a különböző emissziós együtthatójú nagyszerkezetek mintegy „átsütnek”.

Másik példa: a CO_2 4,25 m (2439 cm^{-1}) sávja hogyan változik a koncentráció növelésével?

A félérték szélessége 280 ppm 3,33–5,95 μm értékeiről 380 ppm-nél 3,25–6,45 μm -re nő. Ennek a számítása most nem a cikk témája [6], de annyit szükséges megjegyezni, hogy az egyes abszorpciós és emissziós sáv szélessége energetikai számításánál jól közelíthető a félérték-szélességgel, azaz ahol az elnyelés mértéke a maximum 50%-a. Ez pedig telített sávoknál, ahol a maximum 99,9999...%, az 50%-nak felel meg.

5800 K:

cc ppm	$\lambda_1 - \lambda_2$ $\mu\text{m} - \mu\text{m}$	x_1	x_2	$E(x_1)$	$E(x_2)$	$\Delta E(x)$
280	3,33 – 5,95	0,744921	0,4169004	0,984125	0,9968299	0,0127049 = 1,27%
380	3,25 – 6,45	0,7632483	0,3845825	0,9830793	0,9974798	0,0166868 = 1,67%
						0,0039819 = 0,4%

280 K:

cc ppm	$\lambda_1 - \lambda_2$ $\mu\text{m} - \mu\text{m}$	x_1	x_2	$E(x_1)$	$E(x_2)$	$\Delta E(x)$
280	3,33–5,95	15,43032	8,635794	0,000137442	0,0253197	0,025182258 = 2,52%
380	3,25–6,45	15,81014	7,966352	0,0001006271	0,04006165	0,039961023 = 4,00%
						0,014778765 = 1,48%

cc — CO₂-koncentráció ppm-ben.

A többletenergia:
 $0,014778765 - 0,0039819 = 0,010796865 = 1,08\%$ —
 pontosabban ennek a fele, tehát $0,54\%$, ennek a hatása a
 stacioner hőmérsékletre $0,378$ K.

Összefoglalás és további feladatok

A cikk célja elsősorban a magyar nyelvű irodalom el-
 indítása a polilogaritmusok tárgyában, egyúttal néhány
 példa bemutatása arra, hogy a matematikának ez az ága a
 hétköznapi számítások körében is használható.

Egyelőre csak a hőmérsékleti sugárzás energetikai szá-
 mítására alkalmas segédlet, de ennek is haszna lehet, akár a
 hőleadás növelése, akár a csökkentése a cél.

Mivel a hőmérsékleti sugárzás határozott integráljai jól
 kezelhetők, így különösen a gázok emissziós és abszorpci-
 ós színeképeinek számítására kínálkozik jó lehetőség.

Lévén a matematika eszköz, azaz kitaposott
 gondolkodási sémák gyűjteménye, talán lesz valaki, aki
 szélesíti, vagy továbbtápossa. Hirtelen ötletként az ellipszis
 paraméteres leírása említhető:

$$r = \frac{P}{1 + \epsilon \cos(\varphi)} = -p \operatorname{Li}_0(-\epsilon \cos(\varphi)) .$$

Másik ötlet, hogy a szélerősség statisztikai eloszlása rá-
 nézésre rendkívül emlékeztet a (27)–(30) eloszlási típusok
 valamelyikére, ebből adódóan a szélerősség gazdasági
 számításainál esetleg szerepe lehet.

Jelölések

- c — fénysebesség = $299\,792\,458$ m/s
- C_f — fotonkibocsátási állandó = $1,520\,486\,9 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-3}$
- E — a sugárzás intenzitása, W/m^2
- E_0 — a foton energiája, eV
- h — Planck-állandó = $6,626\,075\,5 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
 $(6,626\,069\,3 \cdot 10^{-34})^*$
- k — Boltzmann-állandó = $1,380\,658 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
 $(1,380\,505 \cdot 10^{-23})^*$
- N_A — Avogadro-féle szám = $6,0221367 \cdot 10^{23}$
 $(6,022\,141\,5 \cdot 10^{23})^*$
- n_w — hullámszám, cm^{-1}
- R — gázállandó = $8,314\,51 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ($8,314\,472$)^{*}
- r — sugár, m
- S — szoláris állandó, azaz a Naptól eredő energiaáram a
 Föld távolságában = 1395 W/m^2
- T — abszolút hőmérséklet, K
- x — dimenzió nélküli rezgésszám
- α = abszorpciós együttható (abszolút fekete testre = 1)
 (MSZ: lineáris elnyelési együttható)
- ϵ = relatív emisszióképesség (abszolút fekete testre = 1)
- λ = hullámhossz, m
- ν = rezgésszám, s^{-1}
- π = $3,1415926$
- σ = $5,670\,51 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ($5,670\,401\,24 \cdot 10^{-8}$)^{*} (Stefan–
 Boltzmann-állandó)
- Φ = fotonfluxus, $\text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
- Megjegyzés: * = 2002-es érték.

- [1] TICHY Géza, KOJNOK József 2000: Hőtan. Egyetemi tankönyv,
 p. 117–122
- [2] HARMATHA András 1968: Hősugárzás. Kézirat, Mérnöki
 Továbbképző Intézet
- [3] polylog – die Polylogarithmus funktion,
http://research.mupad.de/doc/31/de/stdlib_polylog.html
- [4] Polylogarithm,
<http://mathworld.wolfram.com/Polylogarithm.html>
- [5] INZELT György 2006: Változó állandók. Természet Világa 5,
 p. 217–220
- [6] ATKINS P. W. 2002: Fizikai kémia II. Nemzeti
 Tankönyvkiadó, Budapest
- [7] BOSCHÁN Péter 2007: Az örök világosság fluktuációi.
 Természettudományi Közlöny 5, p. 159–162

Függelék

1. Basic program a polilogaritmusok számításához

```

10 INPUT "polilog(1) vagy inverz(2)"; MF
20 ON MF GOTO 110, 500
110 PRINT : PI = 355 / 113: EPS = 1E-10:
    INPUT "n"; K
120 INPUT " x"; X: X# = X: IF X > 1 AND K <
    2 OR X < -1 THEN 120
130 IF K = 1 THEN Z# = -LOG(1 - X#): GOTO
    450
140 IF K = 0 THEN Z# = X# / (1 - X#): GOTO
    450
150 IF K = -1 THEN Z# = X# / (1 - X#) ^ 2:
    GOTO 450
160 IF K = -2 THEN Z# = X# * (X# + 1) / (1 -
    X#) ^ 3: GOTO 450
170 IF K = -3 THEN Z# = (X# ^ 3 + 4 * X# ^ 2
    + X#) / (1 - X#) ^ 4: GOTO 450
180 IF K = -4 THEN Z# = (X# ^ 4 + 11 * X# ^
    3 + 11 * X# ^ 2 + X#) / (1 - X#) ^ 5: GOTO
    450
190 IF K = -5 THEN Z# = (X# ^ 5 + 26 * X# ^
    4 + 66 * X# ^ 3 + 26 * X# ^ 2 + X#) / (1 -
    X#) ^ 6: GOTO 450
200 IF K = -6 THEN Z# = (X# ^ 6 + 57 * X# ^
    5 + 302 * X# ^ 4 + 302 * X# ^ 3 + 57 * X#
    ^ 2 + X#) / (1 - X#) ^ 7: GOTO 450
210 IF K = -7 THEN Z# = (X# ^ 7 + 120 * X# ^
    6 + 1191 * X# ^ 5 + 2416 * X# ^ 4 + 1191 *
    X# ^ 3 + 120 * X# ^ 2 + X#) / (1 - X#) ^
    8: GOTO 450
220 IF K = -8 THEN Z# = (X# ^ 8 + 247 * X# ^
    7 + 4293 * X# ^ 6 + 15619 * X# ^ 5 + 15619
    * X# ^ 4 + 4293 * X# ^ 3 + 247 * X# ^ 2 +
    X#) / (1 - X#) ^ 9: GOTO 450
230 IF K = -9 THEN Z# = (X# ^ 9 + 502 * X# ^
    8 + 14608 * X# ^ 7 + 88234 * X# ^ 6 +
    156190 * X# ^ 5 + 88234 * X# ^ 4 + 14608 *
    X# ^ 3 + 502 * X# ^ 2 +
    X#) / (1 - X#) ^ 10: GOTO 450
330 GOSUB 830
450 PRINT USING "#,##### "; Z#
460 GOTO 120
500 REM *** inv(polylog) ***
510 PRINT : PI = 355 / 113: EPS = 1E-08:
    EPS2 = .000001: INPUT "n"; Q
520 K = Q: IF Q <= 1 THEN 540
    
```

```

530 X# = 1: GOSUB 830: YE = Z#
540 INPUT " y"; Y: Y# = Y: IF Y > YE AND N >
    1 OR Y < 0 THEN 540
550 IF K = 1 THEN 700
560 X# = Y# / YE
570 K = Q: GOSUB 830: FX = Z# - Y#: IF
    ABS(FX) < EPS2 THEN 600
580 K = Q - 1: GOSUB 830: F1X = Z# / X#
590 X# = X# - FX / F1X: GOTO 570
600 PRINT USING "x = #.##### "; X#
610 GOTO 540
700 X# = 1 - 1 / EXP(Y#): GOTO 600
830 Z# = 0: I = 0
840 I = I + 1: DZ# = X# ^ I / I ^ K: Z# = Z#
    + DZ#
850 IF ABS(DZ#) > EPS THEN 840
860 RETURN

```

```

120 GOSUB 200
130 PRINT "x="; X; "Integrál"; E: GOTO 110
150 INPUT "Integr 1 (0-1 kis hh.-t~1)"; EAR
160 GOSUB 700
170 PRINT "La="; LA * 1000000!; " mim x=";
    X: GOTO 150
200 IF X < .5 THEN 320
210 REM *** nagy x, rövidhullám, infravörös
    katasztrófa (Wien-Planck)
220 E0 = 0: N = 0
230 N = N + 1
240 EN = EXP(-N * X) * (3 * X ^ 2 / N ^ 2 +
    6 * X / N ^ 3 + 6 / N ^ 4)
250 IF N = 1 THEN E1 = EN
260 E0 = E0 + EN
270 IF EN / E1 > 1E-09 THEN 230
280 E2 = -X ^ 3 * LOG(1 - EXP(-X)): E = (E0
    + E2) / TI#: RETURN
320 REM ** kis x, hosszúhullám, ultraibolya
    katasztrófa (Rayleigh-Jeans)
330 W# = X * X: EEf1# = (X * W# / 3 - W# *
    W# / 8) * TQ#
340 ER#(1) = -W# / 5040: ER#(2) = W# * W# /
    272160: ER#(3) = -W# * W# * W# / 13305600
350 ER#(4) = W# * W# * W# * W# / 622702080:
    ER#(5) = -691 * W# * W# * W# * W# * W# /
    19615115520000#
360 ER#(6) = W# * W# * W# * W# * W# * W# /
    1270312243200#
370 ER#(7) = -3617 * W# * W# * W# * W# * W#
    * W# * W# / 2.0274183401472D+17
380 ER#(8) = 43867 * W# * W# * W# * W# * W#
    * W# * W# * W# / 1.072909785605898D+20
390 EEf2# = 1 / 60: FOR I = 1 TO 8: EEf2# =
    EEf2# + ER#(I): NEXT I
400 EEf# = EEf1# + (X * W# * W# * EEf2#) *
    TQ#: E = 1 - EEf#: RETURN
500 F1X = -TQ# * X * X * X * EXP(-X) / (1 -
    EXP(-X)): RETURN
700 REM ** inverz integrál ***
710 X = 2.821438
720 GOSUB 200: GOSUB 500
730 X0 = X: X = X - (E - EAR) / F1X * (1 -
    EAR)
740 IF ABS(X0 / X - 1) > .0000001 THEN 720
750 LA = H * C / K / T / X: RETURN

```

2. Basic program a sugárzási résztartományok energiájának számításához

```

5 REM *** Sugárzási tartományok szakaszainak
    energiája **
10 PI = 3.141592654#: SIG = 5.6704E-08: C =
    299792458: TI = PI ^ 4 / 15: TI# =
    6.493939402266829#
20 H = 6.6260693D-34: K = 1.3806505D-23: C1
    = C ^ 2 * H: C2 = C * H / K
30 C3 = 4.9649: TQ# = .153989733820265#: TM#
    = 2897.788811#
40 PRINT : PRINT : INPUT "T(ha T=0->mu=10)
    (Kelvin fok)"; T: IF T = 0 THEN T = TM# /
    10
50 LAMAX = TM# / T * .000001: IE = SIG * T ^
    4
60 PRINT "Fekete test sugárzás: "; IE;
    "W/m2"
70 PRINT "Lamda (E=max)"; LAMAX * 1000000!;
    "mikrométer"
80 INPUT "Az integrál(1) vagy a
    hullámhossz(2) a kérdés"; COD
90 IF COD = 1 THEN 110
100 GOTO 150
110 INPUT "lambda (mikrométer)"; LA0: LAR =
    LA0 * .000001 / LAMAX:
    X = C3 / LAR

```