

# Laterálisan gyengén inhomogén közegben terjedő P-SV hullámok diszperziós relációja és elmozdulásfüggvényei<sup>1</sup>

FANCSIK TAMÁS<sup>2</sup>

*A dolgozatban a WKB-módszert felhasználva megadjuk a sokréteges, laterálisan inhomogén közegben terjedő P-SV hullámok diszperziós relációját és elmozdulásfüggvényeit. A diszperziós egyenlet numerikus megoldása alapján elemezzük a csatolás hatását, a fázissebesség—hely függvényt és az inhomogenitás kimutathatóságát.*

**T. FANCSIK: Dispersions and displace functions of P-SV waves propagating in laterally weakly inhomogeneous media**

*Using the WKB-method dispersions and displace functions are given for P-SV waves propagating in a laterally inhomogeneous media. By means of numeric solutions of the derived dispersion equation coupling effect, phase velocity—place function and the detectability of laterally inhomogenities.*

## Bevezetés

Széntelepes összetek hullámvezető tulajdonságát EIVISON [1955] vette észre, a probléma részletes elméleti tárgyalását először KREY [1963] közölte. A szakirodalomban e témát azóta alaposan feldolgozták. Így az SH hullámok abszorpcióját először BUCHANAN [1987] tárgyalta a konstans Q modell segítségével szimmetrikus, háromréteges összetekre, míg háromréteges aszimmetrikus szerkezetre a Poynting-Thomson test alkalmazásával DOBRÓKA és ÖRMOS [1983] vezetett le komplex diszperziós relációt és elmozdulásfüggvényeket. Rayleigh típusú hullámokra DRESEN et al. [1985] publikált diszperziós görbéket.

Sokréteges, rétegenként homogén, izotróp bányabeli szerkezetek diszperziós sajátosságait RÄDER et al. [1985] vizsgálta SH hullámok esetén (fázisrekurziós algoritmus), míg SH és P-SV hullámokra együtt BUCHANAN [1987] tárgyalta e problémát (mátrixrekurziós technika).

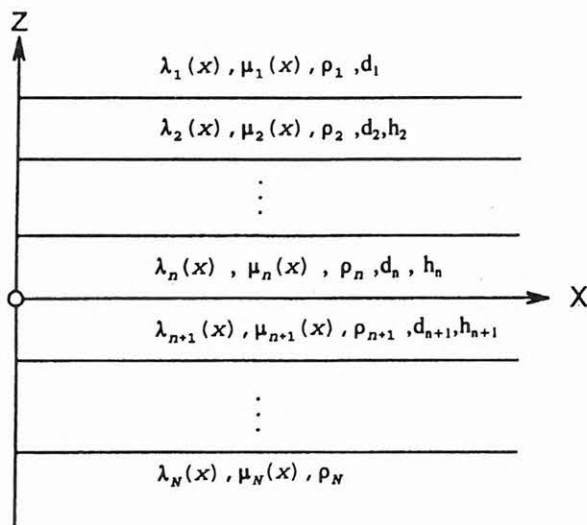
Szerkezeteken belüli inhomogenitásokat, diszkontinuitásokat elsősorban véges-differenciás algoritmusokkal modellezték a szakirodalomban. Analitikusan, a horizontális inhomogenitások hatását SH hullámok diszperziós sajátosságaira DOBRÓKA [1987] írta le a WKBJ módszer alkalmazásával háromréteges, disszipatív összetek alapul véve. Ugyanilyen modellre, de vertikális inhomogenitás esetén DANILOV et al. [1990] végzett vizsgálatokat. Homogén, disszipatív, lassan változó telepvastagságú szerkezetben terjedő Love típusú telephullámokat WKB közelítésben pedig DOBRÓKA [1988] írta le.

Ez utóbbi vizsgálatokhoz kapcsolódva, ebben a dolgozatban a P-SV hullámok diszperziós tulajdonságait elemezzük laterálisan gyengén inhomogén,

sokréteges, veszteségmentes közegben a WKBJ-approximáció felhasználásával.

## Analitikus összefüggések

A problémát az 1. ábrán látható  $N$  réteges szerkezet feltételezésével tárgyaljuk, ahol a közeg rétegenként gyengén inhomogén, azaz a  $\lambda$  és  $\mu$  Lamé-állandók az  $x$  koordináta függvényében lassan változnak.



1. ábra. A rétegsor geometriája  
Fig. 1. Geometry of layers

(A sűrűségeket rétegenként konstansnak vettük, tekintettel a P-SV hullámok nem túl jelentős sűrűségérzékenységre).

$\lambda_n(x), \mu_n(x)$  : Lamé-állandók;

$\rho_n$  : sűrűség;

$d_n$  : az  $(x, y)$  sík és az  $n$ -dik réteg aljának távolsága;

$h_n$  : az  $n$ -dik réteg vastagsága.

<sup>1</sup> Beérkezett: 1995. július 18-án

<sup>2</sup> Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszék, H-3515 Miskolc, Egyetemváros

Inhomogén közegben a hullámterjedést a mozgásegyenlet segítségével írhatjuk le:

$$\rho \frac{\partial u_i^2}{\partial t^2} = \mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{s} + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{s}, \quad (1)$$

ahol  $\vec{s} = (u_x, 0, u_z)$  elmozdulásvektort,  $i, k$  pedig az  $x, z$  indexeket jelenti általában. A feladat laterális inhomogenitás figyelembe vétele mellett is kétdimenziós, tehát a  $\partial/\partial y = 0$  kikötést megtehetjük. A mozgásegyenlet ekkor az SH hullámot és a minket érdeklő P-SV hullámot leíró  $y$ -tól független (1) mozgásegyenletre szeparálódik, vagyis az elmozdulástér egy  $\vec{s}_{SH} = (0, u_y, 0)$  és egy  $\vec{s} = (u_x, 0, u_z)$  egymástól független két elmozdulástérre bontható. A továbbiakban (1) egyenlet vezetett hullám megoldását keressük.

Ismert, hogy az  $\vec{s}$  vektortér egyértelmű felbontásához jutunk, ha egy forrás- és egy örvénymentes vektortér összegeként állítjuk elő. A  $\varphi$  skalár és  $\vec{\psi}$  vektorpotenciál segítségével  $\vec{s}$  legyen:

$$\vec{s} = \nabla \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi}, \quad (2)$$

ahol  $\vec{\psi} = (0, \psi, 0)$ . Az (1) -et  $e^{i\omega t}$  időfüggés feltételezése mellett írjuk vektoros alakban:

$$\mu \Delta \vec{s} + \rho \omega^2 \vec{s} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} + 2(\operatorname{grad} \mu, \operatorname{grad}) \vec{s} + \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \vec{s} + \operatorname{grad} \lambda \operatorname{div} \vec{s} = \vec{0}. \quad (3)$$

Helyettesítsük (2)-t (3)-ba, de a követhetőség kedvéért foglalkozunk először csak a  $\varphi$ -t tartalmazó tagokkal:

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \Delta \varphi + \rho \omega^2 \varphi + 2(\operatorname{grad} \mu, \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \lambda \Delta \varphi + \vec{r}_{\psi} = \vec{0}, \quad (4)$$

ahol  $\vec{r}_{\psi}$  a  $\operatorname{rot} \vec{\psi}$ -ből eredő rész. A (4) egyenlet átalakításához még további összefüggéseket kell felhasználni, nevezetesen

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \Delta \varphi &= \operatorname{grad} [(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi] - \Delta \varphi \operatorname{grad} (\lambda + 2\mu) \\ + 2\mu \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \mu) &= \operatorname{grad} \varphi \Delta \mu - \operatorname{grad} \mu \Delta \varphi + \\ + (\operatorname{grad} \mu, \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \varphi - (\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \mu)). \end{aligned}$$

Ezeket (4)-be írva kapjuk, hogy

$$\operatorname{grad} [(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi + \rho \omega^2 \varphi] + 2 \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \mu) + 2[(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \mu - \operatorname{grad} \Delta \mu] + \vec{r}_{\psi} = \vec{0}. \quad (5)$$

A  $\vec{\psi}$ -t tartalmazó rész átalakításához vissza kell nyúlni az (1) egyenlethez. Mivel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_k} u_k \right) - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_k \partial x_i} u_k = \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

ezért az (1)-ben szereplő  $\partial \mu / \partial x_k$ -val arányos tagok

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= 2 \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_k} u_k \right) - 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \end{aligned}$$

átalakítással (1) egy másik vektoros alakja:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{s} + \rho \omega^2 \vec{s} + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{s} + 2 \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \mu, \vec{s}) - \\ - \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \vec{s} - (\vec{s}, \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \mu + \operatorname{grad} \lambda \operatorname{div} \vec{s} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (6)$$

A  $\operatorname{rot} \vec{\psi}$  (6)-ba történő helyettesítése után a következő összefüggéseket alkalmazzuk:

$$\mu \Delta \operatorname{rot} \vec{\psi} = \operatorname{rot} (\mu \Delta \vec{\psi}) - \operatorname{grad} \mu \times \Delta \vec{\psi},$$

$$\operatorname{grad} \times \operatorname{rot} \vec{\psi} = \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\psi} - \operatorname{grad} \mu \times \Delta \vec{\psi},$$

$$\operatorname{rot} (\mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\psi}) = \operatorname{grad} \mu \times \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\psi}.$$

Ezek alapján (6) új alakja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\mu \Delta \vec{\psi} + \rho \omega^2 \vec{\psi} - \mu \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\psi}) + \\ + 2 \operatorname{grad} (\operatorname{grad} \mu, \operatorname{rot} \vec{\psi}) - \\ - 2(\operatorname{rot} \vec{\psi}, \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \mu + \vec{r}_{\psi} = \vec{0}, \end{aligned} \quad (7)$$

ahol  $\vec{r}_{\psi}$  a  $\varphi$ -t tartalmazó tagokat jelenti. Kombináljuk az (5) és (7) egyenleteket és tegyük meg a következő kikötéseket:

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} \varphi| \gg \left| \frac{2}{\rho \omega^2} [(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \mu - \operatorname{grad} \varphi \Delta \mu] \right|, \\ |\operatorname{rot} \vec{\psi}| \gg \left| \frac{2}{\rho \omega^2} (\operatorname{rot} \vec{\psi}, \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \mu \right|. \end{aligned} \quad (8)$$

Az egyenlőtlenségek teljesülése esetén, tehát amikor az elmozduláshoz képest a Lamé-állandó második deriváltjaival arányos tagokat elhanyagolhatónak tekintjük, a következő örvény- és forrásmentes felbontást kapjuk:

$$\begin{aligned} & \text{grad} [(\lambda+2\mu) \Delta\varphi + \rho\omega^2\varphi + 2(\text{grad } \mu, \text{rot } \vec{\psi})] + \\ & + \text{rot} [\mu\Delta\vec{\psi} - \mu \text{grad div } \vec{\psi} + 2 \text{grad } \mu \times \text{grad } \varphi] = \vec{0}. \end{aligned} \quad (8a)$$

A (8) egyenlőtlenségeket a gyenge inhomogenitás feltételeként írjuk elő. A rot operációval előállítható vektortér változatlan marad, ha az operáció argumentumához egy grad $\theta$  skalárfüggvényt adunk. Esetünkben

$$\theta = \mu \text{div } \vec{\psi} - \int_{P_0}^P \text{grad } \mu \text{div } \vec{\psi} \, ds$$

választással élve a gyengén inhomogén közegben terjedő hullámokat leíró differenciálegyenlet-rendszer a következő:

$$\Delta\varphi + \omega^2 s_\alpha^2 \varphi = -\frac{2}{\lambda+2\mu} (\text{grad } \mu, \text{rot } \vec{\psi}) \quad (9)$$

$$\Delta\vec{\psi} + \omega^2 s_\beta^2 \vec{\psi} = -\frac{2}{\mu} (\text{grad } \mu \times \text{grad } \varphi),$$

ahol  $s_\alpha = 1/\alpha$  longitudinális,  $s_\beta = 1/\beta$  transzverzális lassúság. Vegyük észre, hogy (9) levezetéséhez nem használtuk ki a laterális inhomogenitás egyszerűsítő feltételét, ugyanis (1) alakja formailag nem változik, ha az  $y$  koordinátát és a  $\partial/\partial y \neq 0$ -t is tekintetbe vesszük. Tehát háromdimenziós inhomogenitás esetén a hullámterjedést formailag egy (9) alakú csatolt egyenlet-rendszer írja le. Ebből az következik, hogy már gyenge inhomogenitás fennálltakor sem tekinthetünk el a P és az S hullámok csatolásától, tehát tisztán longitudinális és transzverzális hullámok már első közelítésben sem léteznek.

Laterálisan inhomogén közegben (9) a következőképpen alakul:

$$\Delta\varphi + \omega^2 s_\alpha^2 \varphi = \frac{2}{\lambda+2\mu} \frac{d\mu}{dx} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (10)$$

$$\Delta\psi + \omega^2 s_\beta^2 \psi = \frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dx} \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Ilyen kitevélek mellett — a fenti megfontolások alapján — (10) a P és SV hullámok terjedését írja le (ez ugyanis a  $\partial/\partial y = 0$  kikötés következménye). A (10) egyenletrendszer megoldását WKB-módszer felhasználásával keressük meg. Legyen

$$\begin{aligned} \varphi &= w(z) v(x) \\ \psi &= u(z) r(x) \end{aligned} \quad (10a)$$

szorzatként előállítható, melyet (10)-be írva és rendezve:

$$\frac{1}{w} \left( \frac{d^2 w}{dz^2} + \omega^2 s_\alpha^2 \omega - \frac{2}{\lambda+2\mu} \frac{d\mu}{dx} \frac{du}{dz} \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{v} \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{1}{u} \left( \frac{d^2 u}{dz^2} + \omega^2 s_\beta^2 u - \frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dx} \frac{dw}{dz} \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{d^2 r}{dx^2} = 0$$

A fázist  $\varphi(x)$ -szel jelölve — ugyanarról a hullámról lévén szó — a  $v(x)$  és  $r(x)$  függvényekre

$$\begin{aligned} v &\sim e^{i\varphi(x)} \\ r &\sim e^{i\varphi(x)} \end{aligned} \quad (11a)$$

összefüggések érvényesek, ahonnan nulladik közelítésben

$$\frac{1}{w} \left( \frac{d^2 w}{dz^2} + \omega^2 s_\alpha^2 \omega \right) = \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \omega^2 s^2(x),$$

$$\frac{1}{u} \left( \frac{d^2 u}{dz^2} + \omega^2 s_\beta^2 \omega \right) = \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \omega^2 s^2(x)$$

egyenletek adódnak. Az  $\omega s(x)$  az  $x$ -től gyengén függő szeparációs paraméter. Megoldások ebben az esetben:

$$w = A e^{-pz} + B e^{pz}$$

$$u = C e^{-qz} + D e^{qz}$$

$$\varphi = \omega \int s(\xi) \, d\xi,$$

$$p = \omega \sqrt{s^2 - s_\alpha^2}; \quad q = \omega \sqrt{s^2 - s_\beta^2}.$$

Ezeket a megoldásokat a közelítés következő lépésében felhasználva — ahol az első és második deriváltakat is figyelembe vesszük — kapjuk a

$$v(x) \sim r(x) \sim \frac{1}{\sqrt{s}} e^{i\omega \int s(\xi) \, d\xi} \quad (12)$$

eredményt [BUDDEN 1966, DANILOV, DOBRÓKA, YAMSHIKOV 1990]

$$\left| \frac{1}{\omega^2 s^2} \frac{ds}{dx} \right| \ll 1 \quad (12a)$$

feltétel mellett, valamint a következő egyenletrendszer:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \omega^2 (s^2 - s_\alpha^2) w = \frac{2}{\lambda + 2\mu} \frac{d\mu}{dx} q (C e^{-qz} - D e^{qz}) \quad (13)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \omega^2 (s^2 - s_\beta^2) u = \frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dx} p (A e^{-pz} - B e^{pz}).$$

(13)-at megoldjuk a konstans variáció módszerével, majd felhasználva (10a)-t és (12)-t az elmozduláspotenciálok:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{s}} (A e^{-pz} + B e^{pz}) e^{i\omega \int s(\xi) d\xi} + \frac{2}{\lambda + 2\mu} \frac{d\mu}{dx} \frac{q}{p^2 - q^2} \frac{1}{\sqrt{s}} (C e^{-qz} + D e^{qz}) e^{i\omega \int s(\xi) d\xi},$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{s}} (C e^{-qz} + D e^{qz}) e^{i\omega \int s(\xi) d\xi} + \frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dx} \frac{q}{p^2 - q^2} \frac{1}{\sqrt{s}} (A e^{-pz} + B e^{pz}) e^{i\omega \int s(\xi) d\xi}.$$

Bevezetve a

$$P(x) = \frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dx} \frac{p}{p^2 - q^2},$$

$$Q(x) = \frac{2}{\lambda + 2\mu} \frac{d\mu}{dx} \frac{q}{p^2 - q^2}$$

jelölést az elmozduláskomponensek (2) alapján:

$$u_x = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[ ikA \left( 1 + \frac{pP(x)}{ik} \right) e^{-pz} + qC \left( 1 + \frac{ikQ(x)}{q} \right) e^{-qz} + ikB \left( 1 + \frac{pP(x)}{ik} \right) e^{pz} - qD \left( 1 + \frac{ikQ(x)}{q} \right) e^{qz} \right] e^{i\omega \int s(\xi) d\xi},$$

$$u_z = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[ -pA \left( 1 - \frac{ikP(x)}{p} \right) e^{-pz} + ikC \left( 1 - \frac{qQ(x)}{ik} \right) e^{-qz} + pB \left( 1 - \frac{ikP(x)}{p} \right) e^{pz} + ikD \left( 1 - \frac{qQ(x)}{ik} \right) e^{qz} \right] e^{i\omega \int s(\xi) d\xi}.$$

(14)

Megjegyezzük, hogy a (11) egyenletek — a (11a) összefüggések miatt — csatolt differenciálegyenletrendszerként is megoldhatók, s az így kapott eredmények szintén a (14) által megadott elmozdulásokra vezetnek.

A vezetethullám-megoldáshoz tekintetbe kell venni a határfeltételeket, nevezetesen az  $u_x$  és  $u_z$  elmozdulások,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{zz}$  normálirányú feszültségek folytonosságát a réteghatárokon, valamint  $z \rightarrow \pm \infty$  esetén a reguláris hullámmegoldást. Ekkor egy tetszőleges  $n$ -dik rétegre felírható a következő egyenlet [BUCHANAN 1989]:

$$\Lambda_{n+1} = (d_n) \mathbf{Q}_{n+1} \vec{v}_{n+1} = \Lambda_n (d_n) \mathbf{Q}_n \vec{v}_n, \quad (15)$$

ahol

$$\vec{v}_n^T = [A_n, C_n, B_n, D_n], \quad (16)$$

$$\Lambda_n (d_n) = \text{diag}[e^{-p_n z}, e^{-q_n z}, e^{p_n z}, e^{q_n z}],$$

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} ikR_{1P}^n & q_n R_{1Q}^n & ikR_{1P}^n & -q_n R_{1Q}^n \\ -p_n R_{2P}^n & ikR_{2Q}^n & p_n R_{2P}^n & ikR_{2Q}^n \\ -ikp_n \mu_n (R_{1P}^n + R_{2P}^n) & -\mu_n (k^2 R_{2Q}^n + q_n^2 R_{1Q}^n) & ikp_n \mu_n (R_{1P}^n + R_{2P}^n) & -\mu_n (k^2 R_{2Q}^n + q_n^2 R_{1Q}^n) \\ p_n^2 \xi_n R_{2P}^n - k^2 \lambda_n R_{1P}^n & -ikq_n (\xi_n R_{2Q}^n - \lambda_n R_{1Q}^n) & p_n^2 \xi_n R_{2P}^n - k^2 \lambda_n R_{1P}^n & -ikq_n (\xi_n R_{2Q}^n - \lambda_n R_{1Q}^n) \end{bmatrix}$$

$$\xi_n = \lambda_n + 2\mu_n, R_{1P}^n = 1 + \frac{p_n P_n(x)}{ik}, R_{2P}^n = 1 - \frac{ik P_n(x)}{p_n}, R_{1Q}^n = 1 + \frac{q_n Q_n(x)}{ik} \text{ és } R_{2Q}^n = 1 - \frac{ik Q_n(x)}{q_n}.$$

(15)-ben  $\vec{v}_{n+1}$  a konstansokat tartalmazó vektor  $a\vec{v}_n$ -nel kifejezhető és ezt kiterjeszthetjük az elsőtől az utolsó rétegig. Az eredmény ( a mátrixműveletek végeredményeként kapott  $4 \times 4$ -es mátrixot  $2 \times 2$ -es al-mátrixokkal írva):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ C_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

ahol felhasználtuk a regularitási feltételeket, azaz  $z \rightarrow \infty$  esetben  $B_1 = D_1 = 0$  és  $z \rightarrow -\infty$  esetre  $A_N = C_N = 0$ . A (17) egyenletnek minden frekvenciára és hullám-számra érvényesnek kell lennie, ami akkor lehetséges, ha

$$\det M_{11} = 0 \quad (18)$$

teljesül. A (18) tehát nem más, mint a laterálisan gyengén inhomogén közegben terjedő csatolt P-SV hullámok diszperziós relációja a (12a) és (18) egyenlőtlenségek teljesülése mellett. Nyilvánvaló, hogy  $d\mu/dx = 0$  esetben (14) a homogén közegre levezethető elmozdulásfüggvényeket, (18) pedig az ennek megfelelő diszperziós relációt szolgáltatja.

A következő fejezetben megvizsgáljuk a csatolás hatását és az inhomogenitás okozta hatásokat, valamint konkrét modellpéldán a rétegparaméterek és perturbációjuk kimutathatóságát.

## Numerikus eredmények

A csatolás hatásának érzékeltetésére mutatunk egy jellemző példát az 1. táblázatban szereplő paraméterek meghatározta modellre, mely egy lyukóban-nyai háromréteges széntelep szerkezetnek feleltethető meg. Az inhomogenitást — az egyszerűség kedvéért — mindhárom rétegben ugyanúgy vettük fel.

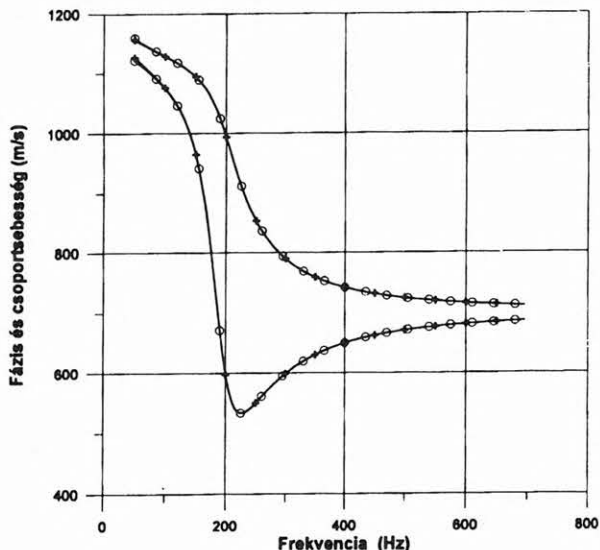
$V_p$ [m/s]	$V_s$ [m/s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$H$ [m]
3000	1200	2100	-
2000	700	1400	3
3000	1200	2100	-

Inhomogenitásfüggvény:  $p(x) = p_0 (1,3 - 0,3e^{-\left(\frac{x}{10H}\right)^2})$

1. táblázat. A háromréteges modell paraméterei és az inhomogenitásfüggvény, ahol  $p_0$  a  $V_p$  longitudinális és  $V_s$  transzverzális testhullámsebességek bármelyike lehet;  $x$  a helykoordináta

Table 1. Parameters of three-layered model and function of inhomogeneity, where  $p_0$  is a  $V_p$  longitudinal and  $V_s$  shear velocity;  $x$  is a place coordinate

A (18) egyenlet alapján az  $x=0$  pontban számított fázis- és csoportsebességeket a 2. ábrán tüntettük fel, valamint az ugyanebben a pontban számolt, de homogénnek tekintett szerkezetben terjedő csatolatlan



2. ábra. Csatolt (0) és lokálisan homogén szerkezet (+) fázis- és csoportsebessége az  $x=0$  pontban

Fig. 2. Phase and group velocity of coupling (0) and locally homogeneous structure (+) at  $x=0$

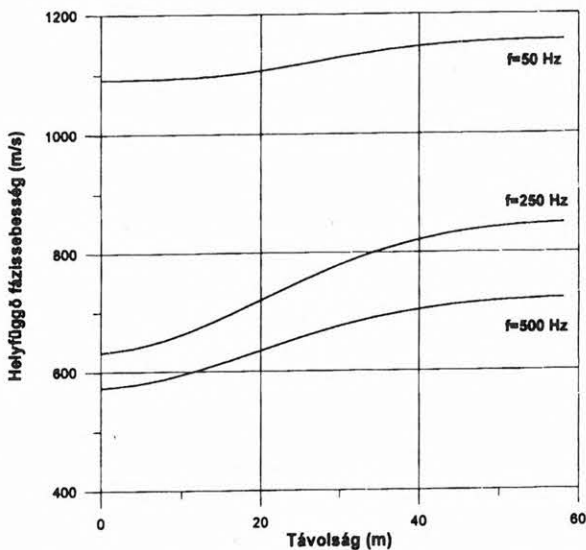
hullám diszperziós görbét is ábrázoltuk. Ez utóbbi az inhomogén szerkezetnek lokálisan homogén szerkezettel történő közelítését jelenti. Az ábra tanúsága szerint a két eset szinte ugyanarra az eredményre vezet, a gyakorlat szempontjából a csatolás tehát gyengén inhomogén közegben elhanyagolható. Tekintettel DOBRÓKA SH hullámokra végzett vizsgálataira, kimondható, hogy laterálisan gyengén inhomogén közegben terjedő P-SV és SH hullámok diszperziós relációja lokálisan homogén szerkezetek diszperziós relációjaként adódik. A továbbiakban ezért a csatolástól eltekintünk és az egyszerűbb, a homogén esetnek megfelelő diszperziós egyenletekkel számolunk adott  $x$  távolság esetén.

Az inhomogenitás fázissebességre gyakorolt hatását az 1. táblázat modelljén tanulmányozzuk, de azal a változtatással, hogy csak a szénrétegbeli  $\mu$  Lamé-állandót tekintjük az ott megadott függvény szerint helyfüggőnek. Azért ezt az esetet vizsgáljuk, mert a fedő és a fekü közetek kompaktabbak, homogénebbek a telephez képest, továbbá a szénbeli perturbációk hatását tudjuk így kimutatni.

A fázissebességnek rögzített frekvenciákon a hely függvényében történő alakulását a 3. ábrán láthatjuk. Szembetűnő, hogy legjelentősebb változást az Airy-frekvencia körüli görbe mutat (250 Hz), kisebb az 500 Hz-en és legkisebb az 50 Hz-en számolt görbe változékonysága. Az effektus magyarázható a diszperzió sajátja alapján, de a jelenség jobb megértését és további következtetések levonását teszi lehetővé az ún. érzékenységi paraméter alkalmazása.

Definiáljuk tehát a hullámterjedés valamely jellemzőjének, például a  $c$  fázissebességnek a  $\varphi_c$  érzékenységet egy  $p$  rétegparaméterre vonatkozóan a következő összefüggéssel:

$$\varphi_c = \lim \frac{[c(p+\Delta p) - c(p)]/c(p)}{\Delta p/p} = \frac{d \ln c(p)}{d \ln p}$$

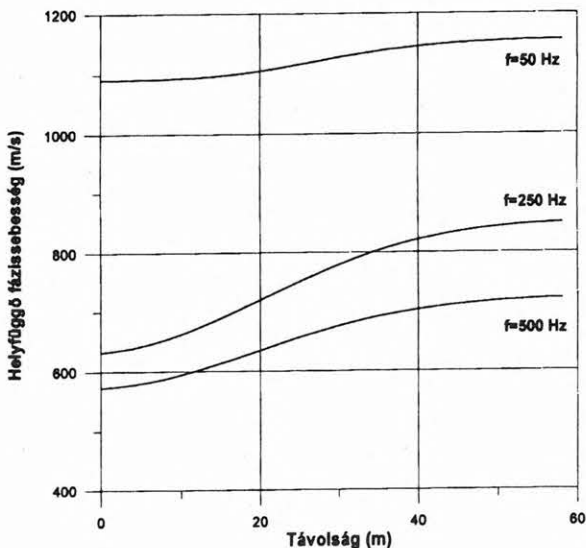


3. ábra. A fázissebesség hely függvényében történő alakulása rögzített frekvenciák esetén

Fig. 3. Formation of phase velocity in  $x$  coordinate at the given frequencies

Ha  $\varphi_c$ -t a frekvencia függvényében ábrázoljuk, akkor ún. érzékenységgörbéket kapunk. Az érzékenység dimenziótlan és a benne szereplő mennyiségek nagyságrendjétől független mennyiség, mely megmutatja, hogy  $p$  1%-os megváltozása a fázissebességben hány százalékos változást jelent.

A fázissebességnek transzverzális és longitudinális testhullámsebesség érzékenységét a 4. ábrán láthatjuk. Megfigyelhető, hogy a transzverzális hullámsebesség-érzékenység görbe alacsony frekvencián nullától indul, ugyanis — a nagy hullámhossz miatt — a hullámterjedést a félterek paraméterei befolyá-



4. ábra. Fázissebesség érzékenység a telep transzverzális ( $\varphi_c^t$ ) és longitudinális ( $\varphi_c^l$ ) hullámsebességeire

Fig. 4. Parameter sensitivity in the case of sheat ( $\varphi_c^t$ ) and longitudinal ( $\varphi_c^l$ ) velocity

solják. Az Airy-fázis közelében — ahol a hullámhossz összemérhető a telepvastagsággal — az érzékenység egyes feletti maximuma azt jelenti, hogy a szénbéli transzverzális hullámsebesség változásánál a fázissebesség változás mértéke jelentősebb (közel 1,4-szerese). Nagyfrekvenciák tartományában, vagyis kicsi hullámhosszknál — amikor is a hullám a telepben egyre inkább testhullámként terjed — 1-hez közeli érzékenységet kapunk, ami tehát csökkenő diszperziót és a réteg majdnem kizárólagos hatását jelenti. Ezek az eredmények összhangban vannak a 3. ábra görbéinek viselkedésével, ami azt a következtetést vonja maga után, hogy a telepbeli inhomogenitások kutatására az Airy-frekvencia és az attól nagyobb frekvenciák alkalmasak. Tekintetbe kell venni azonban, hogy az Airy-fázis körüli frekvenciasáv alapján a perturbáció jelentősebb hatással jelentkezik a valóságosnál, tényleges mértékéről nagyfrekvenciákon kaphatunk információt.

A 4. ábra másik görbéje a longitudinális testhullámsebesség érzékenység közel egy nagyságrenddel kisebb a transzverzális sebesség érzékenységhez viszonyítva. A P-SV hullámok által detektálható szénbéli inhomogenitások ezek szerint szinte csak a transzverzális testhullámsebesség perturbációjából eredeztethetők. A terepi mérések hibáit és bizonytalanságait figyelembe véve az a következtetés vonható le, hogy P-SV hullámmal a longitudinális sebesség gyakorlatilag nem vizsgálható.

## Összefoglalás

Ebben a dolgozatban laterálisan gyengén inhomogén közegben terjedő P-SV hullámok diszperziós relációját és elmozdulásfüggvényeit adtuk meg a WKB-approximáció segítségével, kijelölve a csekélyt érvényességi tartományát is. A mozgásegyenlet megoldása során kiderült, hogy ilyen körülmények között — még a peremfeltételek figyelembevétele előtt — a longitudinális és transzverzális komponens csatolódik. Modellszámítások alapján azonban kimondható — melyek közül egy jellemző példát be is mutattunk —, hogy elegendően gyenge inhomogenitás esetén gyakorlatilag a csatolástól eltekinthetünk, s a diszperziós reláció lokálisan homogén szerkezetekre érvényes diszperziós egyenletként adható meg.

A gyakorlat, tehát a méréstervezés és értelmezés szempontjait figyelembe véve egy háromréteges szerkezetre alkalmaztuk eredményeinket. Megmutattuk, hogy széntelepbeli inhomogenitások elsősorban a telep transzverzális testhullámsebességének perturbálódásához köthetők, melyek az Airy- és attól magasabb frekvenciákon jelentkeznek. Megállapítottuk továbbá, hogy a telep longitudinális sebességéről — a csekély érzékenység miatt — telephullámokkal gyakorlatilag nem juthatunk információhoz.

## HIVATKOZÁSOK

BUCHANAN D. J. 1978: The propagation of attenuated SH channel waves. *Geophysical Prospecting* 26, 26-28

- BUCHANAN D. J. 1987: Dispersion calculation for SH and P-SV waves in multilayered coal seams. *Geophysical Prospecting* **35**, 62-70
- BUDDEN K. G. 1966: Radio waves in the ionosphere. Cambridge Univ. Press, 130-136
- DANILOV V. N., DOBRÓKA M., YAMSHIKOV V. S. 1990: The propagation of channel waves in a coal seam with horizontal and vertical inhomogeneities. *Geophysical Transactions* **35**, 199-208
- DOBRÓKA M., ORMOS T. 1983: Absorption-dispersion relation for Love channel waves. *Geophysical Transactions* **29**, 2, 117-128
- DOBRÓKA M. 1987: Love seam waves in a horizontally inhomogeneous three-layered medium. *Geophysical Prospecting* **35**, 502-516
- DOBRÓKA M. 1988: On the absorption-dispersion characteristics of channel waves propagating in coal seams of varying thickness. *Geophysical Prospecting* **36**, 318-331
- DRESEN L., KERNER C., KÜHBACH B. 1985: The influence of an asymmetry in the sequence 'rock-coal-rock' on the propagation of Rayleigh seam-wave. *Geophysical Prospecting* **33**, 519-539
- EVISON F. F. 1955: A coal seam as a guide for seismic energy. *Nature* **176** (4495), 1224-1225
- KREY Th. 1963: Channel waves as a tool of applied geophysics in coal mining. *Geophysics* **28**, 701-704
- RÄDER R., SCHOTT W., DRESEN L., RÜTHER H. 1985: Calculation of dispersion curves and amplitude-depth distribution of Love channel waves in horizontally layered media. *Geophysical Prospecting* **33**, 800-816