

A tomográfiai rekonstrukció zajérzékenységének csökkentése¹

DOBRÓKA MIHÁLY²

A konjugált gradiens, a SIRT és a Simulated Annealing módszerek súlyozott változatait mutatjuk be és azok tomográfiai alkalmazására teszünk javaslatot. Az MFV súlyokkal bevezetett súlyozott tomográfiai algoritmusokat (M-CGRAD, M-SIRT és M-SA) szintetikus Gauss-eloszlású zajjal terhelt, majd kiugró adatokat is tartalmazó adatrendszeren teszteljük. Igazoljuk, hogy a továbbfejlesztett tomográfiai módszerek kiugró adatokkal szemben mutatott rezisztenciája jelentősen megnövekedett. Javaslatot teszünk különbségi adatok tomográfiai rekonstrukciójára szolgáló rekonstrukciós eljárások súlyozására is.

M. DOBRÓKA: On the decrease of the noise-sensitivity of tomographic reconstructions

The weighted versions of three tomography algorithms (Conjugated Gradients, SIRT and Simulated Annealing) is presented. Synthetic travelttime data are applied to test the reconstruction methods using MFV weights. It is proved that the sensitivity for outlier data is sufficiently reduced in the case of the weighted (M-CGRAD, M-SIRT and M-SA) reconstruction methods. The weighted versions of three double-trace tomography algorithms are also presented.

Bevezetés

A szeizmikus tomográfia módszereivel leggyakrabban a rugalmas hullámok futási idő adatai alapján a helyfüggő fázissebességet határozzuk meg, de lehetőség van a hullám amplitúdó adatai alapján az abszorpciós tényező helyfüggésének meghatározására is. A szeizmikus futási idő adatok tomográfiai inverziójára szolgáló eljárások jól ismertek, közülük a leginkább elterjedtek az ART (Algebraic Reconstruction Technique) és a SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique), ill. ezek különféle variánsai. Közös jellemzőjük ezeknek, hogy az inverziót iteratív úton, egy lépésben csak az adatok (ill. az ezekhez tartozó egyenletek) egy részén (vagy csupán egyetlen adaton) végzett műveleteken keresztül valósítják meg. Ez adja e két módszernek a mérési adatok által hordozott zajjal szembeni viszonylag jó toleranciáját.

Tomográfiai feladatok megoldására a geofizikai inverzióban használt általános módszereket (az adatok és az ismeretlenek nagy száma, a szükséges számítógépi kapacitásigény, leginkább azonban a megoldandó egyenletrendszer kedvezőtlen numerikus tulajdonságai miatt) rendszerint nem alkalmazhatjuk. Viszonylag „kisméretű” tomográfia problémák megoldására a szükséges stabilitás mellett alkalmazható a szinguláris érték szerinti felbontás módszere [LINES, TREITEL 1984; NOLET 1985]. SCALES [1987] bizonyította be, hogy konjugált gradiens módszerrel nagy tomográfiai egyenletrendszerek is stabilan oldhatók meg.

A szeizmikus futási idők tomográfiai inverziója számos mérési elrendezés vonatkozásában sikeres alkalmazást nyert. Fúrólukak, ill. fúróluk—felszín közötti szeizmikus átvilágítás adatainak tomográfiai feldolgozásáról számolt be BOIS et al. [1972], LYTTLE, DINES [1980], PETERSON et al. [1985] és IVANSON [1985]. Reflexiós időadatok feldolgozására szolgáló tomográfiai eljárást közölt BISHOP et al. [1985] és STARK, CLAYTON [1986], míg 2-D szerkezetek fölött mért refrakciós időadatok tomográfiai inverziójáról WHITE [1989] számolt be. A szeizmikus tomográfiai módszer bányabeli alkalmazásának néhány eredményét MASON [1981], KÖRMENDI et al. [1986] és GUSTAVSSON et al. [1986] mutatta be.

A szeizmikus abszorpciós tényező tomográfiai meghatározása a sebességtomográfiahoz képest számos új problémát is felvet (polarizáció, diffrakció, multipath stb.). WONG et al. [1983] fúrólukak közötti átvilágítás amplitúdó adatainak tomográfiai feldolgozásáról számolt be. Méréseikben piezoelektromos rezgéskeltést alkalmaztak. BREGMAN [1986] ugyanezen adatrendszert feldolgozva megállapította, hogy a piezoelektromos rezgéskeltő, valamint az érzékelők csatolása a fúróluk falához 50% hibát is okozhat az amplitúdók meghatározásában. Az ilyen jellegű problémák kiküszöbölésére DOBRÓKA [1985] normált amplitúdók tomográfiai feldolgozására alkalmas eljárást javasolt, amelynek továbbfejlesztett változatát DOBRÓKA et al. [1992] és DOBRÓKA [1993] közölte. A normálás eredményeként az adataink mindegyikéhez két (az aktuális és a normáló) sugárút rendelhető, ami a standard tomográfiai eljárások módosítását követeli meg (kétsugárutas tomográfiai algoritmusok).

Mind a sebesség- mind az abszorpciós tomográfiaiban a használatos rekonstrukciós eljárásnak fontos jellemzője a bemenő adatok által hordozott zajra vonatkozó érzékenység. Különösen nagy torzítókat okozhatnak a ritkán előforduló nagy hibák (kiug-

¹ Beérkezett: 1995. április 26-án

² Miskolci Egyetem Geofizikai Tanszék, H-3515 Miskolc, Egyetemváros

ró adatok vagy outlierek). A következőkben három tomográfiai eljárás továbbfejlesztett változatait mutatjuk be, amelyekkel a kiugró adatokat is tartalmazó adatrendszer tomográfiai inverziója a hagyományos eljárásokat messze felülmúló pontossággal valósítható meg.

1. A szeizmikus tomográfiai probléma

A geofizikai tomográfiában a szeizmikus futási idők tomográfiai inverziója az egyszerűbb feladat. Mint ismeretes, a hullám futási ideje a meghatározandó $n(x,y,z) = c/v(x,y,z)$ törésmutató eloszlással

$$t = \frac{1}{c} \int_{\Gamma} n \, dl$$

kapcsolatban van, ahol c sebesség dimenziójú konstans, $v(x,y,z)$ a lokális terjedési sebesség, Γ a sugárút, amely maga is függ (a kezdő és végpontokon kívül) a törésmutató eloszlástól. Az összefüggés tehát nemlineáris kapcsolatot ad a futási idő és a törésmutató között, ennek megfelelően a futási idő adatok tomográfiai inverziója egyben nemlineáris inverziós eljárás. A feladat megoldására a leggyakrabban alkalmazott módszer a probléma linearizálása valamely referencia törésmutató eloszlás körül:

$$\delta t = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_0} \delta n \, dl \quad (1)$$

ahol δt a mért és a (referencia eloszláson) számított futási idők különbsége, δn a valódi és a referencia törésmutató különbsége, Γ_0 a referencia eloszláson számított sugárút. Az (1) egyenlet diszkrétizálására a szeizmikus tomográfiában igen gyakran az ún. cellánként konstans függvények szerinti sorfejtést alkalmaznak, amely vektori alakban

$$\delta \vec{t} = \mathbf{D} \delta \vec{s} \quad (2)$$

egyenletre vezet, ahol $\delta \vec{t}$ az N dimenziós adattérben $\delta \vec{t}$ az M dimenziós paraméterterében definiált vektorok, \mathbf{D} az úgynevezett távolságmátrix. Részletezve: δt_k az (1) szerinti k -ik adatot, δs_j a j -ik cellában a valódi és referencia lassúságok ($s = n/c$) eltérését, D_{kj} a k -ik adathoz tartozó — referencia eloszláson számított — sugár által a j -ik cellában megtett út hosszát adja meg. (A \mathbf{D} mátrix ún. ritka mátrix, azaz elemeinek nagy része zérus.)

A linearizált tomográfiai eljárás során a (2)-ben meghatározott lineáris feladat inverzét oldjuk meg, azaz megkeressük azt a $\delta \vec{s}$ vektort, amely az

$$\vec{r} = \delta \vec{t} - \mathbf{D} \delta \vec{s} \quad (3)$$

vektor valamilyen normáját minimalizálja. Az $\|\vec{r}\|^2$ Euklideszi norma (L_2) minimalizálásával a

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} \delta \vec{s} = \mathbf{D}^T \delta \vec{t} \quad (4)$$

jól ismert normálegyenletre jutunk. Gyakran előfordul, hogy adataink nem egyforma megbízhatóságúak vagy egyéb okunk van arról gondoskodni, hogy egyes adataink különböző mértékben járuljanak hozzá az inverz feladat megoldásához. Ezt legkönnyebben adattérben definiált \mathbf{W} súlymátrix segítségével érhetjük el úgy, hogy $\|\vec{r}\|^2$ helyett $\langle \vec{r}, \mathbf{W} \vec{r} \rangle$ skalárt minimalizáljuk. Ekkor a súlyozott legkisebb négyzetek elvének megfelelő

$$\mathbf{D}^T \mathbf{W} \mathbf{D} \delta \vec{s} = \mathbf{D}^T \mathbf{W} \delta \vec{t} \quad (5)$$

normálegyenletet kapjuk [MENKE 1984].

Ismeretes, hogy az egyszerű legkisebb négyzetek elvének megfelelő (4) normálegyenlet optimális eredményt akkor ad, ha az adatrendszert terhelő zaj Gauss-eloszlást követ. A geofizikai inverzió gyakorlata azt mutatja, hogy ritkán előforduló nagy hibák (kiugró adatok) esetén az L_2 norma minimalizálása esetenként elfogadhatatlan eredményre vezet. Az ilyen adatrendszer inverziója számos más módszerrel eredményesebben végezhető el, például az L_1 norma minimalizálását, a Cauchy- vagy a leggyakoribb érték módszer szerinti kritérium alkalmazását említhetjük.

SCALES et al. [1988] bebizonyította, hogy az $\vec{r} = \delta \vec{t} - \mathbf{D} \delta \vec{s}$ vektor L_1 normájának minimalizálására olyan iteratív, minden lépésében a súlyozott legkisebb négyzetek módszerének megfelelő eljárást is alkalmazhatunk, amelyben a k -ik adathoz rendelt súlyt az iteráció j -ik lépésében a

$$W_k^{(j-1)} = \left| \delta t_k^{(j-1)} - \sum_{i=1}^M D_{ki} \delta s_i^{(j-1)} \right|^{-1} \quad (6)$$

formula szerint (azaz a $(j-1)$ -ik iterációban kapott eltéréstől) számítjuk ki. Az így definiált IRLS (Iteratively Reweighted Least Squares) eljárás normálegyenlete a j -ik iterációban az (5)-nek megfelelő

$$\mathbf{D}^T \mathbf{W}^{(j-1)} \mathbf{D} \delta \vec{s} = \mathbf{D}^T \mathbf{W}^{(j-1)} \delta \vec{t} \quad (7)$$

Az eljárást SCALES et al. [1988] sikerrel alkalmazta kiugró hibákkal terhelt szeizmikus időadatok tomográfiai inverziójára és HERING et al. [1995] egyenáramú geoelektromos adatok, valamint felületi hullám diszperziós adatok együttes inverziójára.

Kiugró hibákkal terhelt adatrendszer inverziójának egy másik útja a k -ik adathoz

$$W_k = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + r_k^2} \quad (8)$$

szerint Cauchy-súlyokkal definiált $(\vec{r}, W\vec{r})$ skalár minimalizálása (σ^2 a skálaparaméter). Mivel ez a mennyiség a W súlyokban is tartalmazza az ismeretleneket, a normálegyenlet ez esetben az (5) egyenlettől eltérő alakú lesz. Definiálhatunk azonban az IRLS módszerhez hasonlóan olyan iteratív eljárást, amelyben a j -ik iterációban a (8) szerinti súlyokat az előző iterációbeli $r_k(j-1)$ reziduálisokból számítjuk:

$$W_k^{(j-1)} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + (r_k^{(j-1)})^2} \quad (9)$$

Ennek a tartalmilag szintén iterációnként újrásúlyozott, legkisebb négyzetek elve szerinti eljárásnak minden lépésében a (7) lineáris normál-egyenletrendszert oldjuk meg. Cauchy-inverziónál esetén a σ skálaparaméter meghatározására AMUNDSEN [1991] közölt meglehetősen számításgényes módszert. Numerikusan egyszerűbb és gyakoribb alkalmazásokra inkább ajánlható a leggyakoribb érték módszer [STEINER 1988] szerinti súlyok használata, mivel ekkor a skálaparaméter iteratív úton magából az adatrendszerből állítható elő.

1.1. A konjugált gradiens módszer

A konjugált gradiens módszer lineáris egyenletrendszerek megoldására kidolgozott iteratív eljárás, amely a Gauss-Seidel módszer javított változatának tekinthető. Az iteráció során a paraméterterben a korrekcióvektor iránya és nagysága úgy van meghatározva, hogy a konvergencia a lehető leggyorsabb legyen. SCALES [1987] a konjugált gradiens módszert tomográfiai feladatok megoldására alkalmazva annak olyan változatát adta meg, amely a D távolságmátrix ritka mátrix voltát kihasználja. Ennek az algoritmusnak előnye, hogy a (4) normálegyenlet megoldása során nem kell képezni a $D^T D$ mátrixot, amely „sűrű” annak ellenére, hogy D ritka mátrix. A SCALES [1987] által javasolt algoritmus az $\vec{x} = \delta \vec{s}$, $\vec{b} = \delta \vec{r}$ helyettesítéssel a következőképpen adható meg:

legyen \vec{x}_0 a kezdeti becslés és ezzel számítsuk ki az

$$\vec{s}_0 = \vec{b} - D\vec{x}_0, \quad \vec{r}_0 = \vec{p}_0 = D^T(\vec{b} - D\vec{x}_0), \quad \vec{q}_0 = D\vec{p}_0$$

kezdeti vektorokat, majd ezekkel kezdjük iteratív eljárást az

$$\alpha_{k+1} = \frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{(\vec{q}_k, \vec{q}_k)}$$

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_{k+1} \vec{p}_k$$

$$\vec{s}_{k+1} = \vec{s}_k - \alpha_{k+1} \vec{q}_k$$

$$\vec{r}_{k+1} = D^T \vec{s}_{k+1} \quad (10)$$

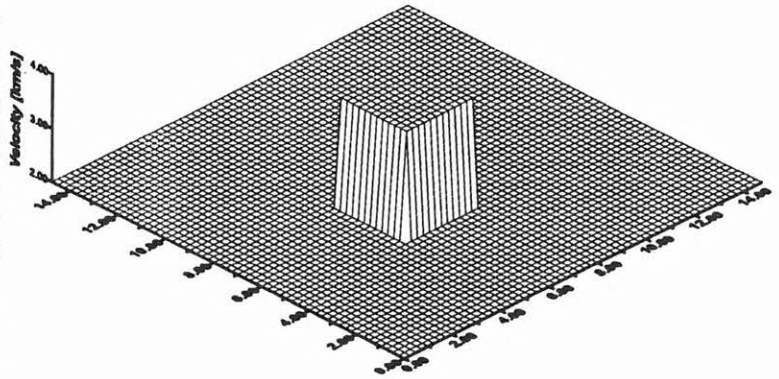
$$\beta_{k+1} = \frac{(\vec{r}_{k+1}, \vec{r}_{k+1})}{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}$$

$$\vec{p}_{k+1} = \vec{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \vec{p}_k$$

$$\vec{q}_{k+1} = D \vec{p}_{k+1}$$

egyenleteknek megfelelően, ahol $k=0,1,2,\dots$ az iteráció sorszám.

A konjugált gradiens (CGRAD) módszer zajérzékenységének szemléltetésére végezzünk vizsgálatot az 1. ábra szerint felvett modellen, ill. mérési elrendezésben számított szintetikus adatrendszer segítségével.

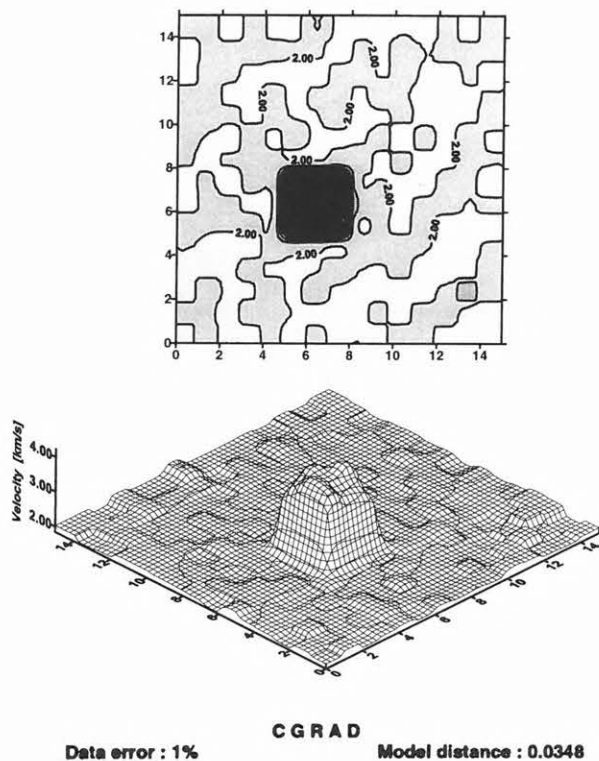


1. ábra. A tomográfiai vizsgálatok céljából felvett modell
Fig. 1. The model used in tomographic investigations

gével. A mérési területet 15×15 egység méretűnek vesszük fel, a diszkrétizáláshoz használt hálót négyzetesnek és 1×1 egység méretű cellákból felépítettnek tekintjük. A vizsgálati területen a szeizmikus hullám terjedési sebességét 2000 m/s-ban adjuk meg, kivéve a kissé aszimmetrikusan mindkét síkbeli irányban a 6-7-8 cellákban felvett (3×3 egység méretű) anomáliát, amelyben a sebesség 4000 m/s. A mérési terület határain (a cella-perem közepén) forrás- és érzékelő pontokat helyezünk el úgy, hogy a lehető legteljesebb tomográfiai lefedettség valósulhasson meg. Az így definiált 1125 átvilágítási sugáron számítottuk a futási időket, majd ezeket a valós adatok szimulációja érdekében hibával tehettük. (Itt és a későbbi rekonstrukciós vizsgálatokban a számítási idő redukálása végett modellhibát követünk el, amikor is a hullámutakat egyenesnek tételezzük fel. Mivel mind a szintetikus adatok számításában, mind

a tomográfiai inverzió során ugyanezen közelítéssel élünk, a vizsgált tomográfiai algoritmusok zajérzékenységevel kapcsolatos következtetéseinket — legalábbis az egyenes sugárút közelítést megengedően kicsiny sebességkontrasztal definiált modellek vonatkozásában — nem érinti. Ebben a dolgozatban kitűzött célunk — a kiugró hibákkal terhelt adatrendszeren is kielégítő eredményt nyújtó tomográfiai algoritmus bemutatása — egyenes sugárút közelítésben is teljesíthető, ugyanakkor vizsgálataink kézenfekvően kiterjeszthetők görbe sugárútas előremodellezés esetére is.)

A 2. ábrán a hibamentes adatokhoz 1% Gauss-eloszlású zajt keverve előállított szintetikus adatrendszeren (nevezük a továbbiakban I. adatrendszernek)



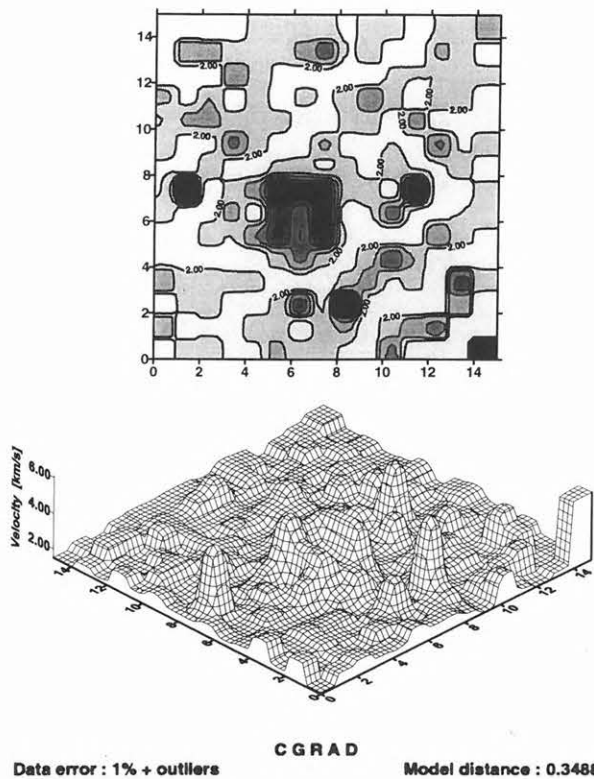
2. ábra. Gauss-eloszlású zajjal terhelt adatrendszer CGRAD tomográfiai inverziójának eredménye
Fig. 2. The tomographic CGRAD inversion of the data contaminated by Gaussian noise

a CGRAD eljárással végrehajtott tomográfiai inverzió eredményét mutatjuk be. Az eredmény minőségére (mivel szintetikus vizsgálatainkban ismert a rekonstruálandó modell) a

$$D = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\frac{v_j(r) - v_j^{(0)}}{v_j^{(0)}} \right)^2}$$

formula szerint a paraméterterben számított relatív modelltvávolságot ($v_j(r)$ a j -ik cellában rekonstruált,

$v_j^{(0)}$ a felvett sebességet jelöli, M a cellák száma) vezetjük be. Hogy érzékeltecsük, milyen érzékenyen reagál a rekonstruált eloszlás az adatrendszer által hordozott zaj nem-Gauss eloszlására, generáltunk egy adatrendszert úgy, hogy az előző (1% Gauss-zajt hordozó) adatrendszer véletlenszerűen kiválasztott 20%-ához további 20% véletlen zajt kevertünk (nevezük a továbbiakban II. adatrendszernek). Így tehát az adatok 1/5-e (igen erősen) kiugró értéket képvisel. (A gyakorlati sebesség tomográfiai problémákban ettől rendszerint jobb adatrendszerrel van dolgunk.) A 3. ábrán a CGRAD rekonstrukció eredményét mutatjuk be. Amint várható volt, a ható alig felismerhető. Az előző numerikus példával való összehasonlítás azt mutatja, hogy a relatív modelltvávolság mintegy tízszeresére növekedett. Az eredmény igazolja azt a várakozásunkat, hogy nem-Gauss eloszlású zajt hordozó adatrendszert a legkisebb négyzetek elve alapján invertálva nem kaphatunk az optimálisához közel eső rekonstrukciót.



3. ábra. Kiugró hibákkal terhelt adatrendszer CGRAD tomográfiai inverziójának eredménye
Fig. 3. The tomographic CGRAD inversion of the data set containing Gaussian noise and outliers

Könnyen adódhat a gondolat, hogy geofizikai inverzióban használt robusztus inverziós eljárások valamelyikét alkalmazzuk az iménti (II.) adatrendszer tomográfiai inverziójára. Vizsgálatainkban a leggyakoribb érték módszer (MFV) szerint számított súlyokkal felépített IRLS eljárást választottuk, amelynek normálegyenlet rendszere (7)-nek megfelelő.

Mivel az egyenletrendszer a súlymátrix megjelenése miatt formailag eltér a (4) egyenlettől, a SCALES [1987] által felállított (10) egyenletek szerinti CGRAD algoritmust módosítanunk kell. Nyilvánvaló, hogy a módosítás csupán annyi, hogy a (10)-ben szereplő D^T mátrix helyére (a j -ik IRLS iterációban) $D^T W^{(j-1)}$ kerül. Így az MFV súlyok szerint súlyozott, legkisebb négyzetek elve szerint felépített konjugált gradiens algoritmus (rövidítsük M-CGRAD-ként) a következőképpen adható meg (ismét alkalmazva az $\vec{x} = \delta \vec{s}$, és $\vec{b} = \delta \vec{r}$ helyettesítést):

legyen \vec{x}_0 a kezdeti becslés és ezzel számítsuk ki az

$$\vec{s}_0 = \vec{b} - D\vec{x}_0, \quad \vec{r}_0 = \vec{p}_0 = D^T W^{(j-1)} (\vec{b} - D\vec{x}_0),$$

$$\vec{q}_0 = D\vec{p}_0$$

kezdeti vektorokat, majd az iteráció k -ik lépésében járjunk el az

$$\alpha_{k+1} = \frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{(\vec{q}_k, \vec{q}_k)}$$

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_{k+1} \vec{p}_k$$

$$\vec{s}_{k+1} = \vec{s}_k - \alpha_{k+1} \vec{q}_k$$

$$\vec{r}_{k+1} = D^T W^{(j-1)} \vec{s}_{k+1} \quad (11)$$

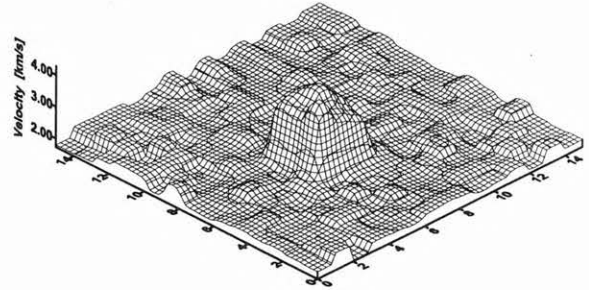
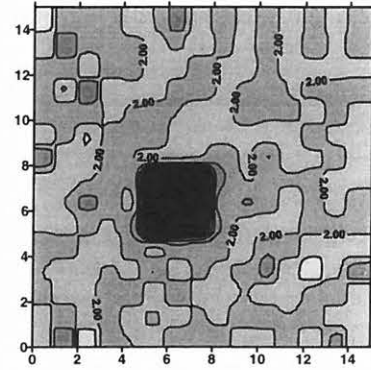
$$\beta_{k+1} = \frac{(\vec{r}_{k+1}, \vec{r}_{k+1})}{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}$$

$$\vec{p}_{k+1} = \vec{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \vec{p}_k$$

$$\vec{q}_{k+1} = D \vec{p}_{k+1}$$

egyenleteknek megfelelően, ahol $k=0,1,2,\dots$ az iteráció sorszáma. (Megjegyzendő, hogy minden iterációs lépésben az IRLS algoritmusból adódóan egy belső $j=1, 2, \dots, J$ -re futó iteráció is végbemeget. Tapasztalataink szerint ezt elegendő $J=10$ -ig futtatni.) Ismeretes, hogy a leggyakoribb érték módszer kiugró adatokhoz relatíve kis súlyokat rendel így várhatjuk, hogy ezek hozzájárulása a tomográfiai inverzió eredményéhez csökken.

Végezzük el ezek után a II. adatrendszer MFV súlyokkal definiált M-CGRAD inverzióját! Az eredményt a 4. ábra mutatja. Amint látható, a ható ismét jól felismerhető, a rekonstruált modell relatív távolsága a felvett modelltől 0,0636, ami alig kétszerese a Gauss-hibákkal terhelt I. adatrendszeren a legkisebb négyzetek elve szerint CGRAD módszerrel végzett inverzió esetében kapott értéknek. A 4. ábrát az ugyanezen (II.) adatrendszer súlyozatlan (CGRAD) inverziójának eredményét bemutató 3. ábrával összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy az MFV súlyokkal definiált M-CGRAD algoritmus igen eredményesen redukálja a kiugró hibákkal ter-



M - C G R A D
Data error : 1% + outliers Model distance : 0.0636

4. ábra. Kiugró hibákkal terhelt adatrendszer súlyozott konjugált gradiens (M-CGRAD) inverziójának eredménye
Fig. 4. The tomographic M-CGRAD inversion of the data set containing Gaussian noise and outliers

helt adatok hozzájárulását az inverzió végeredményéhez. Másként kifejezve az M-CGRAD algoritmus a kiugró adatokra nézve meglehetősen rezisztensnek mondható.

1.2. A SIRT módszer

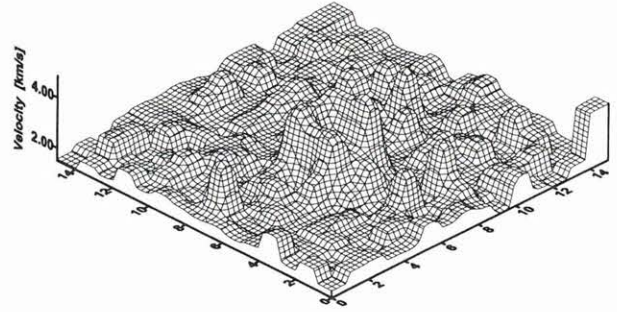
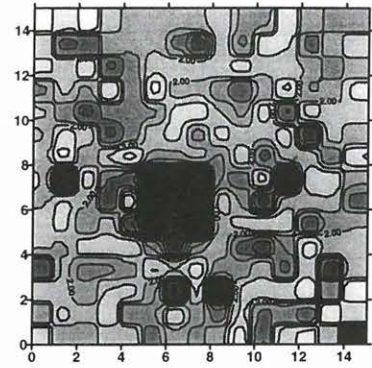
A SIRT módszer mint az ART javított változata az egyik leggyakrabban használt tomográfiai eljárás. Mint ismeretes, a geofizikai tomográfiában az adataink száma rendszerint messze meghaladja az ismeretlenek számát, ezért indokolt lenne a probléma megoldását a túlhatározott vagy kevert határozottságú inverz feladatokra kidolgozott eljárások között keresni. Ezzel szemben az ART módszer esetében szélsőségesen alulhatározott (egy adatból akár száz-as nagyságrendű ismeretlen meghatározó) inverziós lépéseken keresztül közelítünk iteratív úton a megoldáshoz. Az eljárás tipikus q -ik lépésében az i -ik sugárút által metszett j -ik cellában számított korrekció (ismét alkalmazva az $\vec{x} = \delta \vec{s}$ jelölést)

$$x_j^{(q+1)} = x_j^q + \frac{D_{ij} r_i^{(q)}}{\sum_k D_{ik}^2}, \quad (12)$$

ahol az összegzés k -ra az i -ik sugár által metszett cellákra történik, $r_i(q)$ a (3)-ban meghatározott vektor i -ik eleme, D_{ij} az i -ik sugár j -ik cellabeli metszete. (A (12) az ART algoritmus ún. energia-minimalizációs verziójának felel meg.) A SIRT módszer keretében valamely (j -ik) cellabeli $x_j(q)$ értéket a cellát metsző összes (Q_j számú) átvilágítási sugárral (12) alapján számított korrekciók átlagával módosítjuk:

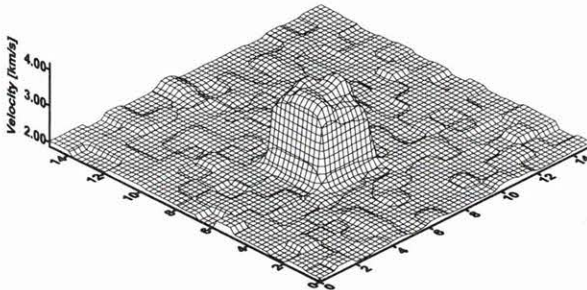
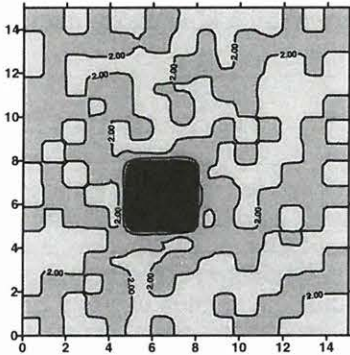
$$x_j^{(q+1)} = x_j^{(q)} + \frac{1}{Q_j} \sum_{i=1}^{Q_j} \frac{D_{ij} r_i^{(q)}}{\sum_k D_{ik}^2} \quad (13)$$

Ebből az átlagolásból adódik a SIRT eljárás közismert stabilitása és viszonylag kis zajérzékenysége. Példaként az 5. ábrán bemutatjuk az előbbi numerikus vizsgálatainkban használt I. (Gauss-hibákkal terhelt) adatrendszer SIRT inverziójának eredményét. Mint láthatjuk, a rekonstruált modell relatív távolsága a felvett modelltől 0,0260, ami kb. 25%-kal kisebb a CGRAD eljárással kapott értéknél. A SIRT módszer kiugró adatokra vonatkozó érzékenységét vizsgálandó végezzük el a II. adatrendszer SIRT inverzióját is. Az eredményt szemléltető 6. ábra tanúsága szerint a relatív modell-távolság 0,2244-nek adódott, ami (kb. 35%-kal) jobb ugyan a hasonló körülmények között a CGRAD algoritmus által adott értéknél, de a ható



SIRT
Data error : 1% + outliers Model distance : 0.2244

6. ábra. Kiugró hibákkal terhelt adatrendszer SIRT tomográfiai inverziójának eredménye
Fig. 6. The tomographic SIRT inversion of the data set containing Gaussian noise and outliers



SIRT
Data error : 1% Model distance : 0.0260

5. ábra. Gauss-eloszlású zajjal terhelt adatrendszer SIRT tomográfiai inverziójának eredménye
Fig. 5. The tomographic SIRT inversion of the data contaminated by Gaussian noise

továbbra is alig felismerhető. A modell-távolság a kiugró adatokat nem tartalmazó (Gauss-zajjal terhelt) I. adatrendszer SIRT inverziójánál kapott értéknek ismét csaknem 10-szerese. A SIRT módszer tehát valóban kevésbé érzékeny az adatrendszer által hozdott zajra, mint a konjugált gradiens módszer, azonban megállapíthatjuk, hogy kiugró adatokra vonatkozó rezisztenciája nem kielégítő. Ez a megállapításunk érthetővé válik, ha figyelembe vesszük VAN DER SLUIS és VAN DER VORST [1987] által bizonyított eredményt, amely szerint a SIRT eljárással kapott megoldás az

$$\vec{r} = \mathbf{w} (\delta \vec{r} - \mathbf{D} \delta \vec{s})$$

vektor legkisebb négyzetek elve szerinti minimumához tartozik, ahol

$$\mathbf{w} = \text{diag} \left\{ \left(\sum_k D_{ik}^2 \right)^{-1/2} \right\}$$

Felvetődik a kérdés, nem lehetne-e az M-CGRAD módszernél követett eljáráshoz hasonlóan a SIRT módszer kiugró adatokra vonatkozó rezisztenciáját is megnövelni. A (13) formula önként kínálja a meg-

oldást: az egyszerű átlagolás helyett képezzük az MFV- (vagy Cauchy-) súlyokkal számított súlyozott átlagot:

$$x_j^{(q+1)} = x_j^{(q)} + \frac{1}{\sum_{l=1}^{Q_j} W_{ll}} \sum_{i=1}^{Q_j} W_{ii} \frac{D_{ij} r_i^{(q)}}{\sum_k D_{ik}^2}, \quad (14)$$

ahol W_{ll} (ill. W_{ii}) az l -ik (ill. i -ik) adathoz rendelt MFV- (vagy Cauchy-) súly. Nézzük meg most, hogy az így súlyozott SIRT eljárás (nevezzük a továbbiakban M-SIRT-nek) milyen eredményt ad a II. adatrendszer tomográfiai inverziója során! Amint a 7. ábrán látható, a rekonstruált sebességeloszlás alig megkülönböztethető a kiugró adatokat nem tartalmazó, adatrendszer SIRT inverziójának eredményétől (a modell-távolság a II. adatrendszer M-SIRT inverziójánál mindössze 8%-kal nagyobb). Az ábrákat összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy az M-SIRT eljárás jelentős rezisztenciával rendelkezik a kiugró adatokkal szemben. Az M-SIRT és M-CGRAD algoritmusok összehasonlítása azt mutatja, hogy a SIRT módszer előnye a CGRAD módszerrel szemben a súlyozás során megmarad, sőt növekszik. (Megjegyezzük, hogy a (14) egyenletben meghatározott műveletek által a hagyományos SIRT eljáráshoz képest megkö-

vetelt többlet számítási idő jelentéktelen és az MFV-súlyok iterációnkénti kiszámítását tekintetbe véve is csupán néhány %-kal több számítási idő adódik. Ez tehát igen csekély „ár” az M-SIRT nyújtotta előnyökért.)

1.3. A Simulated Annealing módszer

A Simulated Annealing (SA) módszer [KIRKPATRICK et al. 1983] a globális optimalizáció egyik leggyakrabban használt eljárása, amelyet valamely (nem negatív) $E(x_1, \dots, x_M)$ függvény minimalizálására fejlesztettek ki. A módszer legfőbb előnye, hogy nemlineáris inverz problémák esetében közvetlenül (linearizálás nélkül) alkalmazható és segítségével elkerülhető, hogy a minimalizálás során az eljárás valamely lokális minimumnál elakadjon. A módszer rövid ismertetése végett, mivel egyébként is egyenes sugarút közelítéssel élünk, vezessük be az

$$e_i = t_i - \sum_k D_{ik} x_k$$

jelölést, ahol x_k és D_{ik} jelentése azonos a korábbiakkal.

Definiáljuk az

$$E = \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (15)$$

fiktív energia függvényt, vezessük be a T fiktív „hőmérsékletet” és ezzel a következő (nem normált) eloszlásfüggvényt:

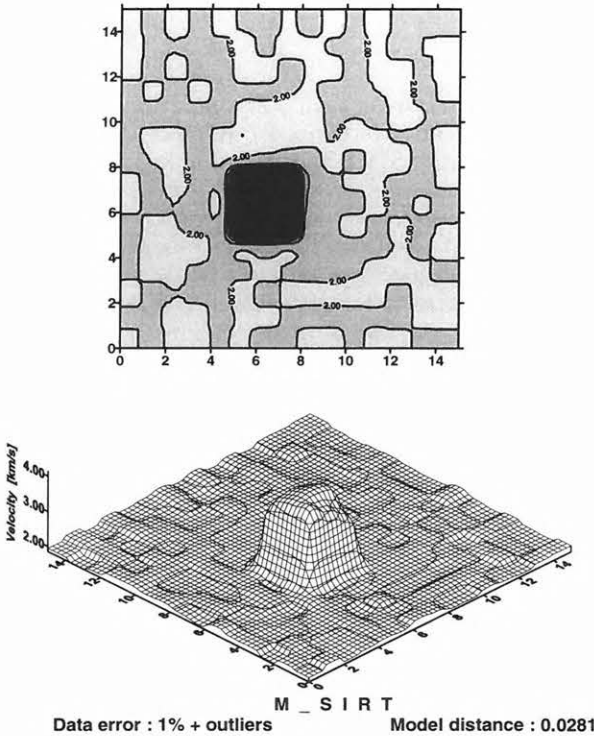
$$P(x_1, \dots, x_M, T) = \exp(-E/T).$$

A függvénynek az a jellemzője, hogy nagy hőmérsékletnél minden x_k egyformán valószínű, míg elegendően kis hőmérsékletnél a függvény „éles” maximumot mutat. Az eljáráshoz fel kell venni a paraméterter minden koordinátája mentén egy-egy Δx_k inkrementumot és egy elegendően nagy kezdeti T_0 hőmérsékletet, valamint meg kell adni az x_0 kezdeti becslést. Jelölje β_k a $(0,1)$ intervallumon egyenletesen eloszló valószínűségi változó valamely kisorsolt értékét. Ha $\beta_k < 1/2$, akkor az x_k változó új értéke legyen $\hat{x}_k = x_k + \Delta x_k$, egyébként pedig $\hat{x}_k = x_k - \Delta x_k$. Számítsuk most ki a

$$\Delta E = E(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_M) - E(x_1, \dots, x_k, \dots, x_M)$$

különbséget. Ha $\Delta E < 0$, akkor az x_k új értékét fogadjuk el: $x_k = \hat{x}_k$. Az SA eljárás legsajátosabb lépése az, hogy amennyiben $\Delta E > 0$, az új x_k -t nem feltétlenül utasítjuk el. A változó új értékét megtartjuk akkor is, ha $\Delta E > 0$, de

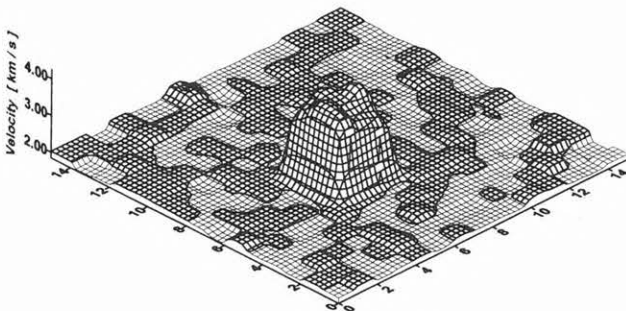
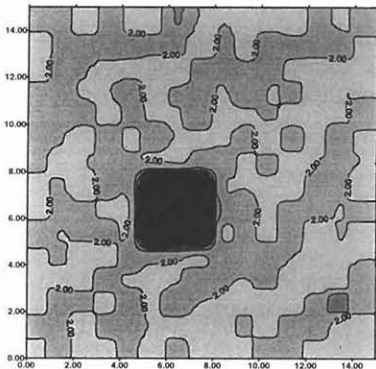
$$P(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_M) = \exp(-E/T) > \beta_k.$$



7. ábra. Kiugró hibákkal terhelt adatrendszer súlyozott konjugált gradiens (M-SIRT) inverziójának eredménye
Fig. 7. The tomographic M-CGRAD inversion of the data set containing Gaussian noise and outliers

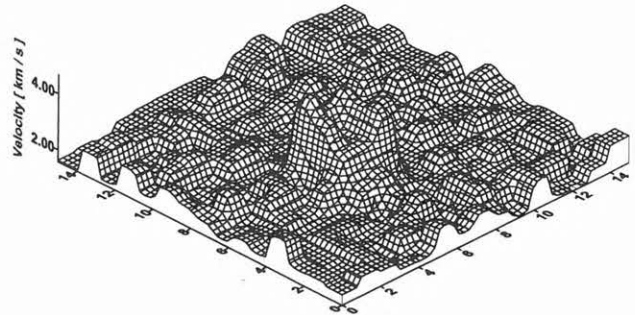
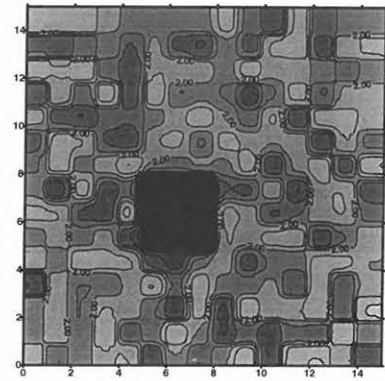
Ez a sajátosság adja meg azt a lehetőséget, hogy a lokális minimumokból az SA eljárás során kilépünk. A fenti műveletet $k=1, \dots, M$ -re (minden változóra) elvégezzük, majd az egész ciklust megismételjük (10–100 alkalommal). Ezután a T hőmérsékletet megfelelően kicsiny ΔT -vel csökkenthetjük és az egész eljárást megismételjük. (A T_0 és ΔT kontrollparamétereket tapasztalati úton választjuk meg.) Az eljárás automatikusan szolgáltatja a stopkritériumot, mivel egy elegendően kicsiny hőmérséklet alatt már hiába csökkentjük a hőmérsékletet, új elfogadható x_k értéket nem találunk. Látható, hogy az SA algoritmus rendkívül számításigényes. (Ez az oka, hogy numerikus példánkban az egyenes sugárút közelítéssel élünk.)

Az SA eljárás zajérzékenységének szemléltetésére végezzük el a korábbi numerikus vizsgálatainkban is használt Gauss-eloszlású zajjal terhelt I. adatrendszer inverzióját. Az eredményt a 8. ábra mutatja. A kiugró adatokat is tartalmazó II. adatrendszer SA tomográfiai inverziója a 9. ábrán bemutatott eredményre vezet. Noha ez a sebességeloszlás a CGRAD módszerrel kapott 3. ábrával, ill. a SIRT módszerrel kapott 6. ábrával összehasonlítva a legjobb (a relatív modell-távolság 0,17), megállapíthatjuk, hogy az SA eljárás is meglehetősen érzékeny a kiugró adatokra. Ez nem is meglepő, hiszen a (15) egyenletben bevezetett fiktív energia minimalizálása a legkisebb négyzetek elvének felel meg. Az 1.1-ben és 1.2-ben látott módon az SA eljárás kiugró adatokra vonatko-



SIMULATED ANNEALING
Data error : 1% Model distance: 0.0332

8. ábra. Gauss-eloszlású zajjal terhelt adatrendszer SA (Simulated Annealing) tomográfiai inverziójának eredménye
Fig. 8. The tomographic SA inversion of the data contaminated by Gaussian noise



SIMULATED ANNEALING
Data error : 1% + outliers Model distance : 0.1702

9. ábra. Kiugró hibákkal terhelt adatrendszer SA (Simulated Annealing) tomográfiai inverziójának eredménye
Fig. 9. The tomographic SA inversion of the data set containing Gaussian noise and outliers

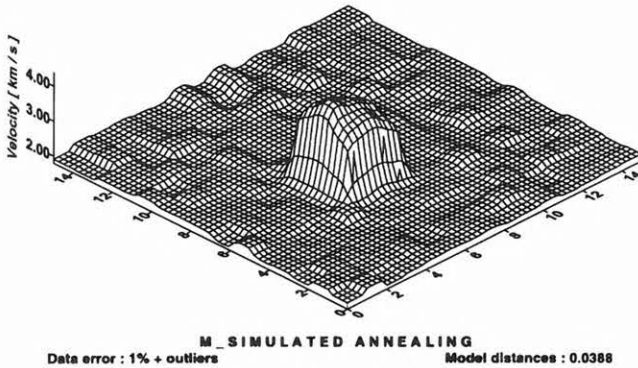
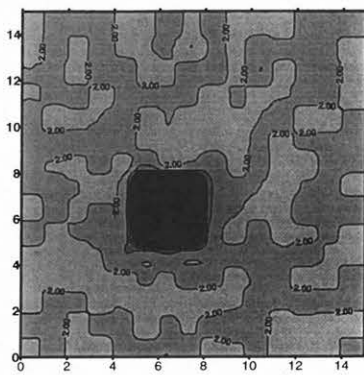
zó rezisztenciáját is megnövelhetjük, ha (15) helyett az

$$E = \sum_{i=1}^N W_{ii} e_i^2$$

fiktív energiafüggvényt vezetjük be, ahol W_{ii} az i -ik adathoz rendelt MFV- (vagy Cauchy-) súlyt jelenti. Az így módosított M-SA eljárással a II. adatrendszert invertálva a 10. ábrán bemutatott eredményt kapjuk. Mint láthatjuk, a súlyozás hasonló eredményre vezetett kiugró hibákkal terhelt adatrendszer inverziójánál, mint a hagyományos SA módszer a csupán Gauss-zajt tartalmazó adatrendszer inverziója során. Az M-SA eljárás tehát szintén jelentős rezisztenciával bír a kiugró adatokra vonatkozóan.

1.4. A súlyozott tomográfiai eljárások rövid összehasonlítása

Az előzőekben bevezetett M-CGRAD, M-SIRT és M-SA súlyozott tomográfiai eljárások közös jellemzője, hogy a kiugró adatokkal szemben tanúsított rezisztenciájuk a hagyományos (nem súlyozott) algoritmusokhoz képest igen jelentős. A számítási idő tekintetében elmondhatjuk, hogy az M-CGRAD és



10. ábra. Kiugró hibákkal terhelt adatrendszer súlyozott konjugált gradiens (M-SA) inverziójának eredménye
Fig. 10. The tomographic M-SA inversion of the data set containing Gaussian noise and outliers

M-SIRT eljárásokban a súlyozás nem jelent lényegesen nagyobb futási időigényt. Az M-SA algoritmus azonban tapasztalataink szerint akkor stabilan konvergens, ha a W súlyokat az SA algoritmus leírásában említett cikluson belül állandóan újra számítjuk. Ez viszont az egyébként is jelentős számítási időt észrevehetően növeli. Az SA és M-SA algoritmusok jelentősége a fiktív energiafüggvény abszolút minimumának meghatározásában van, ami inkább elvi, mint gyakorlati előny.

Az M-CGRAD és M-SIRT algoritmusok alkalmazása az előzőekben bemutatott példák alapján gyakorlati előnyöket kínál, különösen, ha tekintetbe vesszük, hogy ezek az eljárások csupán Gauss-eloszlású zajt hordozó adatrendszer tomográfiai inverziója során közel azonos eredményt adnak, mint a hagyományos CGRAD ill. SIRT módszer.

2. Normált adatok tomográfiai inverziója

Az abszorpciós tényező tomográfiai meghatározásában igen gyakran a rugalmas hullám intenzitására vonatkozó

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_{\Gamma} a \, dl \right\}$$

egyenlet szolgál kiindulással, ahol I_0 az intenzitás a forrásnál, Γ a sugárút, a az abszorpciós tényező. I_0 ismeretében az intenzitás adatokból képezhetők a

$$\gamma_i = - \ln \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

mennyiségek, amelyek a tomográfiai módszerekkel invertálható

$$\int_{\Gamma_i} a \, ds = \gamma_i \quad (16)$$

egyenletrendszer írható fel [DINES, LYTTLE 1979]. Az eljárás feltételezi az I_0 intenzitás ismeretét, amely elsősorban az ultrahang tomográfiában valósulhat meg, akusztikus és még inkább szeizmikus mérések-nél I_0 rendszerint ismeretlen. Különösen igaz ez akkor, ha a hullám forrásaként robbantás szolgál. Ilyenkor a forrás rendszerint spektrálisan sem reprodukálható, így a mérések alapján a γ_i mennyiségek nem határozhatók meg.

Jelölje valamely szeizmikus átvilágítás során a K -ik forrásból az i -ik érzékelőhöz érkező szeizmikus jel Fourier-amplitúdóját $U_{ik}(\omega)$, amelyre jó közelítéssel teljesül az

$$U_{ik}(\omega) = F_k(\omega) C_i(\omega) G_{ik} A_{ik}(\omega)$$

egyenlet, ahol $F_k(\omega)$ a forrásereőség, $C_i(\omega)$ a geofon és környezete közötti csatolási tényező, G_{ik} a geometriai csillapodást leíró tényező és

$$A_{ik}(\omega) = \exp \left\{ - \int_{\Gamma_{ik}} a \, dl \right\}$$

a hullám abszorpcióját írja le. A mérést egyidőben több szeizmikus csatornán végezve egyet közülük, pl. az n -iket, amelyre az

$$U_{nk}(\omega) = F_k(\omega) C_n(\omega) G_{nk} A_{nk}$$

kifejezés teljesül, normalásra használhatunk és a forrásereőséget kiküszöbölve képezhetjük a

$$v_{ij}^{(n)}(\omega) = \frac{U_{ik}(\omega)}{U_{nk}(\omega)} = \frac{C_i(\omega)}{C_n(\omega)} \frac{G_{ik}}{G_{nk}} \exp \left\{ - \left[\int_{\Gamma_{ik}} a \, dl - \int_{\Gamma_{nk}} a \, dl \right] \right\}$$

mennyiségeket. A csatolási tényezők $C_i \approx C_n$ közelítő azonosságát feltételezve a

$$T_{ik}^{(n)} = - \ln \left(v_{ik}^{(n)} \frac{G_{nk}}{G_{ik}} \right)$$

jelölés bevezetésével az

$$\int_{\Gamma_{ik}} a \, dl - \int_{\Gamma_{nk}} a \, dl = T_{ik}^{(n)} \quad (17)$$

egyenletre jutunk. Ezzel az eljárással a (16) típusú egyenletek helyett a tomográfiai rekonstrukció alapjául olyan egyenletrendszert kapunk, amelyben egy adat (a normalás miatt) két sugárúthoz tartozik.

Hasonló egyenleteket írhatunk fel akkor is, ha a szeizmikus hullám abszolút futási ideje (pl. a szeizmikus műszer indítási hibája vagy az indítójel hiánya miatt) nem állapítható meg. Ekkor is lehetséges azonban az n -ik geofont referenciaként használva a

$$\Delta t_{ik}^{(n)} = t_{ik} - t_{nk}$$

időkülönbség mérése, amelyre a (17)-hez hasonló alakú

$$\int_{\Gamma_{ik}} s \, dl - \int_{\Gamma_{nk}} s \, dl = \Delta t_{ik}^{(n)} \quad (18)$$

egyenlet írható fel.

A (17), (18) egyenletek ún. kétsugaras tomográfia egyenletek, amelyeket a hagyományos tomográfiai algoritmusokkal nem lehet kezelni. A konjugált gradiens és a SIRT módszerek azonban könnyen módosíthatók úgy, hogy különbségi adatok inverziójára is alkalmasak legyenek. Hogy ezt belássuk, fel kell írunk a (17) egyenletek diszkretizált alakját, bázisfüggvényekként cellánként konstans függvényeket használva. A Γ_{ik} sugárúton az integrál a K index elhagyásával az

$$\int_{\Gamma_i} a \, dl = \sum_{j=1}^M D_{ij} a_j,$$

a Γ_{nk} sugárúton pedig

$$\int_{\Gamma_n} a \, dl = \sum_{j=1}^M D_{nj} a_j$$

alakban írható fel, ezért (17) a

$$\sum_{j=1}^M (D_{ij} - D_{nj}) a_j = T_i \quad (19)$$

diszkretizált formában állítható elő. Hasonló eljárással (18) a

$$\sum_{j=1}^M (D_{ij} - D_{nj}) s_j = \Delta t_i \quad (20)$$

egyenletet eredményezi. A (19), (20) kétsugaras tomográfiai egyenletek közös alakban

$$\sum_{j=1}^M A_{ij} x_j = b_i \quad (21)$$

szerint írhatók fel, ahol $A_{ij} = D_{ij} - D_{nj}$, b_i pedig értelemszerűen T_i vagy Δt_i .

Mivel a (21) egyenletrendszer a (2) egyenlet pontos megfelelője, az

$$\vec{r} = \vec{b} - \mathbf{A}\vec{x} \quad (22)$$

vektor normanégyszetének minimalizálásával a (4)-nek megfelelő

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{x} = \mathbf{A}^T \vec{b} \quad (23)$$

normálegyenletet kapjuk, amelynek megoldására ($\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{A}$ helyettesítéssel) alkalmazhatjuk az 1.1.-ben ismertetett CGRAD eljárást.

A SIRT módszer különbségi integrálok kezelésére alkalmas algoritmusának kialakítása részletesebb megfontolást kíván. Amint ismeretes, az ART eljárás mint alulhatározott inverziós módszer feltételes szélsőérték számítási feladaton keresztül definiálható: minimalizálnunk kell a paraméter korrekció vektor normanégyszetét úgy, hogy a (22) szerint képzett

$$\delta r_i = \delta b_i - \sum_{j=1}^M (D_{ij} - D_{nj}) \delta x_j$$

mennyiségekre $\delta r_i = 0$ teljesüljön. Ez másként a

$$\varphi = \sum_{j=1}^M (\delta x_j)^2 + \lambda \left[\delta b_i - \sum_{j=1}^M (D_{ij} - D_{nj}) \delta x_j \right]^2$$

függvény minimalizálását követeli meg, ahol λ a Lagrange-féle multiplikátor. Az extrémum feltétele a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = 2\delta x_l - 2\lambda \delta r_i (D_{il} - D_{nl}) = 0$$

egyenletre vezet és teljesülni kell a

$$\delta b_i - \sum_{j=1}^M (D_{ij} - D_{nj}) \delta x_j = 0$$

egyenletnek is. Az egyenletrendszert megoldva a δx_j ART korrekcióra a

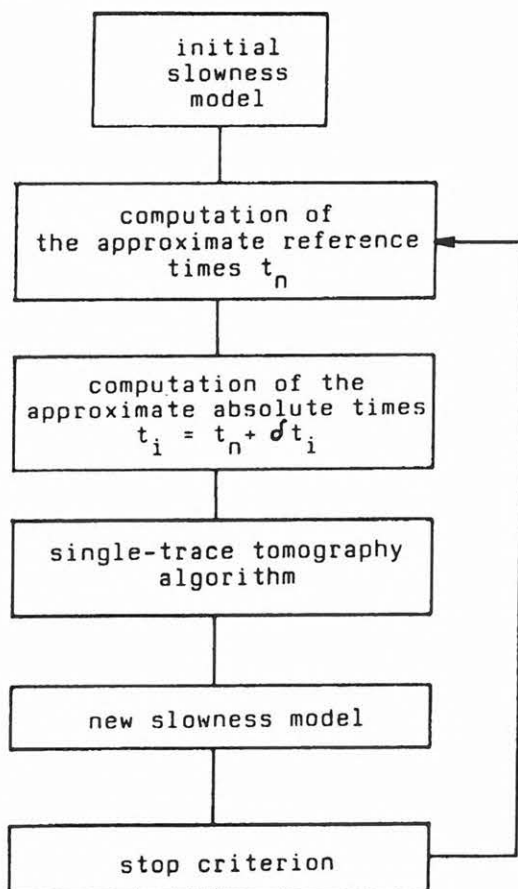
$$\delta x_j = \frac{D_{ij} - D_{nj}}{\sum_{k=1}^M (D_{ik} - D_{nk})^2} \delta b_i^{(q)}$$

kifejezést kapjuk. Ezekkel a korrekciókkal a SIRT algoritmus különbségi integráladatok inverziójára alkalmas változatát (D-SIRT) az

$$x_j^{(q+1)} = x_j^{(q)} + \frac{1}{Q_j} \sum_{i=1}^{Q_j} \frac{D_{ij} - D_{nj}}{\sum_{k=1}^M (D_{ik} - D_{nk})^2} \delta b_i^{(q)} \quad (24)$$

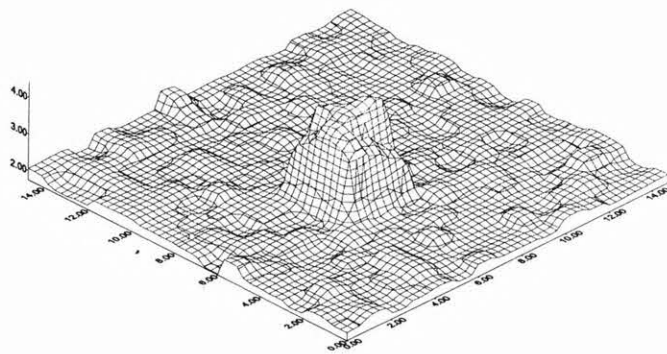
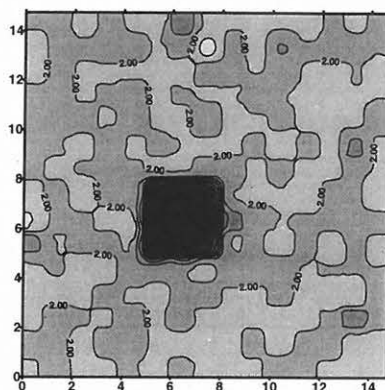
formulával definiálhatjuk.

A (22) egyenletrendszer konjugált gradiens módszerrel történő megoldása, ill. a (24) szerinti D-SIRT algoritmus alkalmazása esetén a (19), ill. (20) egyenletekben meghatározott kétsugárutas tomográfiai feladatot közvetlenül oldjuk meg. A 11. ábrán látható folyamatábrán egy közvetett eljárást mutatunk be, amely a kétsugárutas problémát iteratív úton visszavezeti hagyományos (egy sugárutas) tomográfiai problémára.



11. ábra. A kétsugárutas tomográfiai probléma visszavezetése hagyományos tomográfiai feladatra
Fig. 11. The flow chart of algorithm reducing the double trace tomography problem to an ordinary one

A különbségi adatok tomográfiai rekonstrukciójára bemutatott három módszer mindegyike az 1.1-ben és 1.2-ben ismertetett úton továbbfejleszhető úgy, hogy megfelelő súlyok alkalmazásával kiugró adatokkal szemben mutatott rezisztenciája megnövekedjék. A formulák automatikusan képezhetők, így azokat nem mutatjuk be. Ehelyett példaként a D-SIRT algoritmus MFV módszer szerinti súlyokkal súlyozott változata (MD-SIRT) által az 1. pontban végzett vizsgálatunkban használt II. adatrendszerből megfelelően előállított különbségi időadatokkal végrehajtott tomográfiai rekonstrukció eredményét mutatjuk be. A 12. ábra tanúsága szerint kiugró hibákkal terhelt különbségi integráladatok tomográfiai inverziója során is elfogadható eredmény kapható. Ez azt mutatja, hogy a súlyozott M-SIRT algoritmus kétsugaras változata is jelentős rezisztenciával rendelkezik a kiugró adatokra vonatkozóan.



M - DSIRT
Data error : 1% + outliers Model distances : 0.0502

12. ábra. Különbségi időadatok súlyozott SIRT rekonstrukciójának (MD-SIRT) eredménye
Fig. 12. The tomographic MD-SIRT inversion of the double trace data set containing Gaussian noise and outliers

3. Összefoglalás

A tanulmányban javaslatot tettünk a globális optimalizációból ismert Simulated Annealing módszer tomográfiai alkalmazására és bemutattuk a konjugált gradiens, a SIRT és a Simulated Annealing eljárások súlyozott változatát. A továbbfejlesztett tomográfiai

algoritmusok tesztelését szintetikus adatrendszeren végeztük. Összehasonlítva a csupán Gauss-eloszlású zaj mellett kiugró hibákat is tartalmazó adatokon végzett tomográfiai rekonstrukció eredményeit megállapítottuk, hogy az MFV (és hasonlóan a Cauchy) súlyokkal definiált M-CGRAD, M-SIRT és M-SA eljárások kiugró adatokkal szemben tanúsított rezisztenciája a hagyományos algoritmusokhoz képest jelentősen megnövekedett. A három bemutatott súlyozott tomográfiai eljárás közül a zajérzékenység szempontjából az M-SIRT módszer bizonyult legjobbnak. Mivel ennél az eljárásnál a súlyozás okozta többlet számítási idő (a SIRT-re vetítve) mindössze néhány %, ezért az M-SIRT algoritmus gyakorlati alkalmazásba vétele indokolt.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmányban bemutatott eredmények az OTKA által támogatott kutatások keretében születtek (OTKA nyilvántartási szám: 2385). A szerző köszönetét fejezi ki a támogatásért.

HIVATKOZÁSOK

- AMUNDSEN L. 1991: Comparison of the least-squares criterion and the Cauchy criterion in frequency-wavenumber inversion. *Geophysics* **56**, 2027-2035
- BISHOP T. N., BUBE K. P., CUTLER R. T., LANGAN R. T., LOVE P. L., RESNICK J. R., SHUEY R. T., SPINDLER D. A., WYLD H. W. 1985: Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics* **50**, 903-923
- BOIS P., LA PORTE M., LAVERGNE M., THOMAS T. 1972: Well to Well Seismic Measurements. *Geophysics* **37**, 471-480
- BREGMAN N. D. 1986: Tomographic Inversion of Crosshole Seismic Data. Thesis of Doctorate of Philosophy, University of Toronto
- DINES K. A., LYTLE R. J. 1979: Computerized geophysical tomography. *Proc. IEEE* **67**, 1065-1073
- DOBRÓKA M. 1985: Szénteleges összletek inhomogenitásának és tektonikai zavarainak vizsgálata telephullámok abszorpciója útján. Kandidátusi értekezés. Miskolc
- DOBRÓKA M., DRESEN L., GELBKE C., RÜTER H. 1992: Tomographic inversion of normalized data — double-trace tomography algorithm. *Geophysical Prospecting* **40**, (In press)
- DOBRÓKA M. 1993: Tomographic reconstruction by means of normalized data — an approach to the channel wave tomography problem. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio Geophysica et Meteorologica. Tomus IX.* Budapest. 51-78
- GUSTAVSSON M., IVANSSON S., MOREŇ P., JÖRGEN P. 1986: Seismic borehole tomography-measurement system and field studies, *Proc. IEEE*, **74**, 339-346
- HERING A., MISIEK R., GYULAI Á., ORMOS T., DOBRÓKA M., DRESEN L.: 1995. A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave seismic data. Part I: basic ideas. *Geophysical Prospecting* **43**, 135-156
- IVANSSON S. 1985: A study of methods for tomographic velocity estimation in the presence of low-velocity zones. *Geophysics* **50**, 969-988
- KIRKPATRICK S., GELATT C. D., VECCHI M. P. 1983: Optimization by simulated annealing. *Science* **220**, 671
- KÖRMENDI A., BODOKY T., HERMANN L., DIANISKA L., KÁLMÁN T. 1986: Seismic measurements for safety in mines. *Geophysical Prospecting* **34**, 1022-1037
- LINES L., TREITEL S. 1984: A review of least-square inversion and its application to geophysical problems. *Geophysical Prospecting* **32**, 159-186
- LYTLE R. J., DINES K. A. 1980: Iterative ray tracing between boreholes for under-ground image reconstruction, *IEEE Trans. Geosci. remote Sensing*, GE-18, 234-240
- MASON I. 1981: Algebraic reconstruction of a two dimensional seismic channel wave velocity field in the High Hazles seam of Thoresby Colliery. *Geophysics* **46**, 298-308
- MENKE W. 1984: *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, Academic Press, Orlando
- NOLET G. 1985: Solving or resolving inadequate and noisy tomographic systems, *J. Comp. Phys.* **61**, 463-482
- PETERSON J. E., PAULSSON B. N. P., MCEVILLY T. V. 1985: Applications of algebraic reconstruction techniques to cross-hole seismic data, *Geophysics*, **50**, 1566-1580
- SCALES J. A. 1987: Tomographic inversion via the conjugate gradient method. *Geophysics* **52**, 2, 179-185
- SCALES J. A., GERZTENKORN A., TREITEL S., LINES L. R. 1988: Robust optimization methods in geophysical inverse theory. 58th SEG meeting, Anaheim, Expanded Abstracts, 827-830
- STEINER F. 1988: Most frequent value procedures. (A short monograph). *Geophysical Transactions* **34**, 139-260
- STARK C., CLAYTON R. W. 1986: Analysis of the resolution between ambiguous velocity and reflector position for travelttime tomography, SEG Expanded Abstracts, 56th Annual International SEG Meeting
- VAN DER SLUIS A., VAN DER VORST H. A. 1987: Numerical solution of large, sparse linear algebraic systems arising from tomographic problems, in *Seismic Tomography*, ed. Nolet, G., 49-83, Reidel, Dordrecht
- WHITE D. J. 1989: Two-dimensional seismic refraction tomography, *Geophysical Journal* **97**, 223-245
- WONG J., HURLEY P., WEST G. F. 1983: Crosshole seismology and Seismic Imaging in Crystalline Rocks. *Geophys. Res. Lett.* **10**, 686-689