Porozitás, permeabilitás, fraktálgeometria

Bevezetés

A cikk bemutat egy lehetséges elméleti modellt, amely a porózus kőzeteket írja le a fraktálgeometria eszközeivel. Az alkalmazott elméleti megközelítés egy rekurziós módszerrel hoz létre szintetikus porózus kőzetet. A modell igyekszik megmagyarázni, hogy miért lehetséges nagy porozitás mellett csekély permeabilitás még abban az esetben is, ha a pórustér összefüggő, továbbá egységes leírásra tesz kísérletet mind a porózus, mind a repedezett kőzetek esetében.

A Cantor-por

Georg CANTOR, a neves német matematikus a XIX. században kitalált valamit, aminek úgy tűnt, hogy soha semmi köze nem lesz bármely gyakorlati probléma megoldásához. Elvont matematikai játéknak tetszett a műve, amit Cantor-halmaznak hívnak (mondják Cantor-pornak is). Számos ehhez hasonló csodabogár létezett és létezik ma is a matematikában. Nézzük meg, hogyan jön létre a Cantor-por.

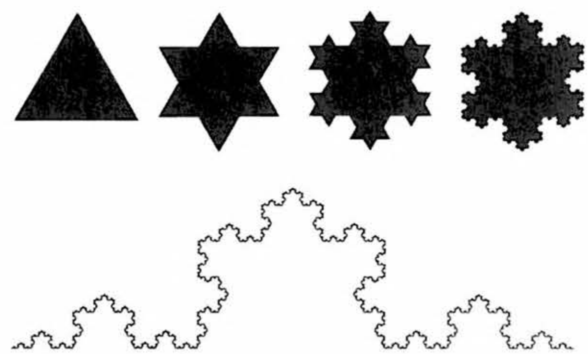
Vegyünk egy vonalat. Távolítsuk el a középső harmadát. Ezután a megmaradt vonaldarabok középső harmadait is távolítsuk el és így tovább ad infinitum. A Cantor-halmaz tehát egy „porszerű" képződmény, amely a leírt rekurziós folyamat végrehajtása után megmarad. Igencsak különös tulajdonságai vannak. Csak egyet emelnék ki a sok közül: skálafüggetlen. A skálafüggetlenség nem egzakt megfogalmazás szerint azt jelenti, hogy bármelyik megmaradt harmadot nézem (bármilyen nagyításban), ugyanazt fogom látni, mint bármely más tartományban. A Cantor-halmazok jelentősége a jelátviteli hibák csökkentésekor mutatkozott meg. Nem véletlen, hogy Benoit MANDELBROT, a fraktálgeometria atyja, hívta fel rá a figyelmet.

Az *1. ábrán* a Cantor-halmaz rekurziós lépéseinek eredményeit láthatjuk.

1. ábra. A Cantor-halmaz létrehozásának folyamata. Az első öt lépés eredménye

A Koch-görbe

Helge von KOCH svéd matematikus írta le elsőként a róla elnevezett görbét. A Koch-görbe tulajdonságai nem kevésbé különösek, mint a Cantor-poré. Nézzük meg, hogy hogyan állítható elő a Koch-görbe. Vegyünk egy szabályos háromszöget. Harmadoljuk el az oldalait, majd rajzoljunk az oldalak középső harmadára szabályos háromszögeket, ahogy a *2. ábrán* látható. Az így előálló valamennyi háromszög oldalait harmadoljuk, majd rajzoljunk az oldalak középső harmadára szabályos háromszögeket, és így tovább a végtelenségig.

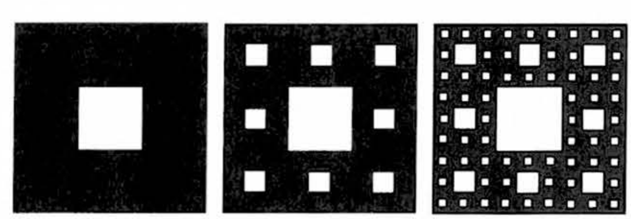


2. ábra. A Koch-görbe létrehozásának folyamata. Az első három lépés eredménye

A végeredmény rendkívül különös. Az egyik szembetűnő tulajdonság a skálafüggetlenség. Egy másik, talán még érdekesebb tulajdonság, hogy végtelen számú lépés után a görbe végtelen hosszú lesz, ugyanakkor sosem metszi önmagát, és egy véges térrészre korlátozódik a kiterjedése. Véges területen végtelen hossz.

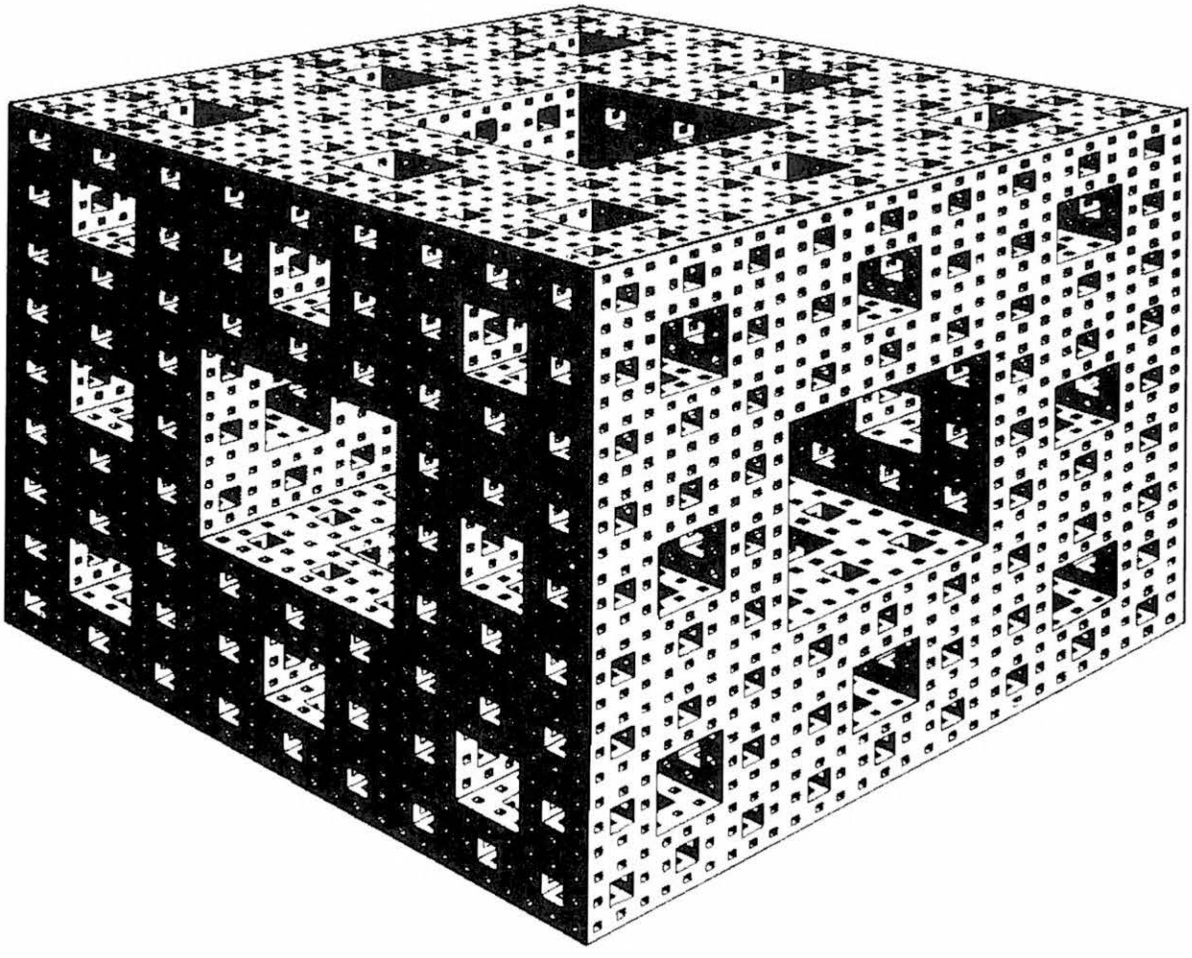
A Sierpinsky-szőnyeg és a Menger-szivacs

Ez az alakzat úgy születik, hogy egy négyzet középső kilencedét kivágjuk (*3. ábra*), majd a maradék nyolc darab kilenced középső kilencedeit szintén kivágjuk, és így tovább ad infinitum.



3. ábra. A Sierpinsky-szőnyeg létrehozásának folyamata. Az első három lépés eredménye

Mindez három dimenzióban végrehajtva eredményezi a Menger-szivacsot (*4. ábra*), amely végtelen sok lépés után nulla térfogatú, de végtelen felületű lesz.



4. ábra. A Menger-szivacs a negyedik rekurziós lépés után

Amiről eddig szó volt, az fraktálok csodálatos világából néhány figyelemre méltó darab.

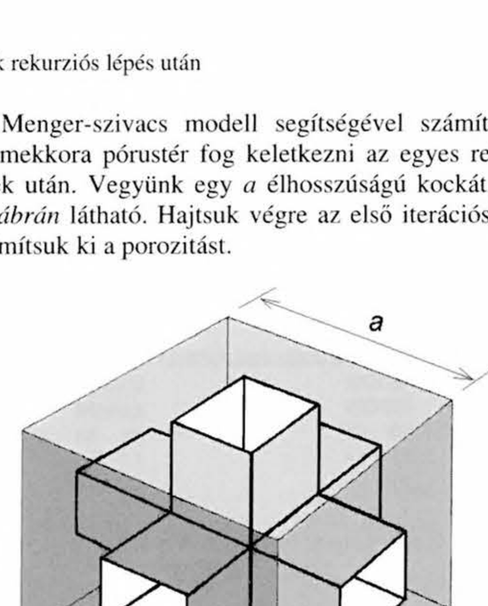
Fraktálok és kőzetfizika

A Menger-szivacs, mint elméleti modell, hasznosíthatónak látszik porózus kőzetek modellezésére. Ismert karotázs értelmezői tapasztalat, hogy vannak kőzetek, amelyek a karotázs mérések porozitásra érzékeny mérőberendezései által irreálisan nagy porozitásúnak látszanak. A végeredményben természetesen ezek az értékek már nem látszanak, mert okos programok a lehetetlen értékeket korrigálják, és lehetséges értékűvé „hazudják" őket. Nem lehetetlen, hogy ezen értékek jelenléte nem mérési hibára vezethető vissza, hanem a fraktálgeometria érvényesülését jelzi.

További érdekes tapasztalat, hogy az egyes mérőberendezések által nagynak mutatott porozitású kőzetek csekély effektív pórusterűek (ahol folyadékok tartózkodhatnának, mint például víz, olaj), sőt sokszor e kőzetek csekély permeabilitással is rendelkeznek.

Ha viszont egy tömör kőzet tektonikus folyamatok által összetörve, repedésekből képződött pórustérrel rendelkezik, akkor a Menger-szivacs megfelelő modell lehet a kialakult kőzet szerkezetére. Nincs áthalmozott finomszemcsés frakció, csak az eredeti kőzetanyag van jelen.

A Menger-szivacs modell segítségével számítsuk ki, hogy mekkora pórustér fog keletkezni az egyes rekurziós lépések után. Vegyünk egy *a* élhosszúságú kockát, ahogy az *5. ábrán* látható. Hajtsuk végre az első iterációs lépést, és számítsuk ki a porozitást.



5. ábra. Az első rekurziós lépés során keletkezett pórustér az *a* élhosszúságú kockában. A fehéren látható részek ábrázolják a pórusteret

A kocka tömör anyagának térfogata az első rekurziós lépés előtt

$$V = a^3.$$

Az első iterációs lépéssel keletkező pórustér térfogata

$$V_p = 7\cdot(a/3)^3.$$

A maradék tömör anyag térfogata

$$V_b = a^3 - 7\cdot(a/3)^3 = 20\cdot(a/3)^3$$

A porozitás:

$$\Phi = V_p / V = 7\cdot(a/3)^3 /[27\cdot(a/3)^3] = 7/27 = 0{,}26.$$

Az első rekurziós lépés tehát hozzávetőlegesen 26 %-os porozitást eredményez.

A második rekurziós lépés kiszámításához használjuk a Menger-szivacs skálafüggetlen tulajdonságát. 7 darab $a/3$ élhosszúságú üres kockánk van, tehát a további felosztást a maradék 20 kockán végezhetjük. Egy ilyen kocka térfogata $(a/3)^3$. Minden egyes kocka felosztása révén újabb 7/27 résznyi pórustér keletkezik. Ezt hozzáadva az első rekurziós lépésben kapott pórustérhez azt kapjuk a porozitásra, hogy

$$\Phi = 7/27 + 20\cdot(7/27)/27 = 0{,}45.$$

A második rekurziós lépés tehát hozzávetőlegesen 45 %-os porozitást eredményezett.

Gondoljuk tovább a folyamatot. A rekurziós algoritmus előrehaladásával a pórustérfogat a következőképpen alakul:

$$V_p = \Sigma\, V_p(i),$$

ahol V_p az i-edik lépés utáni teljes pórustérfogat, $V_p(i)$ az i-edik lépéssel keletkező pórustérfogat hányad. Ha

$$i \to \infty, \text{ akkor } V_p \to 1.$$

A tapasztalat azt mutatja, hogy porózus kőzetek esetében is gyakran lehet nagyon alacsony a permeabilitás. A nagy pórustérfogat, gondolhatnánk, nagy permeabilitással jár együtt, ha nem zárvány porozitás teszi ki a pórustér java részét, vagy nem tölti ki a pórusteret valamilyen másodlagos folyamat által behordott finomszemcsés kőzetanyag. Az alacsony permeabilitás oka a kőzetanyag nagy felületében, és a felületi feszültségben keresendő. Jelölje σ a felületi feszültséget,

$$\sigma = F_h / A_h,$$

ahol

F_h a határoló felületen ható erő,

A_h a határoló felület nagysága.

Ebből az egyszerű összefüggésből látható, hogy annál nehezebb lesz egy adott viszkozitású folyadéknak mozogni a pórustérben, minél nagyobb felülettel rendelkezik a pórustér. A fraktálgeometriai kőzetmodellből látható, hogy igen bonyolult szerkezetű és nagy felületű porózus kőzetben valóban előfordulhat, hogy a benne lévő folyadék nem lesz képes mozgásra.

Ne felejtsük el, hogy hiába skálafüggetlen a Menger-szivacs, ha a felületi feszültség nem az. Nagyon is behatárolt az a mérettartomány, ahol a kapilláris jelenség dominánssá válik. Ebből levonhatjuk azt a következtetést, hogy a Menger-szivacs jó modellje lehet a porózus kőzeteknek, mert bizonyos mérettartományokban képes megmagyarázni az alacsony permeabilitást nagy porozitás mellett, míg más mérettartományokban, ahol a felületi feszültség hatása már nem számottevő, a nagy porozitású, permeábilis kőzetek viselkedését is jól leírja.

Joggal vetődhet fel a kérdés, hogy miért jobb ez a megközelítés, mint apró gömböcskékkel kitölteni egy kockát, és annak kiszámítani a porozitását. Nos, egyáltalán nem biztos, hogy a porózus kőzetek fizikáját jobban írja le a fraktálokkal felvázolt modell. Az azonban biztos, hogy olyan kőzetek porozitását, amelyek tektonikus folyamatok által keltett repedésekből állnak, a kőzetgömbökkel manipuláló modell nem képes megmagyarázni. Érdekes viszont, hogy a szeizmológusok által végzett vizsgálatok azt mutatják, hogy a földrengések által keltett repedésrendszerek eloszlása fraktálgeometriai jellegzetességeket mutat. Ez alapján lehet némi reményünk, hogy a repedezett kőzetek porozitás–permeabilitás összefüggéseinek feltárásában szerepet kaphat a fraktálgeometria.

FELHASZNÁLT IRODALOM

ALBERT R., BARABÁSI A. L. 2002: Statistical mechanics of complex networks. Reviews of modern physics **74**, January

BARABÁSI A. L., ALBERT R., JEONG X. 1999: Mean-field theory for scale-free random networks. Preprint submitted to Elsevier Preprint, 5 July

MANDELBROT B. 1982: The Fractal Geometry of Nature. Freeman

SZÉPFALUSY P., TÉL T. 1982: A káosz. Véletlenszerű jelenségek nem lineáris rendszerekben. Akadémiai kiadó, Budapest

Elek István