

# A Radon transzformáció és alkalmazása vertikális szeizmikus szelvények feldolgozásában

WÉBER ZOLTÁN\*

A Radon, vagy más néven  $\tau$ - $p$  transzformáció egy olyan invertálható transzformáció, amely a szeizmikus szelvényeket a  $\tau$  (időmetszet) és  $p$  (hullámparaméter, "lassúság") tartományba képezi le, és amely alkalmas a hullámter újramintavételezésére, interpolációjára és extrapolációjára, a  $P$  és  $S$  hullámok szétválasztására, a lefelé és felfelé haladó hullámok szétválasztására, a hullámter síkhullámokra való felbontására a beérkezések elkülönítése, azonosítása és analizálása céljából.

Jelen dolgozat célja a  $\tau$ - $p$  transzformáció fő jellemzőinek illusztrálása, valamint a hullámterek szétválasztására való alkalmazásának bemutatása.

The Radon or  $\tau$ - $p$  transform is an invertible transformation of seismic records into the  $\tau$  (intercept time) and  $p$  (ray parameter, slowness) domain and can be applied to wave-field resampling, interpolation and extrapolation, separation of P-waves and S-waves, separation of upgoing and downgoing waves and wave-field decomposition for isolation, identification and analysis of arrivals.

The purpose of this paper is to illustrate the main features of the  $\tau$ - $p$  transformation and its application to the wave-field separation of vertical seismic profiling data.

## Bevezetés

A vertikális szeizmikus profilmérés (VSP) napjaink egyik legdinamikusabban fejlődő szeizmikus kutatási ágazata, amely egyrészt annak köszönhető, hogy a VSP szelvényen mind a lefelé, mind a felfelé haladó hullámteret figyelemmel kísérhetjük, másrészt pedig annak, hogy a fúrólukban elhelyezett geofonok közel vannak a reflektáló felületekhez és így a regisztrált hullámter spektruma szélesebb, mint a felszínen regisztrált hullámteré.

Annak érdekében, hogy a VSP nyújtotta információkat hasznosíthassuk, intenzív adatfeldolgozásra van szükség. Ilyenek a különböző jel/zaj arányt javító szűrések, a lefelé és felfelé haladó hullámterek szétválasztása, a  $P$  és  $S$  hullámok szétválasztása, a hullámter újramintavételezése, interpolációja és extrapolációja, a dekonvolúció, stb.

Az imént említett adatfeldolgozási lépéseknek igen fontos elemei a különböző hullámter-transzformációk. Eddig főként az  $x$ - $f$  (távolság vagy mélység—frekvencia) és  $k$ - $f$  (hullámszám—frekvencia) tartományba történő transzformációkat alkalmazták. Az elmúlt években azonban előtérbe került a szeizmikus adatok  $\tau$ - $p$  (időmetszet—hullám-paraméter) tartományban történő feldolgozása (STOFFA et al. 1981, TREITEL et al. 1982, DURRANI et al. 1984, BENOLIEL et al. 1987, HU et al. 1987, MARTINEZ et al. 1987, és mások). A  $\tau$ - $p$  transzformációt a szakirodalomban más néven is megtalálhatjuk: Radon transzformáció, slant stack vagy a hullámterek síkhullámokra való bontása (plane-wave decomposition).

Jelen dolgozatban összefoglaljuk a  $\tau$ - $p$  transzformáció fő sajátosságait, majd szintetikus adatok feldolgozásán keresztül bemutatjuk a különböző transzformációs paraméterek megválasztási módját és a

transzformáció hullámter szétválasztásban való alkalmazását.

## A Radon transzformáció és tulajdonságai

A  $\varphi(x,y)$  kétváltozós függény Radon transzformáltja [RADON 1917]:

$$R_{\tau} \{ \varphi(x,y) \} = \psi(p,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \tau+px) dx,$$

melynek inverze:

$$R_{\tau}^{-1} \{ \psi(p,\tau) \} = \varphi(x,y) = (2\pi)^{-1} (d/dy) \mathcal{H} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p,y-px) dp,$$

ahol  $\mathcal{H}$  az  $y$  változó szerinti direkt Hilbert transzformációt jelöli.

Az I. táblázatban felsoroljuk a transzformáció legjellemzőbb tulajdonságait. A közölt összefüggések közvetlenül a fenti definícióból levezethetők, így a példa kedvéért csupán a csavarási tulajdonságot bizonyítjuk.

A Radon transzformáció definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned} R_{\tau} \{ \varphi(ax+by, cx+dy) \} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi [x(a+bp) + b\tau, x(c+dp) + d\tau] dx. \end{aligned}$$

Az  $u = x(a+bp) + b\tau$  változó bevezetésével adódik, hogy  $dx = \frac{du}{|a+bp|}$ . Az új változó behelyettesítésével már könnyen belátható a táblázatban közölt képlet helyessége. Megjegyezzük, hogy az elforgatási tétel közvetlenül adódik az előbb bizonyított csavarási tételből, hiszen a koordinátarendszer  $\alpha$  szöggel való elforgatása éppen az

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$$

\* ELTE Geofizika Tanszék, H-1083 Budapest, Ludovika tér 2.

**A Radon transzformáció tulajdonságai.**  
**Properties of the Radon transform.**

Tétel	Függvény	Radon transzformált
Definíció	$\varphi(x, y)$	$R_{p\tau}[\varphi(x, y)] = \psi(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \tau + px) dx$
Szuperpozíció	$\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$	$\psi_1(p, \tau) + \psi_2(p, \tau)$
Linearitás	$a \varphi(x, y)$	$a \psi(p, \tau)$
Skálázás	$\varphi\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$	$ a  \psi\left(p \frac{a}{b}, \frac{\tau}{b}\right)$
Eltolás	$\varphi(x - a, y - b)$	$\psi(p, \tau - b + pa)$
Elforgatás $\alpha$ szöggel		$\frac{1}{ \cos \alpha + p \sin \alpha } \cdot \psi\left(\frac{p - \tan \alpha}{1 + p \tan \alpha}, \frac{\tau}{\cos \alpha + p \sin \alpha}\right)$
Csavarás	$\varphi(ax + by, cx + dy)$	$\frac{1}{ a + bp } \cdot \psi\left(\frac{c + dp}{a + bp}, \tau \frac{[ad - bc]}{a + bp}\right)$

Vetületi tétel (I)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(p, \tau) \exp(-i\Omega\tau) d\tau = \Phi(-\Omega p, \Omega)$$

(2-D Fourier transzformált)

Vetületi tétel (II)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{p\tau}\{\Phi(\omega_1, \omega_2)\} \exp(i\Omega\tau) d\tau = 2\pi\varphi(-\Omega p, \Omega)$$

Konvolúciós tétel

$$R_{p\tau}[\varphi(x, y) * g(y)] = \psi(p, \tau) * g(\tau)$$

Plancheral-tétel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(p, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) dx dy$$

Parseval-tétel

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{p\tau}[\varphi^2(x, y)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, y) dx dy$$

koordinátatranszformációnak felel meg, ahol

$$a = \cos \alpha, \quad b = \sin \alpha \\ c = -\sin \alpha, \quad d = \cos \alpha.$$

Az 1. táblázat második része a Radon transzformációval kapcsolatos legfontosabb tételeket tartalmazza. A vetületi tétel (I) azt mondja ki, hogy a Radon transzformált egydimenziós Fourier transzformáltja a kétdimenziós Fourier transzformáltat adja meg a kétdimenziós frekvenciasík egy egyenes (metszete) mentén. A vetületi tétel (II) pedig azt fogalmazza meg, hogy a  $\Phi(f_1, f_2)$  kétdimenziós frekvenciafüggvény Radon transzformáltjának egydimenziós inverz Fourier transzformáltja a  $\varphi(x, y)$  függvény egy metszetével egyezik meg.

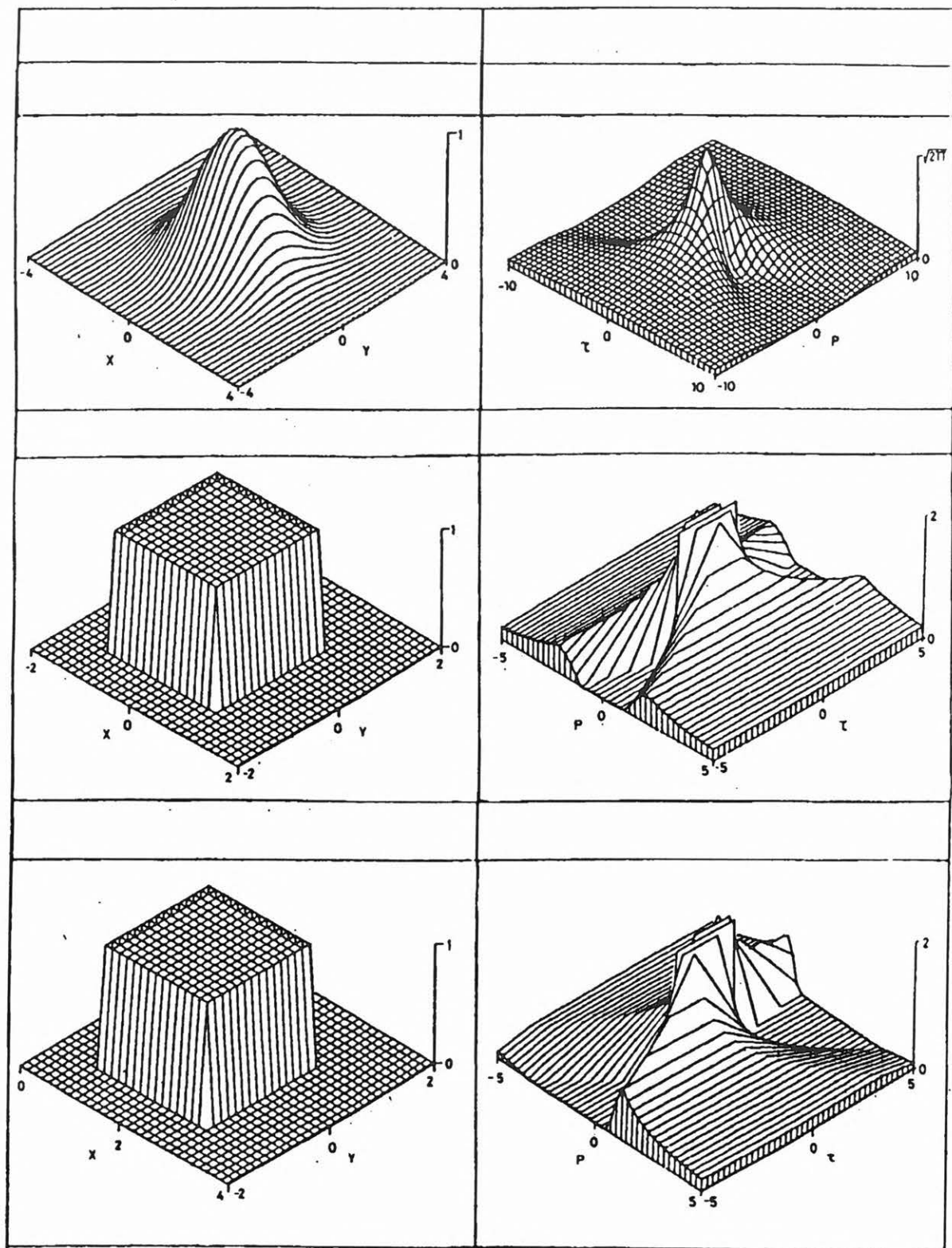
A konvolúciós tételt a következőképpen bizonyíthatjuk. Ha a  $\psi(p, \tau)$  Radon transzformáltat a  $g(\tau)$  függvénnyel konvolváljuk, akkor

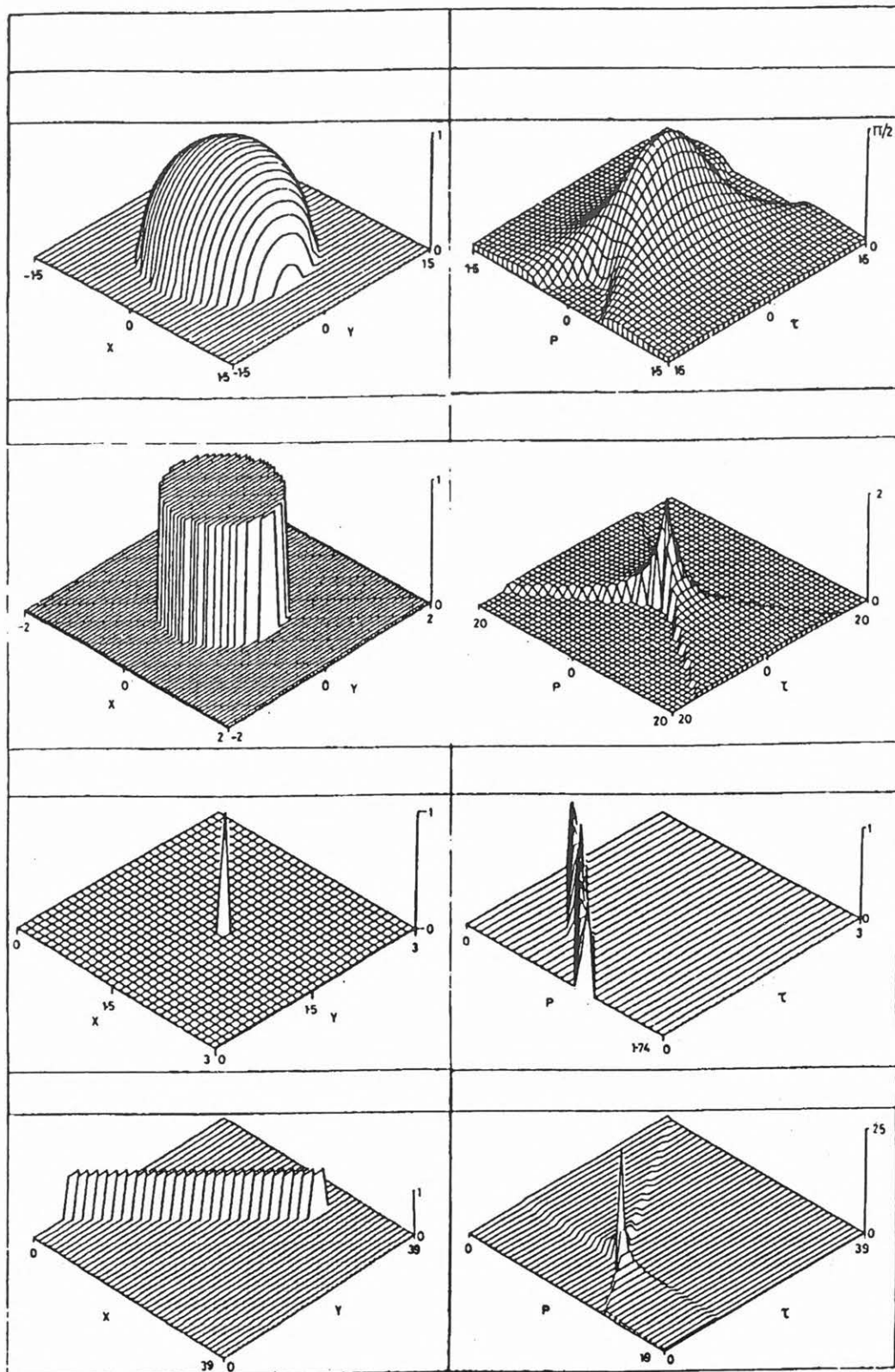
$$\begin{aligned} \psi(p, \tau) * g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p, s) g(\tau - s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, s + px) g(\tau - s) ds dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, r) g(\tau + px - r) dr dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi * g)(x, \tau + px) dx = \\ &= R_{p\tau}[\varphi(x, y) * g(y)], \end{aligned}$$

ahol a harmadik sorban az  $r=s+px$  helyettesítéssel éltünk. A tétel szerint tehát a második változó szerinti konvolúciót mind az  $x$ -y, mind a  $p$ - $\tau$  tartományban végrehajthatjuk a  $g(y)$  függvény megváltoztatása nélkül.

A táblázat utolsó két tétele az energiamegmaradást fogalmazza meg az  $x$ -y illetve a  $p$ - $\tau$  tartományban.

Az 1. ábrán néhány gyakran előforduló kétdimenziós függvényt és Radon transzformáltjait illusztráljuk.





1. ábra. Néhány kétváltozós függvény (baloldal) és Radon transzformáltja (jobboldal).  
 Fig. 1. Some two-dimensional functions (on the left) and their Radon transforms (on the right).

Az első példa a kétdimenziós Gauss függvényt és transzformáltját szemlélteti. A második példán egy kétdimenziós négyzet alakú ablakfüggvény Radon transzformáltját láthatjuk, míg a harmadik sor az előbbi ablakfüggvény  $x$  irányban eltoló változatát mutatja.

A hengersizmetrikus ablakfüggvény kör alakú kontúrja a  $\tau$ - $p$  tartományban hiperbola alakot vesz fel. Az ablakfüggvény kör alakú kontúrjának egyenlete ugyanis

$$y = \pm (a^2 - x^2)^{1/2},$$

amiből következik, hogy

$$p = \frac{dy}{dx} = \mp x (a^2 - x^2)^{-1/2},$$

azaz

$$x = \pm ap (p^2 + 1)^{-1/2}.$$

$x$  és  $y$  értékét behelyettesítve az  $y = \tau + px$  összefüggésbe kapjuk, hogy

$$\tau^2 = a^2 (p^2 + 1),$$

amely egy hiperbola egyenlete a  $\tau$ - $p$  tartományban.

Az 1. ábra utolsó két példája azt illusztrálja, hogy egy pont transzformáltja egy egyenes, és egy egyenes transzformáltja egy pont. Ugyanakkor az ábrákról az is leolvasható, hogy ha a transzformálandó adatok sávkorlátozottak (az egyenes szélessége véges), a transzformált is eltér az ideálistól (egy pontban nagy érték, másutt kicsi, de zérustól különböző értékek).

## A Radon transzformáció digitális megvalósítása

A Radon transzformáció digitális adatokon való alkalmazására számos javaslatot találhatunk a szakirodalomban [BERNOLIEL et al. 1987, DIETRICH 1990, és mások]. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a HANEVELD et al. [1990] által javasolt és az ELTE Geofizika Tanszék IBM PC/AT személyi számítógépén megvalósított algoritmust.

Feltéve, hogy a transzformálandó kétdimenziós függvény második változója az idő (szeizmikus adatrendszer), a Radon transzformáció és inverz párja a következőképpen írható fel

$$\psi(p, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \tau + px) dx, \quad [1]$$

$$\varphi(x, t) = (2\pi)^{-1} (d/dt) \mathcal{H} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p, t - px) dp, \quad [2]$$

ahol a  $d/dt$  az idő szerinti differenciálást jelöli,  $\mathcal{H}$  pedig az idő szerinti direkt Hilbert transzformációt jelenti. A transzformáció diszkrétizálásához a fenti formulák frekvencia tartománybeli alakját használjuk fel. A Fourier transzformáció végrehajtása után a direkt Radon transzformáció

$$\Psi(p, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i2\pi f p x] \Phi(x, f) dx \quad [3]$$

alakban, az inverz Radon transzformáció pedig

$$\Phi(x, f) = f \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i2\pi f p x] \Psi(p, f) dp \quad [4]$$

alakban írható fel, ahol  $\Psi$  és  $\Phi$  a  $\psi$  és  $\varphi$  Fourier transzformáltjai. Mivel a szeizmikus alkalmazásokban mind  $\psi$ , mind  $\varphi$  valós függvények, ezért a számítások során elegendő csupán a pozitív frekvenciákra szorítkoznunk, az inverz Fourier transzformáció végrehajtásakor pedig felhasználjuk a  $\Psi(p, -f) = \Psi(p, f)^*$  és a  $\Phi(x, -f) = \Phi(x, f)^*$  tulajdonságokat (a  $*$  komplex konjugátum jelöl).

Annak érdekében, hogy a [3] és [4] Radon transzformáltakat kiszámíthassuk, a  $\Psi$  és  $\Phi$  függvényeket diszkrétizálnunk kell. Az alábbiakban csak az  $x$  és  $p$  szerinti diszkrétizációval foglalkozunk.

A diszkrét  $\Phi$  függvény csupán a mintavételi helyeken ismert, azaz csak a  $\Phi_{n,j}$  értékeket ismerjük, ahol

$$\Phi_{n,j} = \Phi(x_n, f_j), \quad x_n = x_{\min} + n\Delta x, \quad f_j = j\Delta f,$$

ahol  $\Delta x$  és  $\Delta f$  a térben és frekvenciában érvényes mintavételi távolság.

Annak érdekében, hogy a [3] egyenletben előírt  $x$  szerinti integrálást végrehajthassuk, az integrandust a sinc függvény segítségével az alábbi módon írjuk fel:

$$\Phi(x, f) = \sum_n \Phi_{n,j} \frac{\sin[\pi(x - x_n)/\Delta x]}{\pi(x - x_n)/\Delta x}. \quad [5]$$

Ez a felírás hallgatólagosan feltételezi, hogy az integrandus sávkorlátozott függvény, de ez esetünkben nem jelent komoly megszorítást, hiszen a szeizmikus gyakorlat során feldolgozandó függvények mindig sávkorlátozottak.

[5]-nek [3]-ba való behelyettesítésével, valamint az összegzés és az integrálás sorrendjének felcserélésével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Psi_{k,j} &= \sum_n \Phi_{n,j} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{x - x_n}{\Delta x}\right) \exp(i2\pi f_j p_k x) dx = \\ &= \sum_n \Phi_{n,j} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{x - x_n}{\Delta x}\right) \exp(i2\pi f' x) dx = \\ &= \sum_n \Phi_{n,j} \Pi(\Delta x f') \exp(i2\pi f' x_n) \Delta x, \end{aligned}$$

hiszen a fenti levezetés második sorában álló integrál nem más, mint a sinc függvény  $x$  változó szerinti inverz Fourier transzformáltja ( $f' = f_j p_k$ , és  $\Pi(x)$  azt a négyszögjellet jelöli, amely az  $-1/2 \leq x \leq 1/2$  intervallumban egységnyi, azon kívül pedig zérus).

Az  $f'$  változó helyére visszaírva az  $f_j p_k$  szorzatot kapjuk, hogy a diszkrétizált direkt Radon transzformáció:

$$\begin{aligned} \Psi_{k,j} &= \sum_n \Phi_{n,j} \exp[i2\pi f_j p_k x_n] \Delta x, \quad \text{ha } |f_j p_k| \leq (2\Delta x)^{-1}, \\ &= 0, \quad \text{ha } |f_j p_k| > (2\Delta x)^{-1} \end{aligned} \quad [6]$$

ahol  $\Psi_{k,j}$  a  $\Phi_{n,j}$  diszkrét Radon transzformáltja  $f_j$  frekvencia és  $p_k$  hullámparaméter mellett, amelyet a

$$p_k = p_{\min} + k\Delta p$$

formula ad meg ( $\Delta p$  a hullámparaméter szerinti mintavételi távolság).

A fentiekhez hasonló módon kapjuk meg a diszkrétizált inverz Radon transzformáció formuláját:

$$\Phi'_{n_j} = f_j \sum_k \Psi_{k_j} \exp[-i2\pi f_j p_k x_n] \Delta p, \quad \text{ha } |f_j x_n| \leq (2\Delta p)^{-1},$$

$$= 0, \quad \text{ha } |f_j x_n| > (2\Delta p)^{-1} \quad [7]$$

Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy [7]-ben  $\Phi$  helyett  $\Phi'$ -t írtunk, mivel az [5]-ben szereplő sávkorlátozott sinc függvény alkalmazása miatt a diszkrétizált inverz Radon transzformáció csak közelítőleg állítja vissza a  $\Phi$  függvényt. Mivel azonban a szeizmikus gyakorlatban sávkorlátozott adatokat kell feldolgoznunk, a  $\Phi$  és  $\Phi'$  közötti különbség általában elhanyagolható.

A spektrumismétlődések elkerülése érdekében a  $\Delta x$  és  $\Delta p$  mintavételi távolságokat az alábbi összefüggéseknek megfelelően kell megválasztanunk:

$$\Delta p < \frac{1}{f_{\max} x_{\text{terjedelem}}}, \quad \Delta x \leq \frac{1}{f_{\max} p_{\text{terjedelem}}}, \quad [8a,b]$$

ahol  $f_{\max}$  a regisztrált hullámter által tartalmazott legnagyobb frekvencia,  $x_{\text{terjedelem}} = x_{\max} - x_{\min}$  és  $p_{\text{terjedelem}} = p_{\max} - p_{\min}$ . Helytelen mintavételi távolságok választása esetén az inverz  $\tau$ - $p$  transzformációval kapott szeizmikus szelvény nem létező eseményeket is tartalmaz. A problémakörrel részletesen foglalkozik TURNER [1990] tanulmánya.

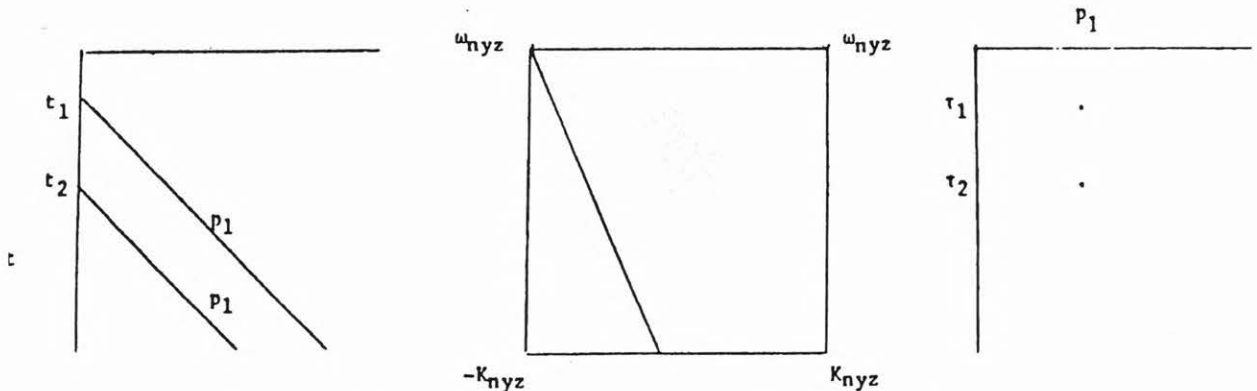
## A Radon transzformáció néhány alkalmazási lehetősége

Bár a szeizmikus adatok feldolgozását nagyrészt az  $x$ - $t$  tartományban hajtjuk végre, néhány speciális lépés mégis az  $x$ - $f$  és  $k$ - $f$  tartományokban történik. Ezért hasznos lehet annak vizsgálata, hogy néhány egyszerű, elemi szeizmikus esemény hogyan jelenik meg a különböző tartományokban.

Az 2a. ábrán két lineáris, azonos látszólagos sebességgel jellemezhető eseményt láthatunk. A  $k$ - $f$  tartományban a két esemény egyetlen egyenesként jelenik meg, azaz nem különíthető el egymástól (2b. ábra). A  $\tau$ - $p$  tartományban a két eseményt két különálló pont reprezentálja (2c. ábra): ugyanannál a  $p$  értéknél két, különböző  $\tau$ -hoz tartozó pont jelenik meg, lehetővé téve ezzel az események szétválasztását.

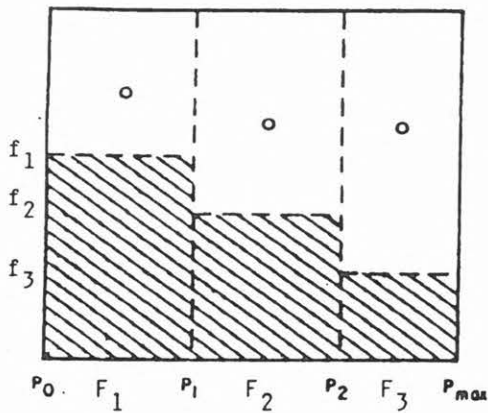
Az  $f$ - $p$  tartományban igen könnyen megvalósíthatóak a  $p$ -függő frekvenciaszűrők. Az ilyen szűrők alkalmazását szemlélteti a 3. ábra.  $F_1$ ,  $F_2$  és  $F_3$  a  $0$ - $p_1$ ,  $p_1$ - $p_2$  és  $p_2$ - $p_{\max}$  tartományokban alkalmazott ideális felülvágó szűrők  $f_1$ ,  $f_2$  és  $f_3$  vágási frekvenciákkal. A 3a. ábra az  $f$ - $p$ , a 3b. ábra pedig a  $k$ - $f$  tartományokban ábrázolja a szűrőket (a satírozott területek szemléltetik az áteresztési tartományt). Az ábrákról világosan leolvasható, hogy az ilyen speciális szűrők sokkal könnyebben tervezhetők és kivitelezhetők az  $f$ - $p$  tartományban, mint a  $k$ - $f$  tartományban. A feladat az  $x$ - $t$  tartományban is végrehajtható lenne, de ekkor kétdimenziós konvolúciós szűrőt kellene alkalmaznunk.

A jól ismert sebességszűrés művelete is könnyebben hajtható végre az  $f$ - $p$  vagy a  $\tau$ - $p$  tartományokban, mint a  $k$ - $f$  tartományban: a nem kívánt sebességintervallumnak megfelelő  $p$ -intervallumon belül egyszerűen kinullázzuk az adatokat. Ugyanez a feladat a  $k$ - $f$  tartományban ferde egyenesekkel határolt tartomány kiszűrését jelenti, amely technikailag kissé nehezebb feladat. Még egyszerűbb a szűrés eljárás, ha egy bizonyos  $p_{\max}$  maximális hullámparaméternél nagyobb  $p$ -vel jellemezhető események kiszűrését tűzzük ki célul (pl. csőhullámok, felszíni zavarhullámok eltávolítását). Ekkor az  $x$ - $t$  tartománybeli adatokat úgy transzformáljuk át a  $\tau$ - $p$  tartományba, hogy a figyelembe vett legnagyobb  $p$ -érték  $p_{\max}$  legyen, majd minden további művelet elvégzése nélkül visszatérünk az  $x$ - $t$  tartományba. Hasonlóan járhatunk el a VSP szelvényeken együtt megtalálható lefelé és felfelé haladó hullámok szétválasztásakor. Ha például csupán a felfelé haladó hullámteret szeretnénk megtartani, akkor a  $\tau$ - $p$  transzfor-

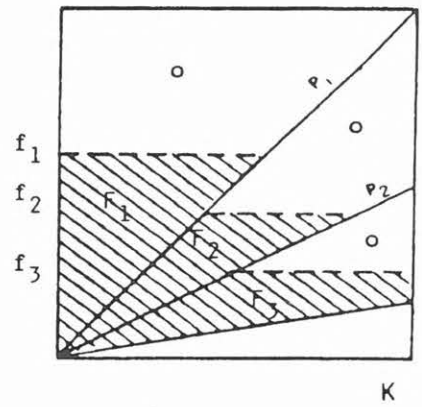


2. ábra. a) Két lineáris, azonos látszólagos sebességgel jellemezhető szeizmikus esemény.  
b) Az a) ábrán látható ideális szelvény  $k$ - $f$  transzformáltja.  
c) Az a) ábrán látható ideális szelvény  $\tau$ - $p$  transzformáltja.

Fig. 2. a) Two linear seismic events with the same apparent velocity.  
b) The  $k$ - $f$  transform of the ideal section.  
c) The  $\tau$ - $p$  transform of the ideal section.



- a -



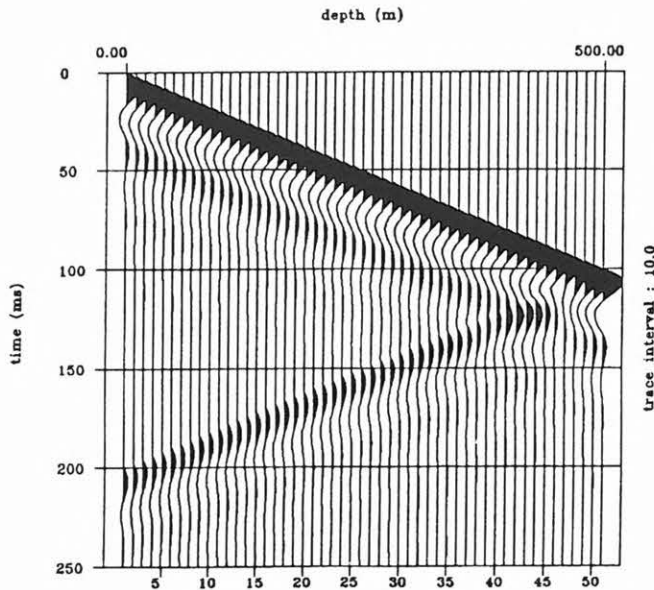
- b -

3. ábra.  $p$ -függő frekvenciaszűrők alkalmazása az  $f-p$  (a) és az  $f-k$  (b) tartományokban.

Fig. 3. Application of  $p$ -variant frequency filters in the  $f-p$  (a) and  $f-k$  (b) domains.

máltat csak negatív  $p$  értékekre határozzuk meg, majd az inverz transzformáció elvégzésével visszatérünk az  $x-t$  tartományba. A fenti néhány példa is illusztrálja, hogy a  $\tau-p$  transzformáció alkalmazása sok esetben könnyebbé teheti a kitűzött feladatok végrehajtását.

A 4. ábrán egy nagyon egyszerű, csak a direkthullámot és egy egyszeres reflexiót tartalmazó szintetikus nulloffszetes VSP szelvényt mutatunk be. A wavelet 30 Hz-es csillapodó szinuszhullám, a direkthullám és a reflexió látszólagos sebessége 5000, illetve -5000 m/s ( $p=0,2$  ms/m, illetve  $-0,2$  ms/m).



4. ábra. Direkthullámot és egyetlen reflexiót tartalmazó szintetikus nulloffszetes VSP szelvény.

Fig. 4. A synthetic zero-offset VSP containing the direct waves and a reflection.

### Példák a Radon transzformáció alkalmazására

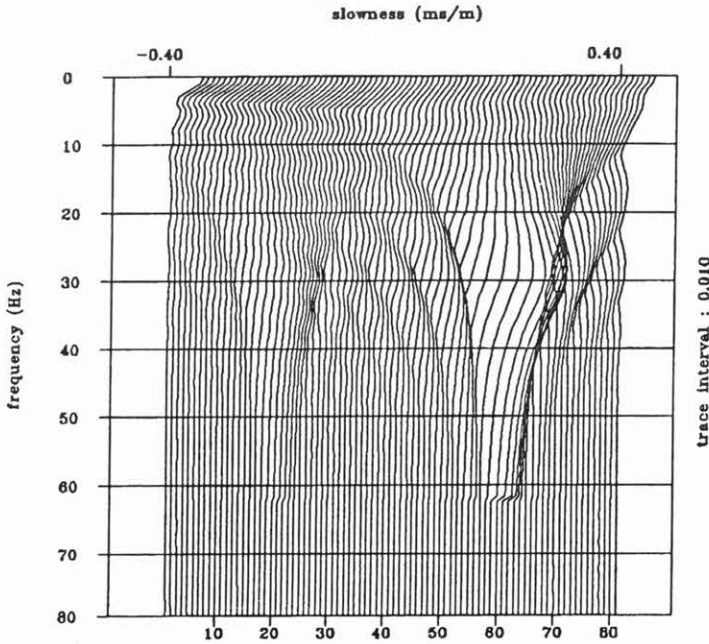
Az alábbiakban néhány egyszerű példán keresztül szemléltetjük a Radon transzformáció alkalmazását, valamint az  $f-p$  illetve  $\tau-p$  transzformált tulajdonságait, felhasználási lehetőségeit.

Ezen VSP szelvény  $f-p$  és  $\tau-p$  transzformáltjait a  $p_{min}=-0,4$  ms/m és  $p_{max}=0,4$  ms/m közötti hullámparaméter-tartományban számítottuk ki. A Fourier transzformáció végrehajtásához 512 pontos gyors digitális Fourier transzformációt (FFT) alkalmaztunk. A  $\Delta p$  mintavételi távolság nagyságát a [8a] összefüggésnek megfelelően kell megválasztanunk. Mivel esetünkben  $x_{terjedelem}=500$  m,  $f_{max}$  pedig bizto-

san nem haladja meg a 100 Hz-et,  $\Delta p$ -nek 0,02 ms/m-nél kisebbnek kell lennie. Mi a  $\Delta p = 0,01$  ms/m értéket választottuk. Természetesen a mérés végrehajtásakor is ügyelnünk kell a helyes térbeli mintavételezésre. Mivel esetünkben  $p_{terjedelem} = 0,8$  ms/m,

transzformációk eredménye nem lett volna megfelelő. A  $p_{min}$  és  $p_{max}$  paraméterek megválasztásakor ezt a jelenséget mindig figyelembe kell vennünk.

Amennyiben a  $\tau$ - $p$  transzformált  $p \geq 0$  felére alkalmazzuk csak az inverz transzformációt, az eredeti



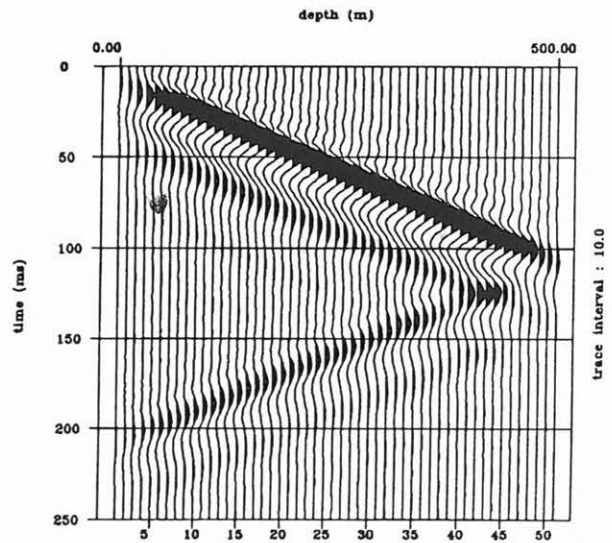
5. ábra. A 4. ábrán látható VSP szelvény  $f$ - $p$  amplitúdóspektruma. ( $|p_{min}| = |p_{max}| = 0,4$  ms/m,  $\Delta p = 0,01$  ms/m)

Fig. 5. The  $f$ - $p$  amplitude spectrum of the VSP shown in Fig. 4. ( $|p_{min}| = |p_{max}| = 0,4$  ms/m,  $\Delta p = 0,01$  ms/m)

[8b] szerint  $\Delta x$ -nek kisebbnek kell lennie 12,5 m-nél. Az alkalmazott 10 m-es csatornáköz megfelel ennek a követelménynek.

Az 5. ábrán a már bemutatott VSP szelvény  $f$ - $p$  amplitúdóspektrumát mutatjuk be, míg a 6. ábra az inverz transzformáció eredményét szemlélteti. A 7. ábrán a  $\tau$ - $p$  transzformáltat láthatjuk, a 8. ábra pedig ezen transzformált inverzét ábrázolja. A transzformáltakat bemutató ábrákon (különösen a 7. ábrán) jól láthatók a  $|p| = 0,2$  ms/m értékek környezetében jelentkező nagy amplitúdók, a 4., 6. és 8. ábrák összehasonlításával pedig megállapíthatjuk, hogy az oda-vissza transzformáció csak jelentéktelen torzulásokat okoz. (A szélső csatornák kis amplitúdóit a direkt transzformációt megelőzően alkalmazott Hanning ablak okozza, amelyre az ún. "edge effect"-ek kiküszöbölésére van szükség.)

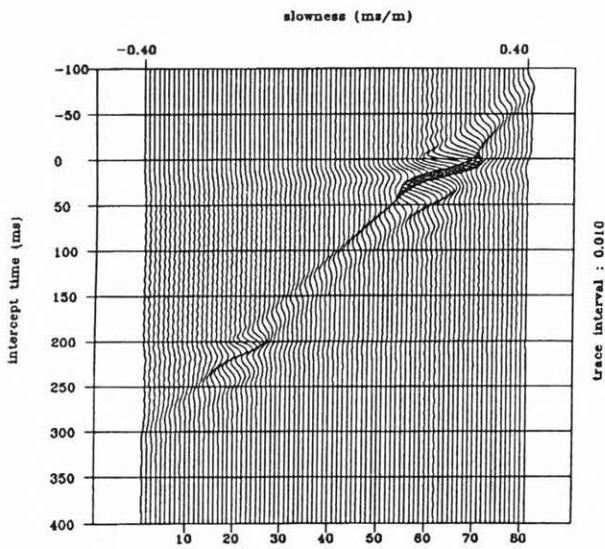
Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy bár az eredeti VSP szelvényen található direkthullám és reflexió látszólagos sebessége  $p = 0,2$  ms/m, illetve  $-0,2$  ms/m-nek felel meg, hiba lett volna az  $f$ - $p$ , illetve  $\tau$ - $p$  transzformáltakat csupán mondjuk  $p_{min} = -0,25$  ms/m és  $p_{max} = 0,25$  ms/m intervallumban kiszámítani, mivel a két szeizmikus esemény képe két pont helyett két, viszonylag nagy kiterjedésű folt, amelyek túlterjednek a  $|p| = 0,25$  ms/m értékeken, és így az inverz



6. ábra. Az 5. ábrán látható  $f$ - $p$  transzformált inverze.

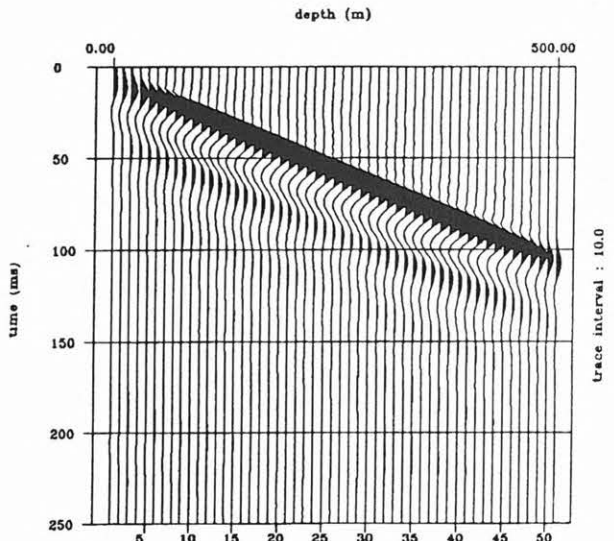
Fig. 6. The inverse of the  $f$ - $p$  spectrum shown in Fig. 5.





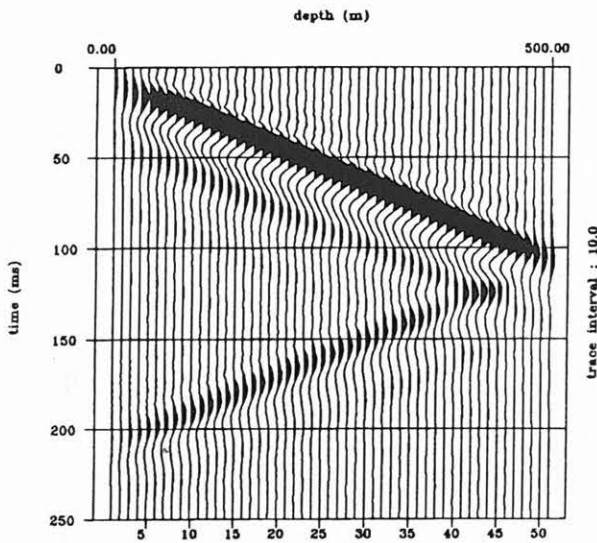
7. ábra. A 4. ábrán látható VSP szelvény  $\tau$ - $p$  transzformáltja 20 ( $|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0.4 \text{ ms/m}$ ,  $\Delta p = 0.01 \text{ ms/m}$ ).

Fig. 7. The  $\tau$ - $p$  transform of the VSP shown in Fig.4 ( $|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0.4 \text{ ms/m}$ ,  $\Delta p = 0.01 \text{ ms/m}$ ).



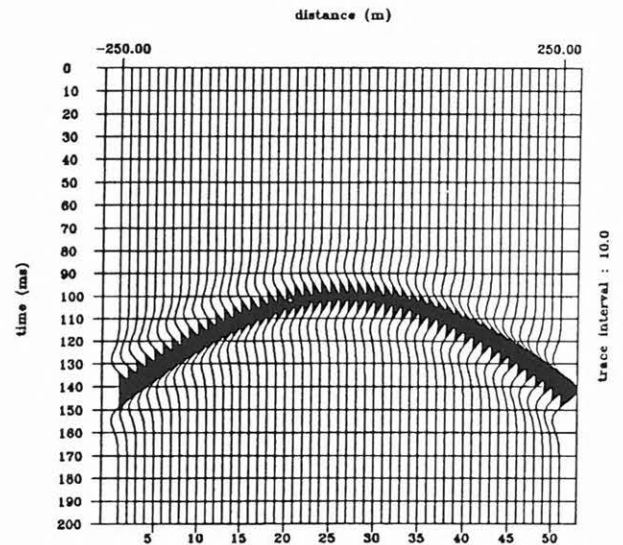
9. ábra. A 7. ábrán látható  $\tau$ - $p$  transzformált pozitív  $p$ -hez tartozó felének inverze, azaz a szétválasztott lefelé haladó hullámter.

Fig. 9. The inverse of the positive half plane of the  $\tau$ - $p$  transform shown in Fig. 7, i.e. the downgoing wavefield.



8. ábra. A 7. ábrán látható  $\tau$ - $p$  transzformált inverze.

Fig. 8. The inverse of the  $\tau$ - $p$  transform shown in Fig. 7.

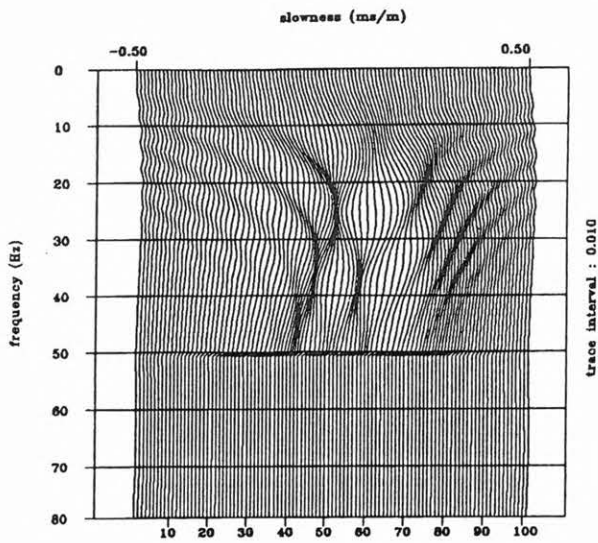


10. ábra. Egy szintetikus CRP szelvény.

Fig. 10. A synthetic CRP section.

VSP szelvények csak azon részét kapjuk vissza, amelyre a látszólagos sebesség pozitív, azaz ily módon kiszűrhetjük a felfelé haladó hullámokat (9. ábra). A  $\tau$ - $p$  transzformáció természetesen ennél bonyolultabb sebességszűrések végrehajtására is alkalmas, hiszen az eltávolítandó sebességintervallumok

a  $\tau$ - $p$  (és  $f$ - $p$ ) tartományban könnyen kijelölhetők. Második példánkban egy szintetikus CRP szelvény (10. ábra) mutatjuk be a Radon transzformáció alkalmazását. A transzformációhoz választott paraméterek:  $p_{\min} = -0,5 \text{ ms/m}$ ,  $p_{\max} = 0,5 \text{ ms/m}$ ,  $\Delta p = 0,01 \text{ ms/m}$  és ismét 512 pontos FFT-t alkalmaztunk. A 11. és 12.

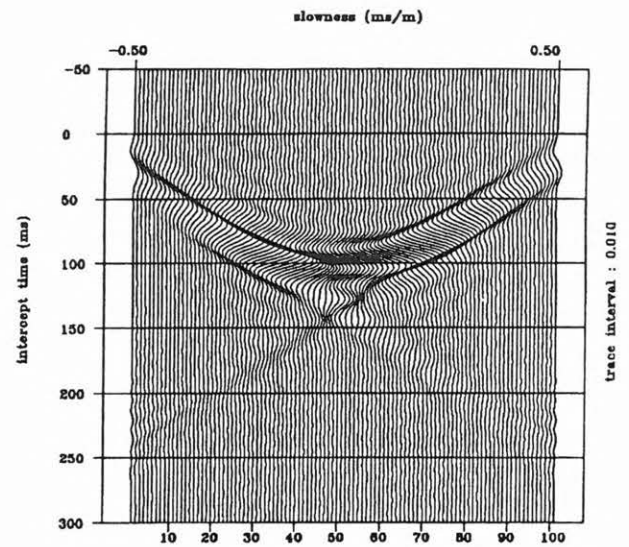


11. ábra. A 10. ábrán látható CRP szelvény  $f-p$  amplitúdóspektruma.  
 $(|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0,5 \text{ ms/m}, \Delta p = 0,01 \text{ ms/m})$

Fig. 11. The  $f-p$  amplitude spectrum of the CRP section shown in Fig. 10.  
 $(|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0.5 \text{ ms/m}, \Delta p = 0.01 \text{ ms/m})$

ábrákon az  $f-p$  amplitúdóspektrumot és annak inverzét, a 13. és 14. ábrákon pedig  $\tau-p$  transzformált és inverzét mutatjuk be.

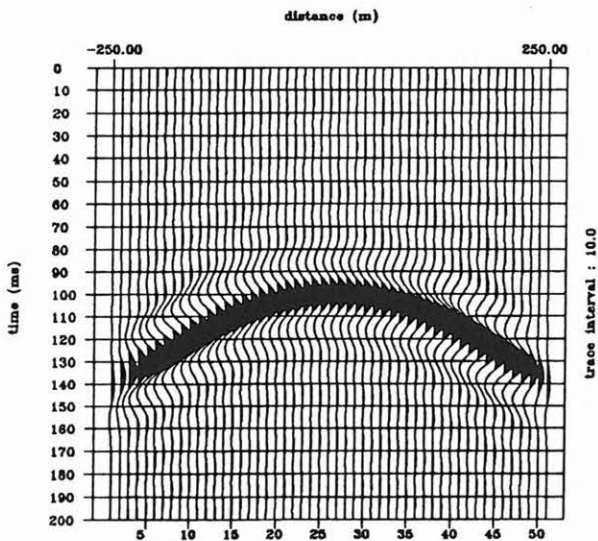
Mivel a feldolgozott CRP szelvény csupán egyetlen reflexiós hiperbolát tartalmaz, analitikusan is meghatározhatjuk ezen hiperbola  $\tau-p$  tartománybeli



13. ábra. A 10. ábrán látható CRP szelvény  $\tau-p$  transzformáltja.  
 $(|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0,5 \text{ ms/m}, \Delta p = 0,01 \text{ ms/m})$

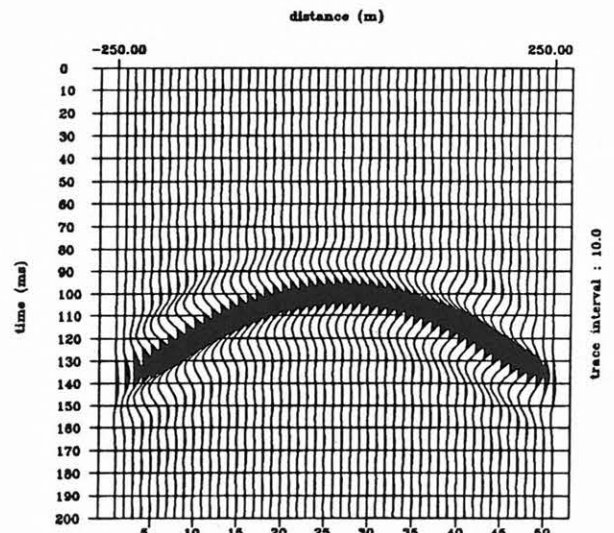
Fig. 13. The  $\tau-p$  transform of the CRP section shown in Fig. 10.  
 $(|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0.5 \text{ ms/m}, \Delta p = 0.01 \text{ ms/m})$

képét. Az eredmény azért is érdekes lehet számunkra, mert — előző példánkkal ellentétben — a feldolgozó szelvény által tartalmazott szeizmikus esemény látszólagos sebessége most pontról pontra változik.



12. ábra. A 11. ábrán látható  $f-p$  transzformált inverze.

Fig. 12.: The inverse of the  $f-p$  spectrum shown in Fig. 11.



14. ábra. A 13. ábrán látható  $\tau-p$  transzformált inverze.

Fig. 14. The inverse of the  $\tau-p$  transform shown in Fig. 13.

## A reflexiós hiperbola menetidőgörbéje

$$t = \frac{2}{v} (h^2 + x^2)^{1/2},$$

ahol  $v$  a vízszintes reflektáló réteghatár feletti hullámterjedési sebesség,  $h$  a reflektáló felület mélysége és  $x$  a CRP-től számított távolság. A fenti kifejezésből következik, hogy

$$p = \frac{dt}{dx} = \frac{2x}{v(x^2 + h^2)^{1/2}},$$

amelyből

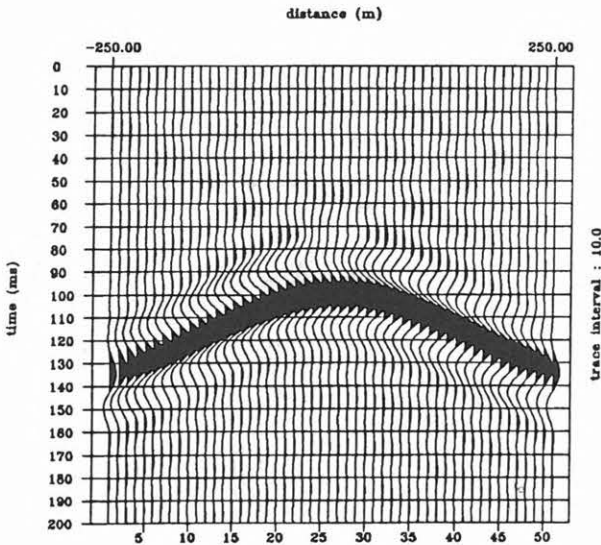
$$x = \frac{pvh}{(4 - p^2 v^2)^{1/2}}.$$

$x$  és  $t$  értékét behelyettesítve a  $t = \tau + px$  összefüggésbe kapjuk, hogy

$$\tau = h \left[ (v/2)^2 - p^2 \right]^{1/2},$$

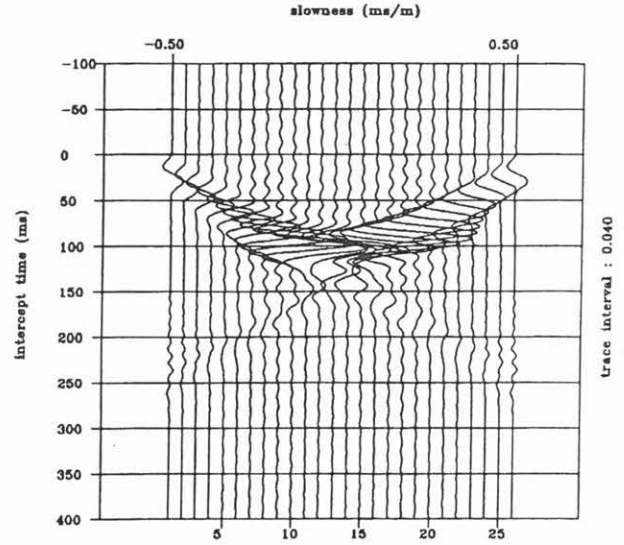
amely egy ellipszis egyenlete a  $\tau$ - $p$  tartományban. Mivel  $\tau$  csak pozitív értékeket vesz fel, a teljes hiperbola ág transzformálja az ellipszis fele ( $\tau \geq 0$ ). A 13. ábrán ennek a féllipszisnek egy részét láthatjuk. Az ábrák azt a korábbi észrevételünket is alátámasztják, hogy az oda-vissza transzformáció csak jelentéktelen torzulásokat okoz.

Ezzel a példával kapcsolatban az alábbiakban bemutatjuk, milyen torzulásokat, hibákat okoz a helytelen paraméterválasztás. Ha például  $p_{min}$  és  $p_{max}$  értékét  $-0,5$  ms/m, illetve  $0,5$  ms/m helyett csupán  $-0,3$  ms/m, illetve  $0,3$  ms/m értékeknek választjuk, akkor az inverz transzformáció után nem kapjuk vissza az eredeti CRP szelvényen látható hiperbolát:



15. ábra. A 10. ábrán látható CRP szelvény  $\tau$ - $p$  transzformáltjának inverze. ( $|p_{min}| = |p_{max}| = 0,3$  ms/m,  $\Delta p = 0,01$  ms/m)

Fig. 15. The inverse of the  $\tau$ - $p$  transform of the CRP section shown in Fig. 10. ( $|p_{min}| = |p_{max}| = 0.3$  ms/m,  $\Delta p = 0.01$  ms/m)



16. ábra. A 10. ábrán látható CRP szelvény  $\tau$ - $p$  transzformáltja. ( $|p_{min}| = |p_{max}| = 0,5$  ms/m,  $\Delta p = 0,04$  ms/m)

Fig. 16. The  $\tau$ - $p$  transform of the CRP section shown in Fig. 10. ( $|p_{min}| = |p_{max}| = 0.5$  ms/m,  $\Delta p = 0.04$  ms/m)

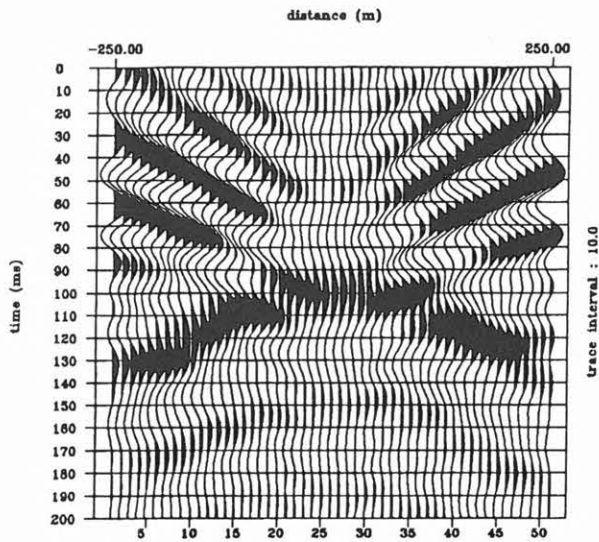
szelein a beérkezések sorozata által kirajzolódó menetidőgörbe kissé "visszafordul" (15. ábra). Ennek nyilván az az oka, hogy a szelvény széleire jellemző  $|p| > 0,3$  ms/m-rel jellemezhető eseményeket nem képeztük le.

Az előbbieknél még komolyabb hibákat, torzulásokat tapasztalhatunk, ha nem tartjuk be a [8a,b] mintavételi törvényeket. Ha a direkt transzformációt  $\Delta p = 0,01$  ms/m helyett  $\Delta p = 0,04$  ms/m mintavételezéssel hajtjuk végre, a 16. ábrán bemutatott  $\tau$ - $p$  transzformáltat kapjuk. Ennek az alulmintavételezett  $\tau$ - $p$  transzformálnak az inverze (17. ábra) alig emlékeztet az eredeti CRP szelvényre: a hiperbola erősen torzított alakja még felismerhető, de a spektrumisméltódségből adódó zajok amplitúdója elfogadhatatlanul nagy, hiszen összemérhető a hasznos jel amplitúdójával.

Az utóbbi két példa meggyőzően bizonyítja a helyes paraméterválasztás fontosságát.

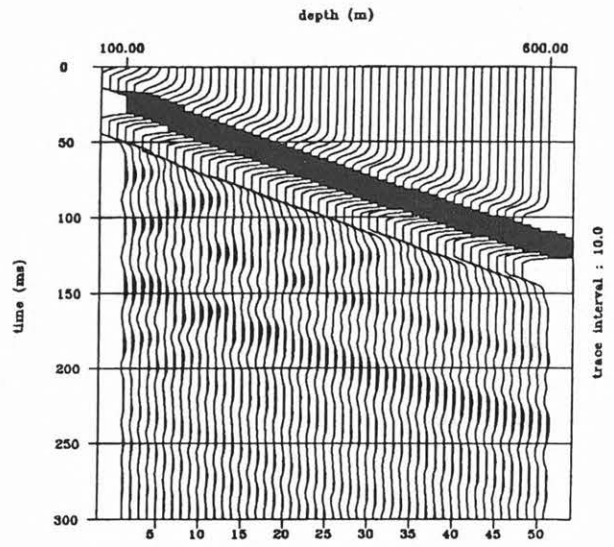
Utolsó példánkban viszonylag bonyolult VSP szelvényen elvégzett hullámtér-szétválasztást mutatunk be. A feldolgozandó szintetikus VSP szelvényt a 18. ábrán mutatjuk be. A  $\tau$ - $p$  transzformációhoz használt paraméterek:  $p_{min} = -0,5$  ms/m,  $p_{max} = 0,5$  ms/m,  $\Delta p = 0,005$  ms/m és 512 pontos FFT.

A teljes  $\tau$ - $p$  transzformáltat a 19. ábra szemlélteti, a felfelé haladó hullámokat a 20. ábrán láthatjuk. A szétválasztás minősége kívánni valót hagy maga után a nagy amplitúdójú direkthullámok zavaró hatása miatt.



17. ábra. A 16. ábrán látható  $\tau$ - $p$  transzformált inverze.

Fig. 17. The inverse of the  $\tau$ - $p$  transform shown in Fig. 16.

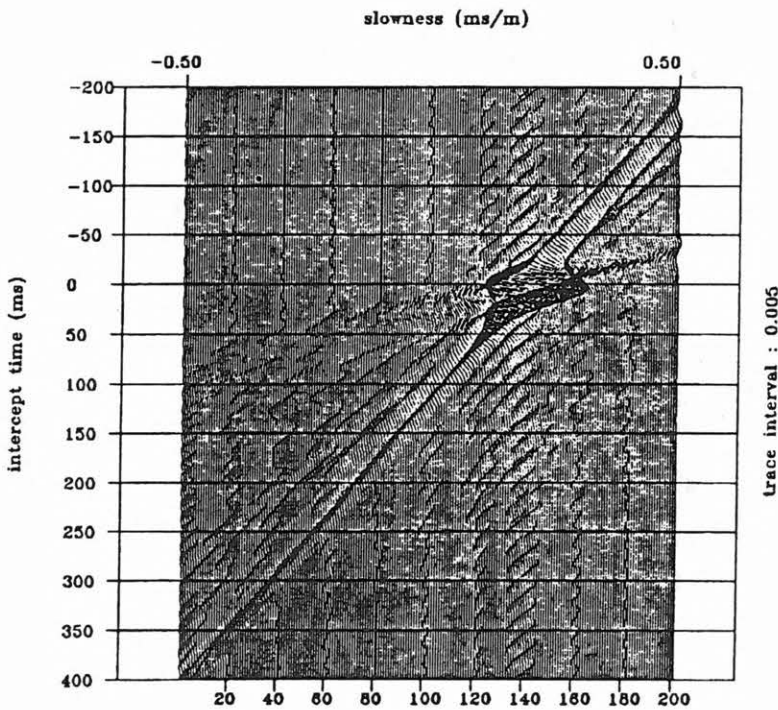


18. ábra. Számos lefelé és felfelé haladó hullámot tartalmazó szintetikus VSP szelvény.

Fig. 18. A synthetic VSP with several upgoing and downgoing waves.

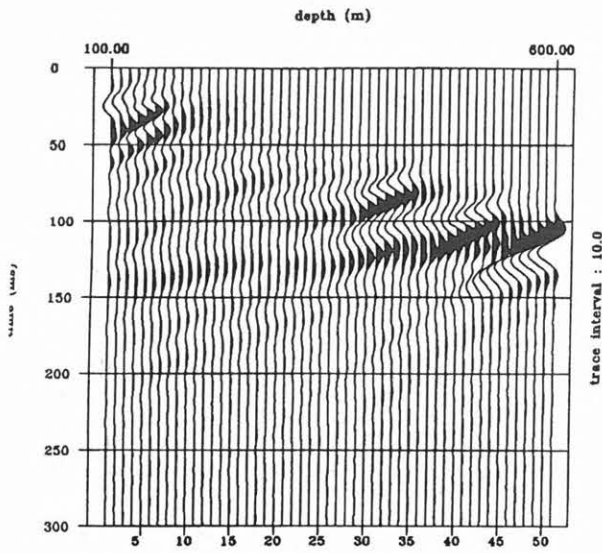
Ha a feldolgozandó VSP szelvényen valamilyen módon lecsillapítjuk a direkthullámokat (21. ábra), a  $\tau$ - $p$  transzformáltat nem zavarják az első beérkezé-

sek nagy amplitúdói, és a felfelé, illetve lefelé haladó hullámoknak megfelelő spektrumrészek jól felismerhetők és elkülöníthetők (22. ábra). Ennek meg-



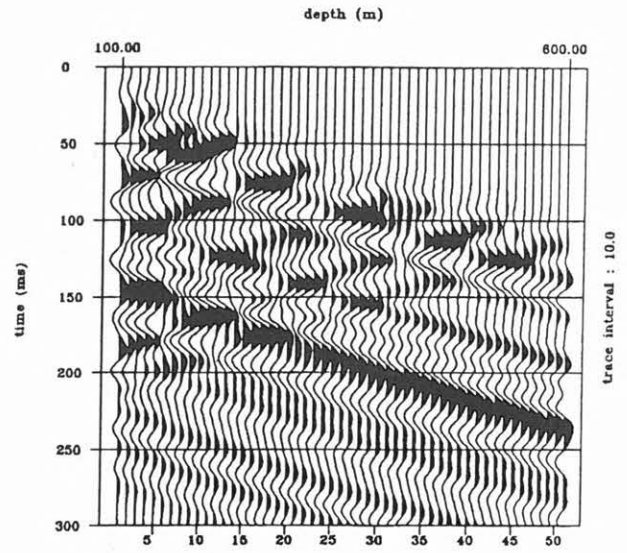
19. ábra. A 18. ábrán látható VSP szelvény  $\tau$ - $p$  transzformáltja. ( $|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0,5 \text{ ms/m}$ ,  $\Delta p = 0,005 \text{ ms/m}$ )

Fig. 19. The  $\tau$ - $p$  transform of the VSP shown in Fig. 18. ( $|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0.5 \text{ ms/m}$ ,  $\Delta p = 0.005 \text{ ms/m}$ )



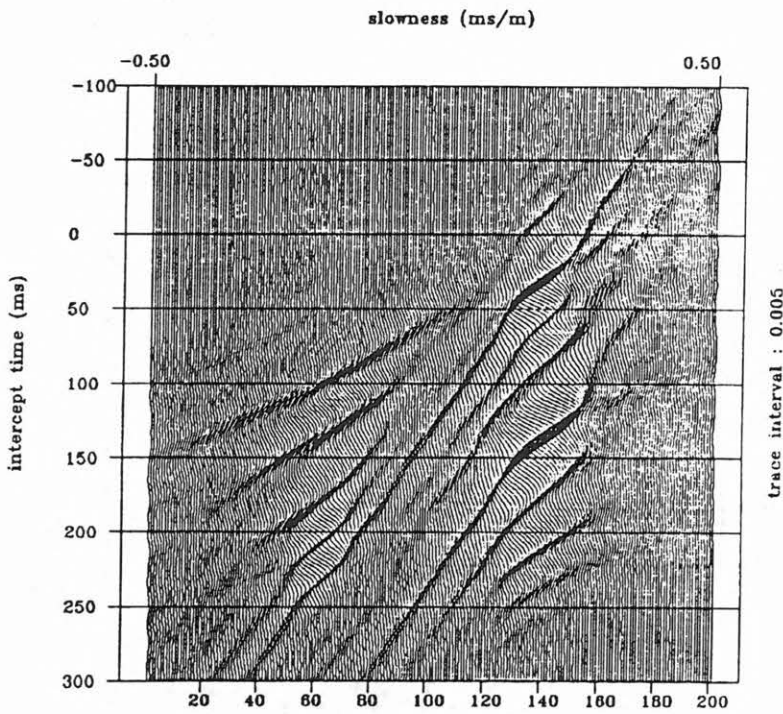
20. ábra. A 19. ábrán bemutatott  $\tau$ - $p$  transzformált alapján szétválasztott felfelé haladó hullámter.

Fig. 20. Upgoing wavefield separated by using the  $\tau$ - $p$  transform shown in Fig. 19.



21. ábra. A 18. ábrán látható VSP szelvény a direkthullám eltávolítása után.

Fig. 21. The VSP section shown in Fig. 18. after the muting of the direct waves.



22. ábra. A 21. ábrán látható VSP szelvény  $\tau$ - $p$  transzformáltja ( $|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0,5 \text{ ms/m}$ ,  $\Delta p = 0,005 \text{ ms/m}$ ).

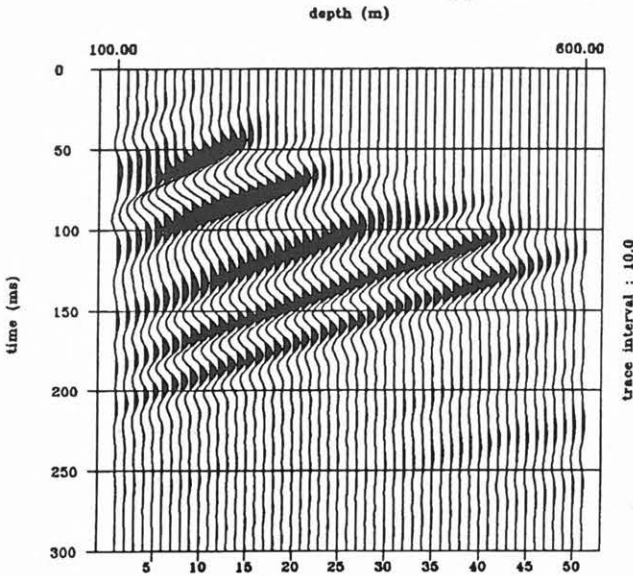
Fig. 22. The  $\tau$ - $p$  transform of the VSP shown in Fig. 21. ( $|p_{\min}| = |p_{\max}| = 0.5 \text{ ms/m}$ ,  $\Delta p = 0.005 \text{ ms/m}$ ).

felelően a negatív  $p$  tartomány visszatranszformálásával már jó minőségű szétválasztott felfelé haladó hullámokat kapunk (23. ábra). VSP szelvények feldolgozásakor tehát célszerű úgy eljárunk, hogy a  $\tau$ - $p$  transzformáció elvégzése előtt vagy erősen lecsillapítjuk a direkthullámokat, vagy amplitúdókiegyenlítéssel megközelítőleg azonos energiaszintre hozzuk a különböző szeizmikus beérkezéseket.

proach of the  $\tau$ - $p$  transform: some applications in seismic data processing; *Geophysical Prospecting* 35, pp. 517-538.

DIETRICH, M., 1990: An algorithm for the plane-wave decomposition of point-source seismograms; *Geophysics* 55, pp.1380-1385.

DURRANI, T. S. and BISSET, D., 1984: The Radon transform and its properties; *Geophysics* 49, pp.1180-1187.



23. ábra. A 22. ábrán bemutatott  $\tau$ - $p$  transzformált alapján szétválasztott felfelé haladó hullámter.

Fig. 23. Upgoing wavefield separated by using the  $\tau$ - $p$  transform shown in Fig. 22.

## Összefoglalás

Jelen dolgozatban a Radon transzformáció tulajdonságait és alkalmazási lehetőségeit tárgyaltuk.

Ismertettünk egy, az ELTE Geofizika Tanszéken elkészített  $\tau$ - $p$  transzformáció digitálisan megvalósító algoritmust, majd összefoglaltuk a transzformáció legfontosabb tulajdonságait. Szintetikus példákon keresztül illusztráltuk a transzformáció alkalmazásait, különös hangsúlyt fektetve a transzformációs paraméterek és a mintavételi távolságok megválasztására, valamint a lefelé és felfelé haladó hullámterek szétválasztására.

## Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönettel tartozik a Geofizikai Kutató Vállalatnak a kutatások finanszírozásáért és a tanulmány közzétételéhez való hozzájárulásukért.

## IRODALOM

BENOLIEL, S. D., SCHNEIDER, W. A. and SHURTLIFF, R. N. 1987: Frequency wavenumber ap-

HANEVELD, C. J. and HERMAN, G. C., 1990: A fast algorithm for the computation of Radon transforms; *Geophysical Prospecting* 38, pp. 853-860.

HU, L. Z. and MCMECHAN, G. A., 1987: Wave-field transformations of vertical seismic profiles; *Geophysics* 52, pp. 307-321.

MARTINEZ, R. D. and MCMECHAN, G. A., 1987: Analysis of absorption and dispersion effects in synthetic  $\tau$ - $p$  seismograms; *Geophysics* 52, pp. 1033-1047.

RADON, J., 1917: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten; *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften* 69, pp. 262-277.

STOFFA, P. L., BUHL, P., DIEBOLD, J. B. and WENZEL, F., 1981: Direct mapping of seismic data to the domain of intercept time and ray parameter — A plane-wave decomposition; *Geophysics* 46, pp. 255-267.

TREITEL, S., GUTOWSKI, P. and WAGNER, D., 1982: Plane-wave decomposition of seismograms; *Geophysics* 47, pp. 1375-1401.

TURNER, G., 1990: Aliasing in the tau- $p$  transform and the removal of spatially aliased coherent noise; *Geophysics* 55, pp. 1496-1503.