A gravitáció, a mágnesség és az elektromosság közötti kapcsolatokról, a geofizika szemszögéből[1]

SZARKA LÁSZLÓ[2]

A gravitáció, a mágnesség, az elektromosság és az egyenáram mágneses terének külön-külön jól ismert összefüggéseit a tanulmány együtt, a potenciálelméleti eredetű kapcsolatok előtérbe állításával mutatja be.

L. SZARKA: About relationships among gravity, magnetism and electricity, from point of view of geophysics

The well-known equations of gravity, magnetism, electricity and magnetic field of direct currents are shown together in a special way, emphasizing inter-relations, originated from potential theory.

1. Bevezetés

Különböző összefoglaló könyvekben nagyszerű példák találhatók eltérő fizikai jelenségek közötti potenciálelméleti hasonlóságokra, de a geofizikai kutatómódszerek között megbúvó kapcsolatok feltárása alapvetően a felszín alatti térséget kutató geofizika a feladata. A geofizikai kutatási módszerek közül a legtisztább, legátláthatóbb összefüggésekkel a gravitáció rendelkezik, tehát az összehasonlításhoz a gravitációt érdemes kiindulási pontnak megtenni.

A tanulmány rendszerezett formában mutatja be a gravitáció és az elektromosság közötti, s a gravitáció és az egyenáram mágneses tere közötti kapcsolatot, majd kitér az elektromosság és a mágnesség különböző megnyilvánulásai közötti, a geofizika szempontjából érdekes összefüggések áttekintésére is, s végül érinti a Poisson-egyenlet helyét az elektromágneses potenciálokra felírható inhomogén differenciálegyenletek rendszerében. A külön-külön régóta ismert összefüggések szembesítése nemcsak szép (hiszen bepillantást enged a természet rendjébe), hanem talán hasznos is, hiszen új nézetben világít rá a különböző geofizikai anomáliák forrásaira. (A történeti hűség kedvéért megemlítendő, hogy 30–40 évvel ezelőtt sokat foglalkoztak bonyolult két- és háromdimenziós hatók egyidejű geoelektromos, mágneses, gravitációs és indukált polarizációs analóg modellezésével [TAKÁCS 2002].)

Az elektromosság és a mágnesség alapegyenleteinek levezetését a Függelék *A1.* és *A2. táblázataiban* foglalom össze (a gravitáció esetében a levezetést nem tartom szükségszerűnek); a dolgozat szöveges részében az alapösszefüggéseket innen, de külön hivatkozás nélkül származtatom. A jelölések listája szintén a Függelékben szerepel.

A dolgozat a STEINER Ferenc 70. születésnapi ünnepségén elhangzott előadás alapján készült.

2. Gravitáció, mágnesség, elektromosság, egyenáram mágneses tere

2.1. Gravitáció és mágnesség

Az *I. táblázat* a gravitáció és a mágnesség legalapvetőbb összefüggéseit foglalja össze. d a kőzet sűrűsége, $\mathbf{M}$ az egységi térfogatban lévő kőzet mágnesezettsége. A gravitációs, illetve a mágneses skalárpotenciál mindkét esetben Poisson-egyenlet megoldásaként adódik. A lehető legegyszerűbb írásmódot választottam, a dV térfogatelem és a mérési pont távolságát egyszerűen az r távolság jelöli.

GRAVITÁCIÓ	MÁGNESSÉG
d: sűrűség, ahol d csak a hely függvénye	$\mathbf{M}$: térfogati mágnesezettség, ahol $\mathbf{M}$ csak a hely függvénye
Poisson-egyenlet: $\nabla^2\Phi = -\operatorname{div}\mathbf{g}$, azaz $\nabla^2\Phi = 4\pi\gamma d$	Poisson-egyenlet: $\nabla^2 W = -\operatorname{div}\mathbf{H}$, azaz $\nabla^2 W = \operatorname{div}\mathbf{M}$
Gravitációs potenciál: $\Phi = -\gamma\int_V \frac{d}{r}\,dV$	Mágneses skalárpotenciál: $W = \frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{M}\operatorname{grad}\frac{1}{r}\,dV$
Gravitációs térerősség: $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\Phi$	Mágneses térerősség: $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} W$

I. táblázat. A gravitáció és a mágnesség alapösszefüggései

Table I. Basic relationships of gravity and magnetism

A Φ és W potenciálokra vonatkozó megoldások általános alakjában közös, hogy mindkét esetben térfogati integrálok szerepelnek. A W mágneses skalárpotenciál esetében a mágneses dipólusok jelenléte miatt nem a távolság reciproka, hanem a reciprok gradiense szerepel. Közös ható

[1] Beérkezett: 2002. június 11-én
[2] MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.

esetén ezért tűnnek végső soron a mágneses térképek a gravitációs anomáliatérképek irány szerinti deriváltjának. Ezt a közismert, még közvetlenebb alakban is felírható kapcsolatot hívjuk Poisson–Eötvös-összefüggésnek.

2.2. *Elektromosság*

A *II. táblázat* bal oldali része az elektromosság egyenleteit mutatja. Nézzük őket együtt az I. táblázatban bemutatott gravitációs egyenletekkel! A tér forrását ezúttal nem a mérés megkezdése előtt is létező és csak helytől függő sűrűségeloszlás jelenti, hanem olyan térfogati és felületi töltéssűrűség-eloszlás, amely külső elektromos tér hatására jön létre (mintegy 10^{-9} s időtartamon belül, amennyiben más fékező jelenségek: indukált polarizáció, indukciós tranziens nincsenek, vagy elhanyagolhatók). A δ_t térfogati és a τ_t felületi töltéssűrűséggel kifejezhető töltések a vezetőképesség-változások helyein mutatkoznak, s mértékük az elektromos tér nagyságától és irányától függ.

ELEKTROMOSSÁG

δ_t, τ_t: térfogati és felületi töltéssűrűség,
ahol $\delta_t = -\frac{\varepsilon_o}{\sigma}\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\sigma$, $\tau_t = \frac{\varepsilon_o}{\overline{\sigma}}\overline{E}(\sigma_1 - \sigma_2)$

Poisson-egyenlet:

$$\nabla^2 U = -\operatorname{div}\mathbf{E}, \text{ azaz}$$

$$\nabla^2 U = -\frac{\delta_t}{\varepsilon_o}$$

Elektromos skalárpotenciál:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\int_V \frac{\delta_t}{r}\,dV + \oint_a \frac{\tau_t}{r}\,da\right)$$

Elektromos térerősség:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U$$

EGYENÁRAM MÁGNESES TERE

$\mathbf{j}$: térfogati áramsűrűség,
ahol $\mathbf{j} = \sigma\,\mathbf{E}$

Poisson-egyenlet:

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_o \operatorname{rot}\mathbf{H}, \text{ azaz}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_o\mathbf{j}$$

Mágneses vektorpotenciál:

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}}{r}\,dV$$

Mágneses térerősség:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_o}\operatorname{rot}\mathbf{A}$$

II. táblázat. Az elektromosság, valamint az egyenáram mágneses terének alapösszefüggései ($\overline{E}$, $\overline{\sigma}$ a σ_1/σ_2 határfelületre vonatkozó számtani átlagértékeket jelent)

Table II. Basic relationships of electricity and magnetic fields of direct currents ($\overline{E}$, $\overline{\sigma}$ are arithmetic mean values at the

Az elektromos anomália forrásait tehát — amennyiben mesterséges módszerekről van szó — vagy mi magunk aktivizáljuk, vagy pedig (mint például a tellurika esetében) a természetes elektromos tér által létrehozott töltésrendszert figyeljük meg.

Homogén féltér esetén a töltések a felszínen helyezkednek el, s a Coulomb-féle felfogásban ezek azok, amelyek benn tartják az áramot a vezető alsó féltérben. (Végtelen kiterjedésű homogén és izotróp térben a töltések egyszerűen sugárirányban szétáramolnának.) A réteghatárokon, inhomogenitásokon kialakuló felületi töltések hatása általában sokkal jelentősebb, mint a tértöltéseké. A helyről helyre változó vezetőképességű féltér (pl. az anizotrop féltér) tele van szétoszlott („hintett") töltésekkel, s e töltések térítik el az áramokat attól az úttól, ami homogén térben, illetőleg féltérben kialakulna.

Vegyük észre, hogy az elektromosságot szükségtelen elektrosztatikára és egyenáram elektromos terére szétválasztani. Az elektrosztatika és az egyenáram elektromos tere közötti kapcsolat nem csupán formai: lényegi azonosság van e kétféle megnyilvánulás között, mint ahogyan azt TAKÁCS Ernő szokásos szóhasználata is jelzi, aki előadásaiban következetesen „egyenárammal feltöltött féltérről" szól. (Egy részletesebb okfejtés SZARKA [1990]-ben található.)

Formálisan az egyenáram elektromos tere és az elektrosztatika közös tárgyalhatóságának kulcsa az, hogy a töltéssűrűséget indexszel látjuk el: a *t* „teljes" vagy „totális" töltést jelent; az *f* a „szabad" („free") töltésekre utal. Figyeljük meg, hogy az elektromos eltolódási vektor Maxwell-egyenletében *f*, a potenciál Poisson-egyenletben *t* a töltéssűrűség indexe.

Mivel div **E** = div [(**D** – **P**) / ε_0], ezért bebizonyítható, hogy $\delta_t = \delta_f + \delta_p$ = div **D** – div **P**, ahol a δ_p polarizációs töltésekre érvényes a következő összefüggés: δ_p = –div **P**, azaz a teljes töltéssűrűség egyenlő a szabad és a polarizációs töltések összegével.

Az elektrosztatika és az egyenáram elektromos tere közötti különbség abban áll, hogy az elektrosztatikában az egyszer odavitt töltések magukra hagyva örökre megmaradnak, az egyenáramú elektromosságban pedig folytonosan („continuously") pótolni kell őket.

2.3. *Egyenáram mágneses tere*

A 2. táblázat jobb oldali részében az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a kőzet nem mágnesezett. Amennyiben a kőzettesten egyenáram folyik keresztül, állandó mágneses tér alakul ki, amely a Biot–Savart-törvénnyel írható le.

A Poisson-egyenletből következően a tér forrása ezúttal maga a felszín alatti térségben folyó áram (ami az elektromosság esetében a térbeli és felületi töltéssűrűség-eloszlás volt, a gravitáció esetében pedig a térbeli sűrűségeloszlás). A térbeli vezetőképesség-eloszlással való kapcsolat itt annyiban egyszerűbb, mint az elektromos tér esetében, hogy a tér forrása nem a grad σ-val, hanem magával a σ vezetőképességgel arányos. A tér forrása ezúttal is függvénye a külső elektromos térnek. Izotrop közegben **j** és **E** azonos irányúak; anizotrop közegben tenzoriális vezetőképesség-eloszlást kell figyelembe vennünk.

Az A2. táblázat (4) sorából közvetlenül látszik, hogy amennyiben az atomi köráramok és a makroszkopikus áram kapcsolatára bevezetjük rot **M** = **j** helyettesítést, akkor a **j** áram és az **M** mágnesezettség lényegében (mivel grad div **A** nullának választható) azonos **A** vektorpotenciálhoz, és tökéletesen azonos **H** mágneses téreloszláshoz vezet.

3. Kétoldalú kapcsolatok

Foglaljuk össze, hogy az elmondottak alapján milyen kapcsolatok vannak a gravitáció és mágnesség, a gravitáció és elektromosság, a gravitáció és az elektromos áram mágneses tere között. A *III. táblázat* a négy jelenség között mind a hat lehetséges párosítást tartalmazza:

(1) Gravitáció és mágnesség
(2) Gravitáció és elektromosság
(3) Gravitáció és egyenáram mágneses tere
(4) Elektromosság és egyenáram mágneses tere
(5) Mágnesség és egyenáram mágneses tere
(6) Elektromosság és mágnesség

(1)	Gravitáció és mágnesség	A sűrűség térbeli skalárfüggvény, a mágnesezettség térbeli vektorfüggvény A felszín alatti sűrűségeloszlás és a mágnesezettség egyaránt csakis a hely függvénye „A mágneses térképek a gravitációs térképek deriváltjának tűnnek" (Poisson–Eötvös-összefüggés)
(2)	Gravitáció és elektromosság	Analógia nem a közeg fizikai paraméterei (sűrűség és elektromos vezetőképesség) között van, hanem a sűrűség és a töltésfelhalmozódás között A töltésfelhalmozódás bonyolult függvénye a vezetőképesség térbeli eloszlásának és az elektromos térnek. (Az elektromosság még szigetelő környezetben (az ún. „elektrosztatikus" esetben) is bonyolultabb a gravitációnál, mert kétfajta előjelű töltés létezik.) A gravitációs anomáliák állandósága, az elektromos anomáliák — mérési elrendezéstől függő — változékonysága jó példa a „konzervatív erőterek" különbözőségére
(3)	Gravitáció és egyenáram mágneses tere (MMR)	Analógia a sűrűségeloszlás és a térbeli áramsűrűség között van Az áramsűrűség (legalábbis térrészenként homogén és izotrop közegben) az elektromos tér lineáris függvénye Kétdimenziós közegekben és csapásirányú áramsűrűség esetén a ΔH_{hor} anomália a gravitációs Δg_z anomália menetéhez hasonló
(4)	Elektromosság és egyenáram mágneses tere (MMR)	Az elektromos anomália (legalábbis térrészenként homogén és izotrop közegben) a vezetőképesség-inhomogenitások határfelületén az elektromos tér hatására kialakuló és Coulomb-törvénnyel számítható térből származik; az MMR-anomáliát a térbeli áramsűrűségből származó és a Biot-Savart törvény által leírt mágneses tér alakítja ki Hányadosuk a hosszú periódusú magnetotellurikus anomáliát közelíti
(5)	Mágnesség (**M**) és egyenáram (**j**) mágneses tere	A kialakuló mágneses tér (**H**) szempontjából mindegy, hogy **M**-mel kifejezett atomi köráramoktól, vagy makroszkopikus **j** térbeli áramsűrűségtől származik-e, amennyiben rot **M** = **j**
(6)	Elektromosság és mágnesség (**M**)	Az időben állandó **M** mágnesezettségnek nincs elektromos tere Az álló térbeli töltéssűrűség-eloszlásnak nincs mágneses hatása, csak a mozgó (a vezető közegben „elszivárgó" és a tápáram révén utánpótlódó) töltéseknek van.

III. táblázat. Kapcsolatok a gravitáció, a mágnesség, az elektromosság és az egyenáram mágneses tere között

Table III. Bilateral relations between gravity, magnetism, electricity and magnetic field of direct currents, respectively

		Általános (időtartománybeli) egyenletek	Harmonikus ($e^{i\omega t}$) térváltozás
(a)	Potenciál: $f(\mathbf{r}, t)$ Forrás: S_f (általános alak)	$\nabla^2 f - \mu\sigma\frac{\partial f}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -S_f$ ("távíró" egyenlet)	$\nabla^2 f + k^2 f = -S_f$, ahol $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon - i\omega\mu\sigma$ (Helmholtz-egyenlet)
(b)	$\sigma \ll \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}$ (EM földradar)	$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -S_f$ ahol $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ (hullámegyenlet)	$\nabla^2 f + k^2 f = -S_f$, ahol $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$ (Helmholtz-egyenlet)
(c)	$\sigma \gg \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}$ (EM indukció)	$\nabla^2 f - \mu\sigma\frac{\partial f}{\partial t} = -S_f$ (diffúziós egyenlet)	$\nabla^2 f + k^2 f = -S_f$, ahol $k^2 = -i\omega\mu\sigma$ (Helmholtz-egyenlet)
(d)	$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ (gravitáció, mágnesség, elektromosság)	$\nabla^2 f = -S_f$ (Poisson-egyenlet)	

IV. táblázat. A Poisson-egyenlet az elektromágneses potenciálokra vonatkozó inhomogén differenciálegyenleteinek rendszerében. (A rugalmas hullámok egyenletei formailag azonosak a (b) sorban közölt egyenletekkel)

Table IV. Poisson's equation in the system of inhomogeneous differential equations of the electromagnetic potentials

Megjegyzem, hogy az utólag triviálisnak látszó felismerés — miszerint kétdimenziós szerkezetek fölött és csapásirányú áram esetén a ΔH_{hor} (azaz az egyenáram mágneses tere vízszintes összetevőjének anomáliája): a gravitációs Δg_z anomália menetéhez hasonló — efféle összehasonlítgatások eredménye volt [SZARKA 1986, SZARKA 1987].

4. A Poisson-egyenlet mint az elektromágneses potenciál speciális esete

A gravitáció, az elektromosság, valamint a mágnesség mindkét fajtáját Poisson-egyenlet írja le. Az elektromágnesség alapegyenleteiből (azaz a Maxwell-egyenletekből) általános esetben (időbeli térváltozást megengedve) ennél sokkal bonyolultabb inhomogén hullámegyenletek adódnak. A hullámegyenletek szerkezete azonban azonos, akár valamelyik potenciálra, akár valamelyik térkomponensre fejezzük ki.

Az inhomogén hullámegyenletek rendszerét a *4. táblázat* foglalja össze, ahol az elektromágneses egyenletek legáltalánosabb alakja, az ún. távíró egyenlet a legfelső sorban látható. A távíró („telegráf") egyenlet a közegtől, illetőleg az időbeli változás sebességétől függően hullámegyenletre vagy diffúziós egyenletre egyszerűsödik, s a Poisson-egyenlet, amiről eddig beszéltünk, szerényen meghúzódik a legalsó sorban.

Végül érdemes megjegyezni, hogy harmonikus térváltozás esetén a hullámegyenletet és a diffúziós egyenletet is formailag azonos módon fejezhetjük ki.

A potenciálok forrásait az *5. táblázat* foglalja össze.

Fizikai jelenség	Az anomália forrása
Gravitáció	sűrűségkülönbség
Mágnesség	mágnesezettség (atomi köráram) térbeli áramsűrűség
Elektromosság	elektromos töltések
Elektromágnesség	töltések + töltések időbeli változása + áramok + áramok időbeli változása (retardált)
Rugalmas hullámok	kőzetfeszültség, alakváltozás (retardált)

5. táblázat. Néhány geofizikai tér anomáliaforrása
Table 5. Source of anomaly of several geophysical fields

5. Összefoglalás

Céltudatosan nem a különböző erőterek bonyolultságára, hanem a közöttük lévő rejtett vagy kevéssé rejtett összefüggésekre mutattam rá. A mögött a geofizikai értelmezési tapasztalat mögött, hogy a gravitációs térképet minden más módszerrel végzett kutatás esetén érdemes elővenni, lényegében az itt is láttatott kapcsolatok állnak. A bemutatott táblázatok alapján az elméleti háttér a lehető legtömörebben így foglalható össze: az elektromosság szeszélyessége mellett a gravitáció olyannyira megbízható, hogy figyelembevétele mindig nélkülözhetetlen lesz az egyértelmű földtani értelmezéshez.

Köszönetnyilvánítás

A téma részfinanszírozásában megemlítendő a T037694 és a TS 048408 számú OTKA projekt. ÁDÁM Antal és VERŐ József tanácsait, valamint a bírálók (TAKÁCS Ernő és PETHŐ Gábor) észrevételeit külön megköszönöm.

HIVATKOZÁSOK

SIMONYI K. 1986: Elméleti villamosságtan. Tankönyvkiadó, Budapest, 72–75 és 233–238

SZARKA L. 1986: Geofizikai térképezés stacionárius elektromos és mágneses térkomponensekkel. Kandidátusi értekezés, Sopron

SZARKA L. 1987: Geophysical mapping by stationary electric and magnetic field components: A combination of potential gradient mapping (PM) and magnetometric resistivity (MMR) methods. Geophysical Prospecting **35**, 434–444

SZARKA L. 1990: A Coulomb-törvény, mint a geoelektromos anomáliák alapja. Magyar Geofizika **31**, 1–10

TAKÁCS E. 2002: Szóbeli közlés

Függelék

1. A tanulmányban szereplő jelölések a következők:

U: elektromos skalárpotenciál	W: mágneses skalárpotenciál **A**: mágneses vektorpotenciál	Φ: gravitációs potenciál
E: elektromos térerősség	**H**: mágneses térerősség	**g**: gravitációs térerősség
D: eltolási vektor **P**: polarizációs vektor	**B**: mágneses indukció **M**: mágnesezettség vektor	
ε (ε_o): dielektromos állandó (értéke vákuumban)	μ (μ_o): mágneses permeabilitás (értéke vákuumban)	γ: gravitációs állandó
δ: térbeli töltéssűrűség τ: felületi töltéssűrűség σ: elektromos vezetőképesség}	$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$: térbeli áramsűrűség	d: sűrűség
r: a dV térfogatelembe (a da felületelemre) mutató vektor végpontjának és a mérési pontnak a távolsága		

2. Az *A1.* és *A2. táblázat* az U elektromos skalárpotenciál, a W mágneses skalárpotenciál és az A mágneses vektorpotenciál táblázatos formában bemutatott levezetését foglalja össze. (Az elektromos vektorpotenciál csak div $\mathbf{D} = 0$ esetén vezet könnyen kezelhető egyenletekhez; a feltétel irrealitása miatt az elektromos vektorpotenciál levezetésétől eltekintünk.) A kiindulási egyenletek a Maxwell-egyenletek, illetőleg az anyagjellemzők. A geofizikai szakirodalomban előforduló sokféle jelölési mód és előjelhasználat helyett a SIMONYI [1986] által használt tárgyalási módot javaslom követni.

		Elektromosság (U)	Mágnesség (W)
(1)	Alap-egyenletek	$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$ $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \delta_f$ $\mathbf{D} = \varepsilon_o\mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E}$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$ $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ $\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{M}$
(2)	U és W definíciója	$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,U$ $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \mathrm{div}(-\mathrm{grad}\,U) = -\nabla^2 U$ $\nabla^2 U = -\mathrm{div}\,\mathbf{E}$ (Poisson-egyenlet)	$\mathbf{H} = -\mathrm{grad}\,W$ $\mathrm{div}\,\mathbf{H} = \mathrm{div}(-\mathrm{grad}\,W) = -\nabla^2 W$ $\nabla^2 W = -\mathrm{div}\,\mathbf{H}$ (Poisson-egyenlet)
(3)	A források	$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \varepsilon_o\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} + \mathrm{div}\,\mathbf{P}$ $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_o}(\delta_f - \mathrm{div}\,\mathbf{P})$	$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = \mu_o\,\mathrm{div}\,\mathbf{H} + \mu_o\mathrm{div}\,\mathbf{M}$ $\mathrm{div}\,\mathbf{H} = -\mathrm{div}\,\mathbf{M}$
(4)	(2) és (3) alapján	$\nabla^2 U \equiv \Delta U = -\frac{1}{\varepsilon_o}(\delta_f - \mathrm{div}\,\mathbf{P})$	$\nabla^2 W \equiv \Delta W = \mathrm{div}\,\mathbf{M}$
(5)	Általános megoldás Simonyi (1986) alapján	Amennyiben V térfogatot körülzáró a felület normálisa kifelé (a felülettől el) mutat és a potenciál a határfelületen folytonos: $U = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\Delta U}{r}dV - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_a \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2}\right)da$	$W = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\Delta W}{r}dV - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_a \frac{1}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial n_1} + \frac{\partial W}{\partial n_2}\right)da$
(6)	Általános megoldás $\mathbf{n}$ másféle definíciójával	Amennyiben az a felület normálisa (1)-ből (2)-be mutat, az előjel az (1) oldalon megfordul $U = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\Delta U}{r}dV - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_a \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial n_2} - \frac{\partial U}{\partial n_1}\right)da$	$W = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\Delta W}{r}dV - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_a \frac{1}{r}\left(\frac{\partial W}{\partial n_2} - \frac{\partial W}{\partial n_1}\right)da$
(7)	U és W skalárpotenciálok levezetése	$U = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathrm{div}\mathbf{E}}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_a \frac{E_{n_2} - E_{n_1}}{r}da$ $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\limits_V \frac{\mathrm{div}(\mathbf{D}-\mathbf{P})}{r}dV +$ $\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\oint\limits_a \frac{(D_{n_2} - D_{n_1}) - (P_{n_2} - P_{n_1})}{r}da$	$W = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathrm{div}\mathbf{H}}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_a \frac{H_{n_2} - H_{n_1}}{r}da$ vagy Simonyi (1986) alapján $W = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathrm{div}\mathbf{M}}{r}dV - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_a \frac{M_{n_2} - M_{n_1}}{r}da$
(8)	Megoldás U-ra, W-re	Mivel $D_{n_2} - D_{n_1} = \tau_f,\ -(P_{n_2} - P_{n_1}) = \tau_p$ $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \delta_f,\ -\mathrm{div}\,\mathbf{P} = \delta_p$ és $\delta_t = \delta_f + \delta_p$ és $\tau_t = \tau_f + \tau_p$: $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\int\limits_V \frac{\delta_t}{r}dV + \oint\limits_a \frac{\tau_t}{r}da\right)$	$W = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathrm{div}\mathbf{M}}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_V \mathrm{div}\frac{\mathbf{M}}{r}dV$ Mivel $\mathrm{div}\frac{\mathbf{M}}{r} = \frac{\mathrm{div}\mathbf{M}}{r} + \mathbf{M}\,\mathrm{grad}\frac{1}{r}$: $W = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \mathbf{M}\,\mathrm{grad}\frac{1}{r}dV$

A1. táblázat. Az U elektromos és a W mágneses skalárpotenciál párhuzamos levezetése

Table A1. A parallel derivation of electric and magnetic scalar potentials U and W

Megjegyzések:

1. A potenciálok ugrásának feltételezése (5)-ben azzal lenne egyenértékű, hogy a felületi töltéssűrűség helyett kettősréteget tételezünk fel.
2. Térrészenként homogén és izotrop vezetőképességeket feltételezve a (8) sorban U kifejezésében a δ_t tértöltések eltűnnek, s az U kialakításában kizárólag az inhomogenitások határfelületein kialakuló τ_t töltések játszanak szerepet.

3. A tértöltés (δ_t), de különösen a felületi töltéssűrűség (τ_t) megadásában mutatkozó ellentmondások feloldása érdekében megadom azok levezetését:

a) $\delta_t = \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \varepsilon_o\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}$ levezetése

A folytonossági egyenlet div **j** = 0 alakjából **j** = σ **E** behelyettesítéssel σ div **E** + **E** grad σ = 0 származik, amelyből a térbeli töltéssűrűségre közvetlenül adódik:

$$\delta_t = -\varepsilon_o \mathbf{E} \cdot \frac{\mathrm{grad}\,\sigma}{\sigma} \; .$$

b) $\tau_t = D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \varepsilon_o \left(E_n^{(2)} - E_n^{(1)} \right)$ levezetése

A folytonossági egyenlet $j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = 0$ alakjából **j** = σ **E** behelyettesítéssel $\sigma_2 E_n^{(2)} - \sigma_1 E_n^{(1)} = 0$ adódik, ami egyenértékű az alábbi egyenlettel:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\left[E_n^{(2)} - E_n^{(1)}\right] + (\sigma_2 - \sigma_1)\left[E_n^{(2)} + E_n^{(1)}\right] = 0 \; .$$

Innen

$$\tau_t = \varepsilon_o \frac{\sigma \;\; - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\left(E_n^{(1)} + E_n^{(2)}\right) = \varepsilon_o \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\overline{\sigma}} \overline{E}_n \; .$$

		j áramsűrűség mágneses tere	**M** mágnesezettség mágneses tere
(1)	Alap-egyenletek	$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}$ $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$ $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ $\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}$
(2)	**A** definíciója	$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, mivel $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv 0$	
(3)	**A** levezetése	$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_o$ $\frac{1}{\mu_o}\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_o}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{j}$ $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mu_o \mathbf{j}$ Mivel $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ és grad div **A** nullának választható, $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_o \mathbf{j}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_o - \mathbf{M}$ $\frac{1}{\mu_o}\mathrm{rot}\,(\mathbf{B} - \mu_o \mathbf{M}) =$ $\frac{1}{\mu_o}\,(\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} - \mu_o\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}) = 0$ $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mu_o\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$ Mivel $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} \equiv \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ és grad div **A** nullának választható, $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_o\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$
(4)	Megoldás **A**-ra	$\mathbf{A} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{j}}{r} dV$	$\mathbf{A} = -\frac{\mu_o}{4\pi}\int_V \frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{M}}{r} dV$

A2. táblázat. Az egyenáram mágneses terét, valamint a mágnesezettséget leíró mágneses **A** vektorpotenciál párhuzamos levezetése

Table A2. A parallel derivation of the magnetic vector potential **A** describing both magnetism due to magnetisation and magnetic fields due to direct currents