

Magnetotellurikus adatok inverziója nem vízszintes réteghatárú rétegzett féltér esetére¹

PRÁCSER ERNŐ²

A cikk olyan modellekre mutat be egy inverziós eljárást, amelyek lényegében rétegzettek, de a réteghatárok nem vízszintesek. Szintetikus adatokon megmutatjuk, hogy az ismertetésre kerülő inverzió lényegesen megbízhatóbb modellt ad eredményül, mint a független, egydimenziós inverziók sorozata, viszont több nagyságrenddel gyorsabb, mint az általános kétdimenziós inverzió. Az inverzió azon alapul, hogy a tárgyalt modellek lényegesen kevesebb paraméterrel leírhatók, mint az általános kétdimenziós modell, és ezzel összefüggésben a szondázási görbék számításakor minden egyes pontban elegendő az egydimenziós direkt feladat számítása.

E. PRÁCSER: Inversion of magnetotelluric data for layered halfspace with non-horizontal layer boundaries

This paper presents an inversion method for essentially layered models with non-horizontal layer boundaries. On synthetic data will be shown, that the inversion coming into review leads to more reliable model, than the sequence of independent one-dimensional inversions, at the same time it is more magnitude faster than the general two-dimensional inversion. The inversion is based on determining the discussed model with significantly less parameters than the general two-dimensional model, and in this way a one-dimensional forward calculation at each sounding site is sufficient for computing the sounding curves.

Bevezetés

A magnetotellurikus mérésekre az egydimenziós direkt feladat megoldása már régóta ismert [WAIT 1953]. Tekintettel arra, hogy a magnetotellurika esetén síkhullámú gerjesztésről van szó, a direkt feladat megoldása lényegesen gyorsabb, mint a frekvenciaszondázások vagy tranziens elektromágneses mérések esetében. Ezért a magnetotellurikus mérések inverziójára már évtizedek óta alkalmazzák az egydimenziós inverziót [JUPP, VOZOFF 1974]. Annak ellenére, hogy a matematikai alapok már ismertek voltak, a számítástechnika fejletlensége folytán bonyolultabb (két- vagy háromdimenziós) modellekre sokáig nem állt rendelkezésre a gyakorlatban alkalmazható direkt feladatmegoldó, vagy inverziós program. Ha léteztek is ilyen programok, ezeket csak néhány nagy számítóközpontban volt lehetséges futtatni. Ezért jobb híján akkor is az egydimenziós inverziót alkalmazták, amikor a modell valójában nem volt egydimenziós, oly módon, hogy a szelvény menti mérések esetén az egydimenziós inverzió által az egyes szondázási pontokhoz rendelt rétetparamétereket szelvény mentén ábrázolták és így egy közelítő képet kaptak a mélyben levő közegek ellenállásviszonyairól. A kétdimenziós inverziós programok, összefüggésben a számítástechnika fejlődésének felgyorsulásával, támaszkodva a már ismert elméleti alapokra [JUPP, VOZOFF 1976], a 80-as években kezdtek szélesebb körben elterjedni [CONSTABLE et al. 1987, UCHIDA 1993]. Az inverziós programokban a direkt feladatmegoldás általában a véges elemek vagy a véges differenciák módszerével történik, ezért az (y, z) síkon egy rácsot kell felvenni, amelynek minden egyes cellájához egy vezetőképesség érték tartozik. Az inverzió feladata éppen ezeknek a vezetőképesség értékeknek a meghatározása. A feladatot az nehezíti meg, hogy a cellák száma gyakran meghaladja a mérési adatok számát,

ami eleve lehetetlenné teszi a vezetőképesség értékek megbízható meghatározását. Ezért terjedt el az Occam-inverzió [CONSTABLE et al. 1987], amely a lehető legegyszerűbb, hirtelen vezetőképesség ingadozásokat nem tartalmazó földtani modelleket ad eredményül. Ha a valódi szerkezet vezetőképesség eloszlása tartalmaz éles törésvonalakat, akkor az Occam-inverzió ezeket nem jeleníti meg, de azért a kapott modellt általában jól lehet értelmezni. Az általános kétdimenziós inverzió alkalmazása során felmerülő problémák miatt célszerű olyan modell-meghatározást bevezetni, amely lényegesen kevesebb paraméterrel írja le a modellt. Az olyan modellekre, amelyek alapján véve rétegzettek, de a rétegek vastagsága nem állandó, ez megtehető. Az ilyen típusú inverzióval először a Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszékén foglalkoztak egyenáramú Schlumberger-szondázásokra [GYULAI, ORMOS 1997; 1999] valamint szeizmikus mérésekre [DOBRÓKA 1996], úgy, hogy a rétegvastagságokat megadó függvényt Fourier- vagy Csebisev-sorfejtéssel állították elő. A lényeg az, hogy a rétegek vastagságát, illetve ezen keresztül a réteghatárokat valamilyen analitikus függvénnyel lehet megadni, és ez az analitikus függvény csak viszonylag kisszámú paramétertől függ. Ebben a cikkben a magnetotellurikus mérésekre mutatunk be egy hasonló elven működő inverziós eljárást azzal az eltéréssel, hogy a rétegvastagságokat Lagrange-interpolációval adjuk meg. Ennek az a legfőbb előnye, hogy az inverzió során lehetővé teszi, hogy bizonyos pontokban rögzíteni tudjuk a már ismert rétegvastagságokat. A Fourier- vagy a Csebisev-sorfejtéses módszer esetében a modell geometriáját meghatározó paraméterek a soragyűrűthetők, a Lagrange-interpolációs módszer esetében pedig az interpoláció alappontjaiban érvényes rétegvastagságok.

1. Az inverzió alapjai

Az inverzió célja a modellt meghatározó paraméterek becslése a mért adatok ismeretében. Az inverzió tulajdonságait döntően az határozza meg, hogy a modell miként

¹ Beérkezett: 2002. április 9-én

² Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet,
H-1145 Budapest, Kolumbusz u. 17–23.

függ a paramétereiktől. Ha a modellt nagyszámú paraméter adja meg, akkor az inverzió eredményeként részletekben dús modellt kaphatunk. Ez a helyzet az általános kétdimenziós inverziók esetében, de az eljárás stabilitása és megbízhatósága általában nem megfelelő. Ha a modellt kisszámú paraméter jellemzi, akkor az inverzió eredményeként kapott modell viszonylag egyszerűbb lesz, de gyakran mégis az ilyen típusú inverziók a megbízhatóbbak, mivel a kisszámú paraméter stabilabban meghatározható. Azt feltételezzük, hogy a modell rétegzett, de a rétegek vastagságai változhatnak, a változás viszont nem lehet túl meredek. Ebben az esetben a rétegek vastagságát valamilyen egyszerű képlettel, valamilyen sorba fejtéssel, vagy interpolációs eljárással lehet megadni. Például a rétegek vastagságát megadhatja a Csebisev-polinomok szerinti sorfejtés, így az y koordinátájú pontban a j -ik réteg vastagságát (a logaritmusán keresztül) a következő képlet határozza meg:

$$\log(d_j) = \sum_{k=1}^N c_{k,j} T_k(y_t) \quad (1)$$

ahol

T_k — a k -ik Csebisev-polinom,

$$y_t = -1 + 2 \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}, \quad (2)$$

y_{\min} és y_{\max} a szelvény legkisebb és legnagyobb koordinátájú pontja. Az (2) képlet azt fejezi ki, hogy az y koordinátát a $[-1,1]$ intervallumba kell transzformálni, hiszen a Csebisev-polinomok ott vannak értelmezve. Azáltal, hogy a rétegek vastagságának a logaritmusát adjuk meg (1), könnyen elkerülhető, hogy az iterációs elven alapuló inverzió során negatív rétegvastagságokat kapjunk olyan esetben, amikor azt az inverzió túlzott mértékben próbálná csökkenteni.

A Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszékén a rétegvastagságok sorba fejtésén (1) alapuló inverziót dolgozták ki az egyenáramú Schlumberger-szondázásokra [GYULAI, ORMOS 1997], úgy hogy egy hasonló sorfejtés szerint az egyes rétegek fajlagos ellenállásának a változását is megengedték. Az ezen az alapon működő inverzió jó eredményeket ad magnetotellurikus mérések esetén is, hátránya azonban hogy a $c_{k,j}$ együtthatóknak közvetlenül nincs fizikai jelentésük. Ez akkor okozhat problémát, amikor olyan szelvényen végezzük a méréseket, ahol fúrési eredmények vannak. Ekkor természetes elvárás az, hogy az inverzió paramétereit úgy tudjuk rögzíteni, hogy a fúrás helyén a megfelelő rétegsort kapjuk. Ez a Fourier- vagy Csebisev-sorfejtéses módszer esetén csak bonyolultan lenne megvalósítható. Ezért most a rétegvastagságok Lagrange-interpolációs meghatározásán alapuló inverziót tárgyaljuk, amelynek esetében már nagyon könnyen elérhető, hogy egy adott pontban rögzítsük a rétegpáraméterek ismert értékeit. Ekkor a j -ik rétegvastagság logaritmusát a szelvény egy tetszőleges y koordinátájú pontjában:

$$\log(d_j) = \sum_{k=1}^N d_{k,j} l_k(y; y_1, \dots, y_N) \quad (3)$$

ahol

$l_k(y; y_1, \dots, y_N)$ — az y_1, \dots, y_N alappontokra támaszkodó, $N-1$ -ed fokú Lagrange-interpolációs polinom:

$$l_k(y_j; y_1, \dots, y_N) = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = k \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$d_{k,j}$ — a j -ik réteg vastagságának a logaritmusát az y_k koordinátájú pontban.

A modellt meghatározó rétegpáraméterek és az adatok vektor alakban, abban az esetben, amikor a (3) képletben $N=3$:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_{1,1} \\ d_{2,1} \\ d_{3,1} \\ d_{1,2} \\ d_{2,2} \\ d_{3,2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \\ m_{1,2} \\ \vdots \\ m_{n,2} \\ \vdots \\ m_{1,k} \\ m_{n,k} \end{pmatrix} \quad (4)$$

ahol

ρ_i — az i -ik réteg fajlagos ellenállása,

$m_{i,j}$ — a j -ik ponthoz tartozó i -ik mérési adat, esetünkben a magnetotellurikus látszólagos fajlagos ellenállás, vagy a fázis. Az y_i alappontokat célszerű a szelvény mentén egyenletesen elosztani, de ez nem feltétlenül szükséges. Az alappontok és a mérési pontok egybe is eshetnek. Ha a szelvény mentén egy adott pontban rendelkezésre állnak a rétegpáraméterek, például fúrési eredményekből, akkor azt a pontot feltétlenül érdemes bevenni az alappontok közé és célszerű a hozzá tartozó, ismert rétegpáramétereket megadni és rögzíteni, hogy az inverziós algoritmus ne változtassa. Az y_i alappontok számát nem érdemes túl nagyra venni, azaz N értéke lehetőleg 10-nél kisebb legyen (3). Nagy N esetén ugyanis az interpoláló polinom fokszáma is nagy lesz ($N-1$), ezáltal a réteghatárokon zavaró, meredek változások jelenhetnek meg. A feladat tehát az ismert \mathbf{m} vektor alapján meghatározni a \mathbf{p} paramétervektort. Ez a szokásos, iterációs elven működő linearizált inverzióval tehető meg, amelynél az i -ik iterációs lépés során a $\Delta \mathbf{p}_i$ -t a

$$\|\Delta \mathbf{m}_i - \mathbf{J} \Delta \mathbf{p}_i\| \quad (5)$$

norma minimalizálásával határozzuk meg, ahol

\mathbf{J} — a parciális deriváltakat tartalmazó Jacobi-mátrix,

dimenziója $M \times P$, amelynek egy eleme $J_{k,l} = \frac{\partial m_k}{\partial p_l}$ (az \mathbf{m}

és a \mathbf{p} vektorok elemeit most csak egy indexszel láttuk el, azaz m_k , illetve p_l itt értelemszerűen az \mathbf{m} és \mathbf{p} vektorok (4) k -ik és l -ik elemét jelenti,

M — az adatok száma,

P — a paraméterek száma,

$\Delta \mathbf{m}_i$ — az eddigi legjobb modellhez tartozó elméleti adatvektor és a mérési adatvektor különbsége,

$\Delta \mathbf{p}_i$ — megadja, hogy a paramétervektort hogyan kell módosítani annak érdekében, hogy a mérési adatok és a modellhez tartozó számított ellenállás és fázis adatok eltérése kisebb legyen.

Ennek az egyenletnek a megoldása a \mathbf{J} Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontásán alapul [JACKSON 1972]:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T \quad (6)$$

ahol

Λ — a szinguláris értékeket tartalmazó átlós mátrix,
 U — sajátvektorokat tartalmazó mátrix, dimenziója $M \times Q$,
 V — sajátvektorokat tartalmazó mátrix, dimenziója $P \times Q$,
és $Q = \min(M, P)$.

Az inverzióhoz szükséges a direkt feladat számító algoritmus, azaz esetünkben az \mathbf{m} vektor meghatározása a \mathbf{p} vektor alapján. A direkt feladat számítás úgy történik, hogy minden egyes szondázási pontnál az y koordinátára a \mathbf{p} vektor komponenseiből a (3) képlettel kiszámítjuk az abban a pontban érvényes rétegvastagságokat és megoldjuk az egydimenziós direkt feladatot. Az így kapott értékek adják az \mathbf{m} vektor elemeit. A (6) felbontás segítségével előállítható általánosított inverz (Lánczos-inverz) megadja $\Delta \mathbf{p}_i$ értékét $\Delta \mathbf{m}_i$ függvényében:

$$\Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{V} \Lambda^{-1} \mathbf{U}^T \Delta \mathbf{m}_i \quad (7)$$

A (7) egyenlet ugyanazt a $\Delta \mathbf{p}_i$ értéket adja, amelyet akkor kapnánk, ha a legkisebb négyzetek módszerét alkalmaznánk, azaz abban az esetben, amikor a legkisebb négyzetek szerinti megoldás létezik az ekvivalens a szinguláris értékek szerinti felbontáson alapuló megoldással. A szinguláris értékek szerinti felbontáson alapuló megoldásnak az az előnye, hogy olyan \mathbf{J} mátrixok esetében is létezik, amikor a legkisebb négyzetek módszerén alapuló megoldás nem alkalmazható. Abban az esetben, ha a λ_j szinguláris értékek között nullához közeli értékű is van, akkor a (7) képlet nem ad stabil eredményt. Ezért vagy az U és V mátrixokból hagyjuk el a kis λ_j -khez tartozó oszlopokat, vagy pedig egy α csillapító tényezővel a Λ^{-1} j -ik elemét a

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \alpha}$$

képlettel számítjuk λ_j^{-1} helyett. A bemutatott számítások során az utóbbi megoldást alkalmaztuk. Az inverzió eredményeként kapott, a modellt meghatározó paraméterek minőségének a jellemzésére jól használható a korrelációs mátrix. Ha a korrelációs mátrix főátlón kívüli elemei 0-ák, az azt jelenti, hogy a modellparaméterek függetlenek, azaz külön-külön is meghatározhatók. Ez a gyakorlatban persze nem szokott előfordulni, azaz a modellparaméterek között mindig van valamilyen korreláció. A Jacobi-mátrix szinguláris értékek szerinti felbontása alapján (6) a kovarianciamátrix egyszerűen számítható. Ha azt feltételezzük, hogy a mérési adatokat terhelő hibák σ szórásúak és függetlenek, akkor a modellparaméterek kovarianciamátrixa:

$$\text{cov}(\mathbf{p}) = \sigma^2 \mathbf{V} \Lambda^{-2} \mathbf{V}^T \quad (8)$$

A korrelációmátrix pedig egyszerűen számítható a kovarianciamátrixból. A korrelációmátrix esetében az egyhez közeli abszolút értékű főátlón kívüli elem pedig azt jelzi, hogy két paraméter között nagyon szoros a kapcsolat. Az inverzió jellemzésére szolgál még a mért adatok és a modellhez tartozó elméleti értékek különbségét kifejező norma:

$$\delta_{\text{adat}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_m} \sum_{j=1}^{h_k} \left(\frac{m_{j,k}^{\text{sz}} - m_{j,k}^{\text{mért}}}{m_{j,k}^{\text{mért}}} \right)^2} \quad (9)$$

ahol

$m_{j,k}^{\text{sz}}$ — a j -ik számított adat a k -ik mérési pontban,

$m_{j,k}^{\text{mért}}$ — a j -ik mérési adat a k -ik mérési pontban,

n_m — a mérési pontok száma,

h_k — az adatok száma a k -ik mérési pontban.

A szintetikus adatokon végzett inverzió elemzéséhez a modell hibájául egy olyan számot vezetünk be, amely a réteghatárok eltérését jellemzi. Az n réteges esetre:

$$\delta_{\text{mod}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left(\frac{h_j^L(y) - h_j^{\text{exp}}(y)}{h_j^{\text{exp}}(y)} \right)^2 dy} \quad (10)$$

ahol $h_j^L(y)$ a j -ik réteghatár mélységét jelenti az y koordinátájú pontban, amit közvetve a (3) képlet határoz meg, $h_j^{\text{exp}}(y)$ pedig a szintetikus adatok generálásához használt modellt réteghatárának a mélysége. A (10) képlet csak a réteghatárok eltérését veszi figyelembe, és nem függ a rétegek fajlagos ellenállásaitól. A gyakorlatban is lényegesen nagyobb szerepe van a réteghatárok pontos meghatározásának, mint a pontos fajlagos ellenállás meghatározásának. Esetünkben, amikor az inverzió során csak bizonyos típusú modellekre számítunk, a modellek eltéréseinek jellemzésére ez az adat megfelelő.

Az általános, kétdimenziós inverzió eredményének az értékeléséhez szükség lesz még a modellek különbségét a vezetőképesség eloszlások eltéréseivel kifejező számra:

$$\delta_{\text{mod},\sigma} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(\frac{\sigma_j^b - \sigma_j^g}{\sigma_j^g} \right)^2} \quad (11)$$

ahol

M — az általános kétdimenziós modell vezetőképesség celláinak száma,

σ_j^g — a szintetikus adatok generálásához szolgáló modell j -ik cellájának vezetőképessége,

σ_j^b — az inverziós modell j -ik cellájának vezetőképessége.

2. Modell a szintetikus adatok generálásához

Az ismertett inverziót szintetikus adatokon elemezzük. A kétdimenziós modell réteghatárait a következő analitikus képlettel adjuk meg:

$$h_j = c_{j,1} + c_{j,2} e^{-c_{j,3} y_{i,j}^2} \quad (12)$$

ahol

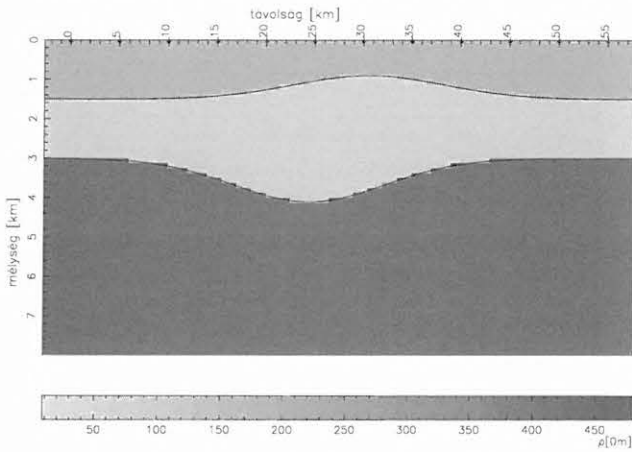
$$c_{1,1}=1,5; \quad c_{2,1}=3,0; \quad c_{1,2}=-0,6; \quad c_{2,2}=1,1; \quad c_{1,3}=c_{2,3}=30;$$

$$y_{i,1} = \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} - 0,55,$$

$$y_{i,2} = \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} - 0,45.$$

Az első réteghatár maximális értéke 30,25 km-nél, a második réteghatár minimális értéke pedig 24,75 km-nél van. A direkt feladat megoldásához használt rács mérete: 42x138. A frekvenciák száma 16, a legkisebb frekvencia értéke 0,0025 Hz, a legnagyobbé 80 Hz. Az egyes rétegek

fajlagos ellenállásai: 150 Ωm , 40 Ωm , 400 Ωm . Az 1. Ábrán látható modellre elméleti adatokat számoltunk, az így kapott adatokhoz Gauss eloszlású zajt adtunk, úgy hogy az adatok relatív hibája 99%-os valószínűséggel ne legyen nagyobb, mint 5%. Az inverziós kísérletek során az így kapott adatokhoz próbáltunk egy inverziós modellt hozzárendelni, és látni fogjuk, hogy az 1. ábrán látható modellre a Lagrange-interpoláción alapuló inverzió jó eredményt ad.

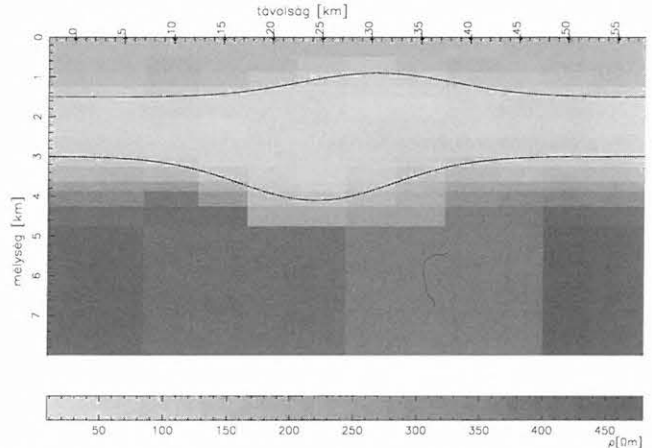


1. ábra. Modell a szintetikus adatok generálásához

Fig. 1. Model to generate synthetic data

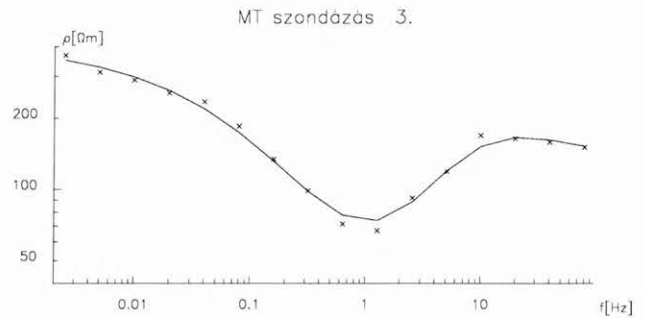
Az adataink kétdimenziós modellre számolt szintetikus adatok, ezért feltételezhetjük, hogy a TE és TM módú adatok ugyanahhoz a kétdimenziós modellhez tartoznak, bár a zajok miatt az adatok minimális háromdimenziós hatást is tartalmazhatnak. A terepi mérések esetén a helyzet sokkal rosszabb, ezért a nagy zaj, valamint a háromdimenziós hatások miatt a kétdimenziós inverziót általában a TE és TM módú adatok együttes figyelembe vételével érdemes elvégezni. A szintetikus adatok esetében viszont most csak a TM polarizációjú adatokkal számolunk. Ha ezekre az adatokra (látszólagos fajlagos ellenállás, fázis) elvégezzük a kétdimenziós simító inverziót, akkor a 2. ábrán látható modellt kapjuk, amelyre $\delta_{\text{mod},\sigma} = 0,826$. Itt azt kell még megjegyezni, hogy az inverziós rács lényegesen durvább, mint a direkt feladat megoldásához használt rács. A direkt feladat megoldásához szükséges rács egyes cellái az inverziós rácsban összevonásra kerülnek. Irreális lenne ugyanis elvárni, hogy az inverziós algoritmus a direkt feladatmegoldáshoz szükséges rácsnak mind a 5793 cellájához egy megbízható vezetőképesség értéket rendel. Az inverziós rács a mélyben nagyobb blokkokból áll, a felszín közelében viszont, ahol elvárható a módszer nagyobb felbontóképessége, kisebbekből. Ez a 2. ábrán is megfigyelhető. A direkt feladatmegoldáshoz használt rács celláinak blokkokba való csoportosításának eredményeként a modellparaméterek száma 141 lett. A magnetotellurikus direkt feladat megoldása a véges elemek módszerével történik [UCHIDA 1993]. A simító inverzió természeténél fogva a pontos réteghatárokat nem kaptuk vissza, ennek ellenére a modell jól értelmezhető és összhangban áll az eredeti, a szintetikus adatok számításához használt modellel. Folytonos vonallal ennek a modellnek a (12) képlettel számolt réteghatárai láthatóak. Ezeket a réteghatárokat ezentúl minden, a szintetikus adatokhoz kapcsolódó ábrán feltüntetjük. Az egyes szondázási görbék illeszkedése szintén elfogadható (3. ábra). Az ábrán is látszik, hogy a szimbólumokkal ábrázolt szintetikus

adatokat zajjal terheltük. A továbbiakban a szintetikus adatok alapján történő inverziók esetében nem jelenítjük meg a szondázási görbék illeszkedését, mivel azok valamennyi esetben a 3. ábrán levő görbékhez hasonlóan jól illeszkednek. Az általános kétdimenziós inverzió legnagyobb hátránya, hogy meglehetősen nagy számítógépes kapacitást igényel, és az ismeretlenek nagy száma miatt a kapott modell sem egyértelmű. A simító faktor meghatározása is okozhat gondot, túl nagyinak véve ugyanis a modell alig fog különbözni a homogén feltételtől, túl kicsi értéket választva pedig nem kívánt vezetőképesség-változásokat kapunk.



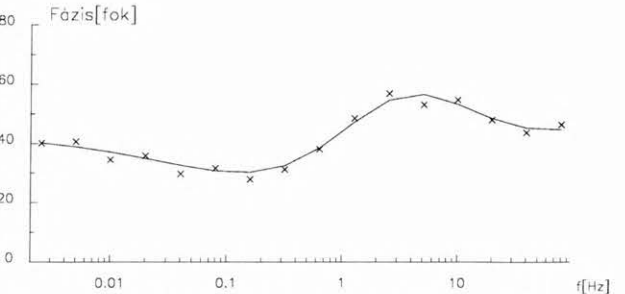
2. ábra. A szintetikus adatokon elvégzett kétdimenziós inverzió eredménye

Fig. 2. Result of two-dimensional inversion of synthetic data



3. ábra. A szondázási görbék illeszkedése a 10 km-nél levő mérési pontban

Fig. 3. The fitting of sounding curves at 10 km measuring site



3. ábra. A szondázási görbék illeszkedése a 10 km-nél levő mérési pontban

Fig. 3. The fitting of sounding curves at 10 km measuring site

3. Független egydimenziós inverziók sorozata

Az egydimenziós direkt feladatmegoldás már évtizedek óta ismert [WAIT 1953]. A réteghatárak ismeretében

az impedancia az n réteges féltérre rekurzióval gyorsan számítható:

$$Q_k = \frac{Q_{k+1} + \left(\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{th}\left((i\omega\mu\sigma_k)^{\frac{1}{2}} d_k\right)}{\left(\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k}\right)^{\frac{1}{2}} + Q_{k+1} \operatorname{th}\left((i\omega\mu\sigma_k)^{\frac{1}{2}} d_k\right)}, \quad Q_n = 1, \quad (13)$$

ahol

σ_k — a k -ik réteg vezetőképessége,

d_k — a k -ik réteg vastagsága,

ω — a körfrekvencia,

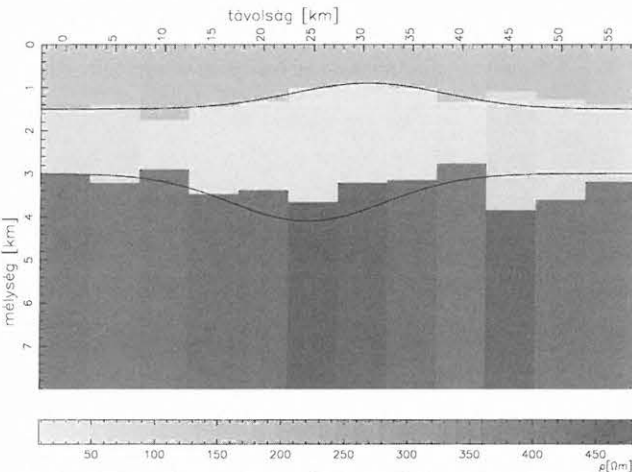
$$i = \sqrt{-1},$$

μ — a mágneses permeabilitás.

Q_1 -ből impedancia, majd az impedanciából látszólagos fajlagos ellenállás és fázis számítható:

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \left(\frac{i\omega\mu}{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{2}} Q_1, \quad \rho_a = \frac{|Z|}{\omega\mu}, \quad \phi = \operatorname{atan} \frac{\operatorname{Im}Z}{\operatorname{Re}Z} \quad (14)$$

A szintetikus adatrendszerrel végzett inverzió során először a TE módú adatokra végezzük el az egydimenziós inverziók sorozatát (4. ábra).



4. ábra. Független egydimenziós inverziók sorozata TE módú adatokkal

Fig. 4. Series of independent one-dimensional inversions obtained from TE data

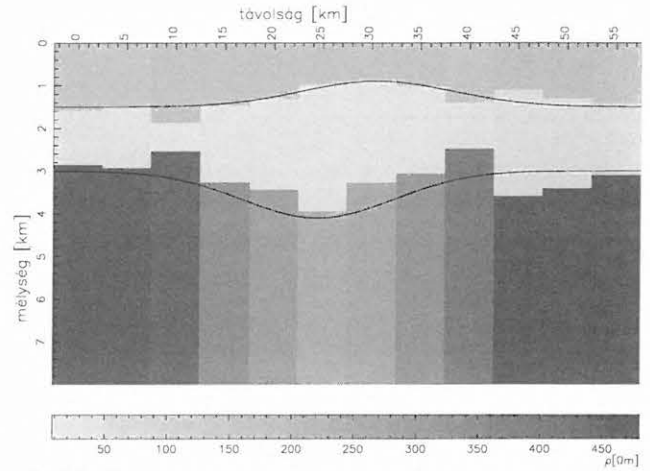
Látható, hogy a szintetikus adatok generálásához alkalmazott modellnek az első réteghatárát viszonylag jól visszszakapjuk, a második réteghatár viszont bizonytalanabbá válik, és az egyes rétegeken belül is megjelennek nem kívánt ellenállás-változások. Ezek az ellenállás-változások részben abból adódnak, hogy a vékony jól vezető réteg ekvivalenciája miatt a második réteg paraméterei külön-külön nem határozhatók meg, másrészt pedig abból, hogy a kétdimenziós TE módú adatrendszerre az egydimenziós inverziót alkalmaztuk, ami azt okozta, hogy a harmadik réteg ellenállása a szelvény közepén nagyobb lett, mint a széleken. A TM módú adatokkal végzett inverzió esetén pedig a TE móddal ellentétben a harmadik réteg középső részén ellenállás csökkenés figyelhető meg (5. ábra). Ezért érdemes a továbbiakban a TE és TM módú magneto-

tellurikus látszólagos fajlagos ellenállásokból származtatott effektív ellenállással számolni:

$$\rho_{\text{eff}} = \sqrt{\rho_{\text{TE}} \rho_{\text{TM}}}$$

Az effektív fázis:

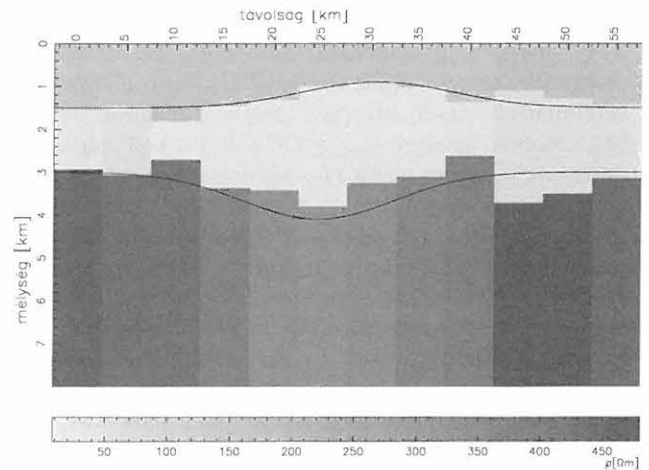
$$\Phi_{\text{eff}} = \frac{\Phi_{\text{TE}} + \Phi_{\text{TM}}}{2}$$



5. ábra. Független egydimenziós inverziók sorozata TM módú adatokkal

Fig. 5. Series of independent one-dimensional inversions obtained from TM data

A 6. ábrán az effektív ellenállás és fázis alapján végzett független egydimenziós inverziók sorozata látható, a modellnek a generáló modelltől való eltérése: $\delta_{\text{mod},\sigma} = 0,791$. Ez valamivel jobb, mint az általános kétdimenziós inverzió esetében, ennek pedig az az oka, hogy a generáló és az inverziós modell vezetőképesség értékei a kétdimenziós simító



6. ábra. Független egydimenziós inverziók sorozata effektív ellenállás és fázis adatokkal

Fig. 6. Series of independent one-dimensional inversions obtained from effective resistivity and phase data

inverziónál a simító hatás miatt a réteghatároknak egy nagyobb környezetben különböznek. A mérési adatok hibája és az ekvivalencia miatt az egydimenziós inverziók által adott réteghatárok itt sem követik az eredeti tesztmodell folytonos vonallal berajzolt réteghatárát. Megmaradtak még az egyes rétegeken belüli nem kívánt fajlagosellenállás-változások is. Kismértékű javulás figyelhető meg a harmadik

réteg ellenállásának a kisebb mértékű változásában. Pedig a mért és az elméleti adatok minden egyes szondázási pontban jól illeszkednek. Az ekvivalencia jelensége jól látszik a 10 km-nél levő rétegeparaméterek korrelációs mátrixán (15), amelyről a későbbiekben még szó lesz.

A 4., 5., és a 6. ábrákon a hasonlóság részben abból adódik, hogy a szintetikus adatok valamilyen mértékben a kiinduló modell (1. ábra) tulajdonságait tükrözik, részben pedig hogy a szintetikus adatokhoz adott zaj hatása is hasonlóan érvényesül. A különbségek oka pedig az, hogy rendre TE, TM módú és effektív adatokról van szó.

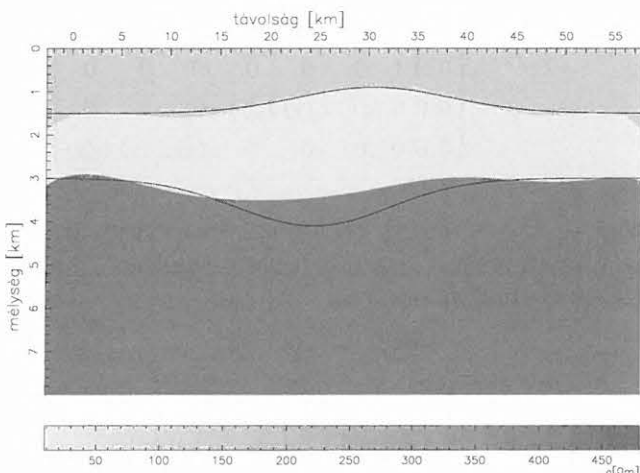
4. Inverzió Lagrange-interpolációs polinomokkal

Végezzük el az inverziót a TE módú adatokkal (7. ábra). Az első réteghatárt elfogadható pontossággal kaptuk meg, a második réteghatár viszont a szelvény közepén határozottan feljebb került. Az inverzió a rétegekhez a $\rho_1=149,3 \Omega\text{m}$; $\rho_2=36,8 \Omega\text{m}$ és $\rho_3=415,7 \Omega\text{m}$ fajlagos ellenállás értékeket rendelt. A Lagrange-interpoláció 8 alappontjának koordinátái:

0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 55 km.

Az adat- és a modellhiba:

$$\delta_{\text{adat}} = 1,08; \quad \delta_{\text{mod}} = 7,18.$$



7. ábra. Inverzió Lagrange-interpolációval TE módú adatokból

Fig. 7. Inversion with Lagrange interpolation obtained from TE data

A TM módú adatokkal, ugyanazon alappontokkal elvégzett inverzió eredménye látható a 8. ábrán. Az első réteghatárt ennél is elfogadható pontossággal kaptuk meg, a szelvény közepén második réteghatár viszont lejjebb került, mint a szintetikus adatok generálásához szolgáló modell második réteghatára. A rétegek fajlagos ellenállásai: $\rho_1=150,1 \Omega\text{m}$; $\rho_2=40,6 \Omega\text{m}$ és $\rho_3=370,1 \Omega\text{m}$.

Az adat- és a modellhiba:

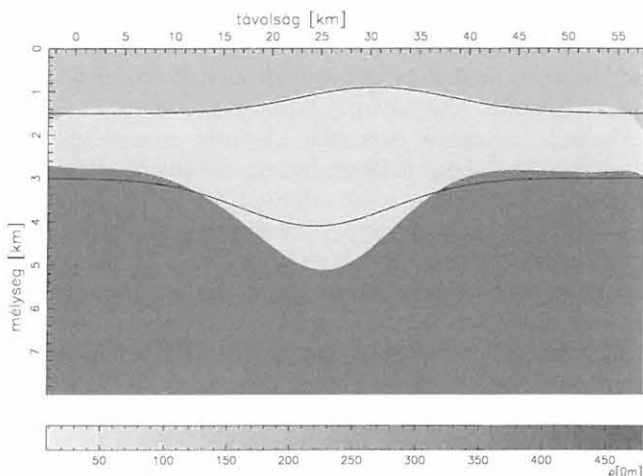
$$\delta_{\text{adat}} = 1,78; \quad \delta_{\text{mod}} = 9,30.$$

Az effektív látszólagos ellenállás, és az effektív fázis értékek alapján az inverzió a 9. ábrán látható modellt adja eredményül. Itt már a kapott réteghatár jól követi az eredeti generáló modell réteghatárát, az eltérés az első réteghatár esetében minimális, a második réteghatár esetében kissé nagyobb. A modell javulása a TE és a TM módú adatok alapján kapott modellhez képest a modellhiba csökkenésé-

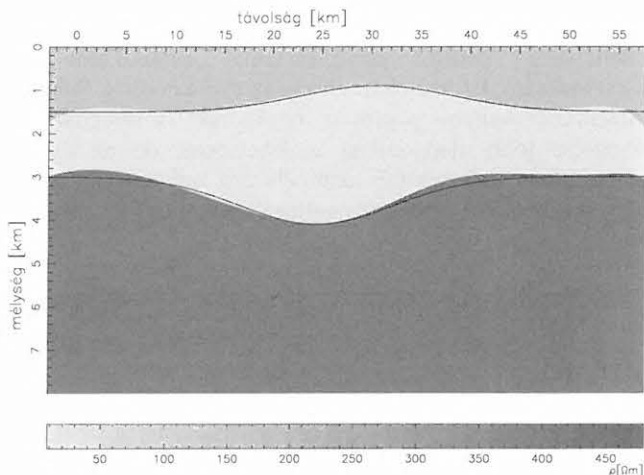
ben is megnyilvánul. A rétegek fajlagos ellenállásai: $\rho_1=149,9 \Omega\text{m}$; $\rho_2=38,8 \Omega\text{m}$ és $\rho_3=391,5 \Omega\text{m}$.

Az adat- és a modellhiba:

$$\delta_{\text{adat}} = 1,20; \quad \delta_{\text{mod}} = 4,36.$$



8. ábra. Inverzió Lagrange-interpolációval TM módú adatokból
Fig. 8. Inversion with Lagrange interpolation obtained from TM data



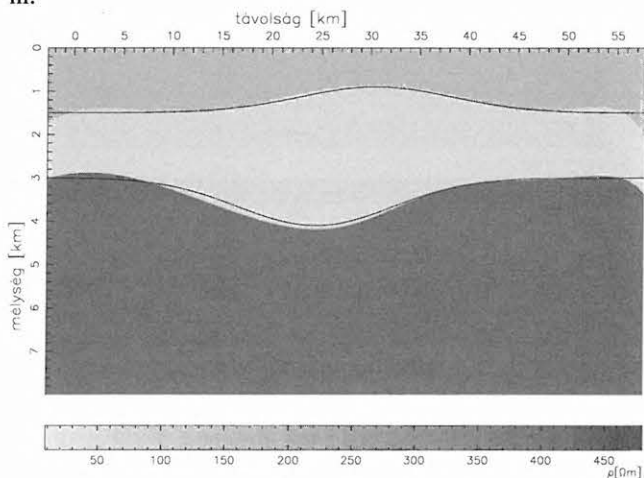
9. ábra. Szelvény menti inverzió Lagrange-polinomokkal effektív ρ és fázis értékek alapján

Fig. 9. Inversion with Lagrange interpolation based on effective resistivity and phase data

Annak, hogy az adatok illeszkedésének a hibája kissé nagyobb, mint a TE módú adatok esetében, az lehet az oka, hogy a szintetikus adatokhoz zajt adtunk, és a TM módú adatokhoz adott zaj jobban befolyásolta a szondázási görbék illeszkedését. Mindhárom modell esetén (7., 8., 9. ábra) a szelvény 0 km alatti és 50 km feletti részein a kapott réteghatár már jelentősen elhajlik, mivel ezek a részek már nem tartalmaznak mérési pontot. Összehasonlítva a független egydimenziós inverziók sorozatát és az adatok Lagrange-interpolációval történő inverzióját, megállapítható, hogy a független egydimenziós inverziók során a réteghatárok bizonytalanul határozhatók meg, de az adat típusa (TE, TM módú vagy effektív ellenállás) a réteghatárokra vonatkozóan nincs nagy hatással, a rétegekben (különösen a harmadikban) viszont az ellenállások eltérőek lehetnek. A Lagrange-interpolációs inverzió esetében, ahol természete-

sen csak a rétegvastagságok változásáról lehet szó, nyilvánvaló, hogy a második réteghatár az effektív ellenállás és fázis alapján történő inverzió esetében a legjobb. A szelvény középső részén a második réteg vastagságának a TE mód esetén kisebb, a TM mód esetén pedig nagyobb érték adódik, mint a generáló modell rétegvastagsága.

A 9. ábrán látható, hogy a szintetikus adatok generálásához használt modell és az inverziós modell között 40 km-nél, a második réteghatárnál jelentős az eltérés. Az egydimenziós inverziók sorozatát ábrázoló modellekből is megállapítható, hogy a 40 km-hez tartozó adatok jelentősen eltérnek a környező pontok adataitól. Ez az eltérés abból adódik, hogy az ilyen típusú földtani szerkezetekre az adatokat terhelő zaj nagymértékben befolyásolja az inverzióval számított paramétereket. Ezért végezzük el az inverziót úgy is, hogy 40 km-nél rögzítjük a rétegvastagságokat. Az első réteg vastagsága az ábra alapján megfelelő pontosságú (1,19 km), csak a második réteg vastagsága kisebb a vártnál (1,77 km). Ha a második réteg ellenállását megnöveljük (1,95 km), és az inverzió során rögzítjük, akkor a 10. ábrán látható modellt kapjuk. Ezen látható, hogy 40 kilométernél most már megkaptuk a várt rétegvastagságokat. Az adat-, és a modellhiba kismértékben megnövekedett: $\delta_{\text{adat}}=1,21$; $\delta_{\text{mod}}=5,0$; ez azonban várható is volt, mivel a szelvény 40 kilométernél levő pontjánál a réteghatárok hibája eltűnt, máshol viszont kismértékben megnőtt. A rétegek fajlagos ellenállásai pedig: $\rho_1=150,0 \Omega\text{m}$; $\rho_2=40,8 \Omega\text{m}$ és $\rho_3=394,0 \Omega\text{m}$. Ez azt jelenti, hogy az első két réteg fajlagos ellenállását nagyon pontosan megkaptuk. A réteghatárok rögzítése több alappontban is lehetséges, de az összes alappontban való rögzítés nem célszerű, mivel az inverziós algoritmus akkor csak a réteghatárokat tudja változtatni.



10. ábra. Szelvény menti inverzió Lagrange-polinomokkal effektív ρ és fázis értékek alapján 40 km-nél rögzített rétegvastagságokkal

Fig. 10. Inversion with Lagrange interpolation, based on effective resistivities and phase, with fixed layer thicknesses at 40 km

5. A korrelációs mátrix elemzése

Tekintsük a 10 km-nél levő szondázási pontot és vegyük az egydimenziós inverzió által meghatározott réteghatárok korrelációs mátrixát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,23 & 0,04 & -0,30 & 0,25 \\ 0,23 & 1 & 0,24 & -0,96 & 1,0 \\ 0,04 & 0,24 & 1 & -0,19 & 0,27 \\ -0,30 & -0,96 & -0,19 & 1 & -0,96 \\ 0,25 & 1,0 & 0,27 & -0,96 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix} \quad (15)$$

A mátrix jobb oldala mellé írt paraméterek jelzik, hogy a korrelációs mátrix egy adott sora (oszlopa) milyen paraméternek felel meg. A főátlón kívüli elemek kifejezik, hogy az egyes réteghatárok milyen kapcsolatban állnak egymással. Például kiolvasható (2. sor 5. oszlop), hogy a második réteg ellenállása és vastagsága nagyon szoros korrelációban van egymással, azaz azok külön-külön nem határozhatók meg, csak a két érték hányadosát kaphatjuk meg. A szelvény menti inverzió során a

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, d_{1,1}, d_{2,1}, \dots, d_{1,2}, d_{2,2}, \dots$$

modellparaméterekre (3) (4) vonatkozóan kapjuk meg a kovarianciamátrixot. Ennek ismeretében a szelvény tetszőleges y koordinátájú pontjában is meg lehet határozni a kovarianciamátrixot, mivel a modellt leíró paraméterek és egy tetszőleges pontban érvényes réteghatárok között lineáris kapcsolat áll fenn, amit most $N=3$ -ra írunk fel:

$$\mathbf{p}^{(1d)} = \mathbf{T}\mathbf{p}^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_1(y) & l_2(y) & l_3(y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_1(y) & l_2(y) & l_3(y) \end{pmatrix} \mathbf{p}^{(s)} \quad (16)$$

ahol $l_1(y), l_2(y), l_3(y)$ a Lagrange-interpolációs polinomok (3). Ekkor viszont a kovarianciamátrixok között is létezik egy lineáris kapcsolat:

$$\text{cov}^{(1d)} = \mathbf{T} \text{cov}^{(s)} \mathbf{T}^T$$

A (16) képletben a rövidség kedvéért csak három Lagrange-polinomot vettünk figyelembe, az inverzió során viszont nyolcat használtunk. Ennek figyelembe vételével tehát a szelvény tetszőleges pontján érvényes réteghatárokra is megkaphatjuk a kovarianciamátrixot, majd ebből a korrelációs mátrixot. A 10 km-nél érvényes paraméterekre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,18 & 0,02 & -0,19 & 0,20 \\ 0,18 & 1 & 0,17 & -0,42 & 0,86 \\ 0,02 & 0,17 & 1 & -0,03 & 0,25 \\ -0,19 & -0,42 & -0,03 & 1 & -0,41 \\ 0,20 & 0,86 & 0,25 & -0,41 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix}$$

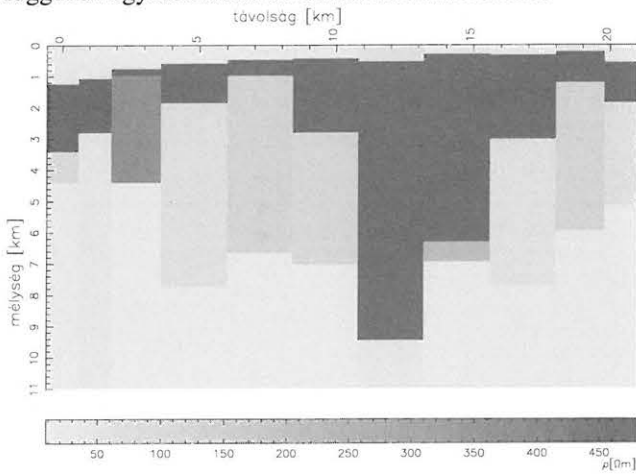
A főátlón kívüli mátrix elemek csökkenése alapján nyilvánvaló, hogy azáltal, hogy a szelvény menti méréseket egyidejűleg invertáltuk, a 10 km-nél érvényes réteghatárok nagyobb biztonsággal határozhatók meg. A korrelációs mátrix és az egységmátrix közötti különbséget egyetlen egy számmal is kifejezhetjük:

$$s = \frac{1}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \text{kor}^2_{j,k}}$$

ahol $\text{corr}_{j,k}$ a korreláció mátrix egy eleme. Az inverzió megbízhatósága eszerint tehát annál jobb, minél kisebb az s értéke. s értéke a 10 km-nél végzett egydimenziós inverzió rétegpáramétereinek korrelációmátrixára 0,5652, a szelvény menti együttes inverzió esetén pedig ugyanezen rétegpáraméterek korrelációmátrixára a lényegesen kisebb 0,3580 értéket kapjuk.

6. Az inverzió terepi adatokkal

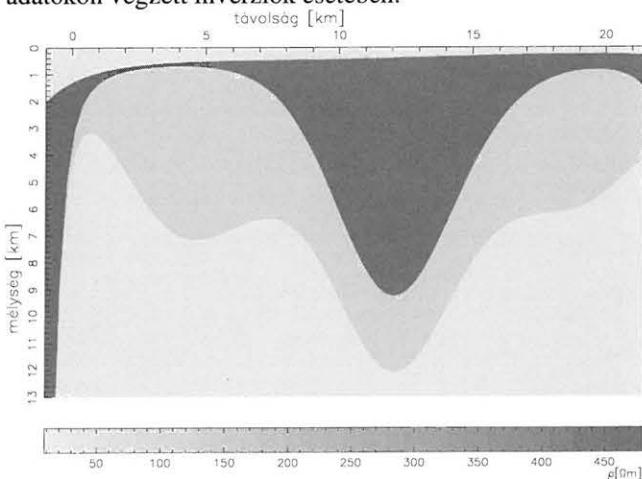
Az inverziót az ELGI által a Dunántúli-középhegység területén mért adatokra is bemutatjuk. Ezen a terepi példán vékony fedő üledékek borított, nagy ellenállású képződmény alatt jól vezető közeg van. A 11. ábrán egy 11 szondázási görbéből álló MT szelvény adataira alkalmazott független egydimenziós inverziók sorozata látható.



11. ábra. Egydimenziós inverziók sorozata terepi adatokon

Fig. 11. Series of one-dimensional inversions on field data

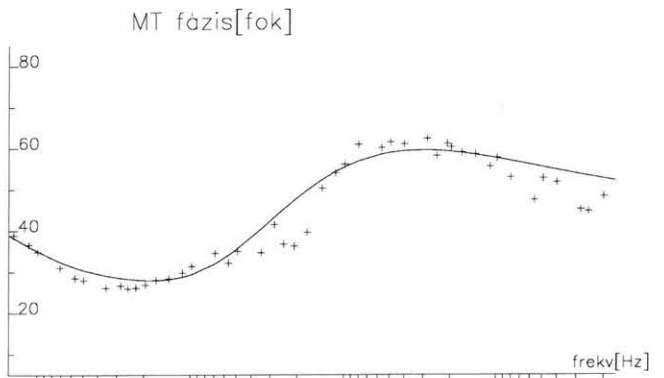
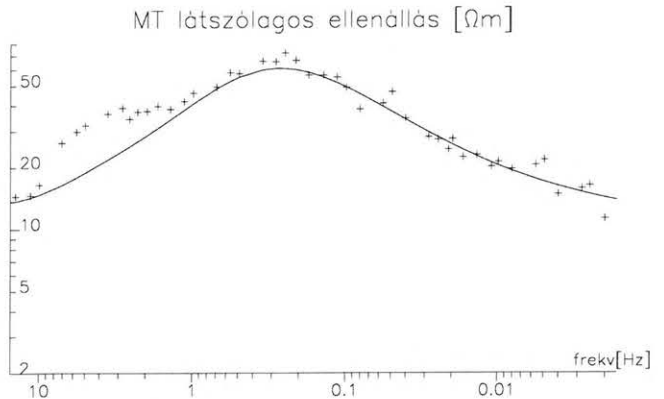
A 12. ábrán az ugyanezen adatok alapján készült Lagrange-interpolációs polinomokon alapuló inverzió eredménye látható. A Lagrange-interpoláció 5 alappontjának koordinátái: 0, 4, 12, 18, 21,6 km, a szondázási görbék koordinátái: 0; 1,2; 2,4; 4,8; 7,2; 9,6; 12; 14,4; 16,8; 19,2; 20,4 km. A szondázási görbék illeszkedésére jellemző szám ($\delta_{\text{adat}}=7,67$) határozottan nagyobb, mint a szintetikus adatokon végzett inverziók esetében.



12. ábra. Terepi adatok inverziója Lagrange-interpolációval

Fig. 12. Inversion of field data using the Lagrange interpolation

Terepi adatokról lévén szó, most egy pontban, amelynek az y koordinátája 4,8 km, a szondázási görbék illeszkedését is megmutatjuk (13. ábra). Itt meg kell még jegyezni, hogy szemben a szintetikus adatokon végzett inverzióval, a terepi adatokon végzett inverzió eredménye erősen függ a kezdeti modelltől. A hiba függvény minimalizálása során (5) ugyanis az inverzió gyakran egy lokális minimumot talál a globális helyett. Ez egyébként általában is az iterációs elven működő linearizált inverziók legnagyobb hiányossága. A nagyszámú lokális minimum egyik oka az lehet, hogy az adathibák miatt a szomszédos szondázási görbék között jelentős az eltérés, azaz lényegesen különböző egydimenziós modellek felelnek meg nekik.



13. ábra. A szondázási görbék illeszkedése 4,8 km-nél

Fig. 13. The fitting of sounding curves at 4.8 km

Összefoglalás

Az ismertetett eljárás — olyan rétegzett modellek esetén, amikor a réteghatárok nem vízszintes síkok, hanem valamilyen, hirtelen változást nem tartalmazó felületek — a szelvény menti mérések kiértékelésének egyik hatékony eszköze lehet. Egyértelműen jobbnak bizonyult (9. ábra), mint az egydimenziós független inverziók sorozata (6. ábra), az általános kétdimenziós inverzióval szemben pedig a gyorsaságát kell kiemelni. Ebben a cikkben a magnetotellurikus mérésekre mutattuk be a módszer alkalmazhatóságát, de tranziens elektromágneses szondázások esetében is működik [PRÁCSER 2000]. A szintetikus adatokon való vizsgálatok egyúttal azt is igazolták, hogy az ilyen típusú modellek esetén a magnetotellurikus effektív látszólagos fajlagos ellenállás, illetve fázis lényegesen jobb inverziós modellt ad, mint a TE, vagy TM módú.

HIVATKOZÁSOK

- CONSTABLE S. C., PARKER R. L., CONSTABLE C. G. 1987: Occam's Inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics* **52**, 289–300
- DOBRÓKA M. 1996: Változó rétegvastagságú inhomogén szeizmikus hullámvezetőben terjedő Love típusú hullámok diszperziós relációja; az abszorpciós-diszperziós relációk inverziója. Akadémiai doktori értekezés. Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszék
- GYULAI Á., ORMOS T. 1997: Újabb eredmények a VESZ adatok 1.5-D inverziós kiértékelésében. *Magyar Geofizika* **38**, 257–264
- GYULAI Á., ORMOS T. 1999: A new procedure for the interpretation of VES data: 1.5-D simultaneous inversion method. *Journal of Applied Geophysics* **41**, 1–17
- JACKSON D. D. 1972: Interpretation of Inaccurate, Insufficient and Inconsistent Data. *Geophys. Journal of the Royal Astronomical Society* **28**, 97–109
- JUPP D. L. B., VOZOFF K. 1974: Stable Iteration Methods for the Inversion of Geophysical Data. *Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society* **42**, 957–976
- JUPP D. L. B., VOZOFF K. 1976: Two-dimensional magnetotelluric inversion. *Geophysics Journal of the Royal Astronomical Society* **50**, 333–352
- PRÁCSEER E. 2000: Zárójelentés a geoelektromos laboratórium 1997–2000. évi feladatairól. Eötvös Loránd Geofizikai Intézet
- UCHIDA T. 1993: Smooth 2D inversion for magnetotelluric data based on statistical criterion ABIC. *J. Geomag. Geoelectr.* **45**, 841–858
- WAIT J. R. 1953: Propagation of radio waves over a stratified ground. *Geophysics* **18**, 416–422