A földmágnesség horizontális irányító képességére vonatkozó Eötvös–féle vizsgálatokról

MÁRTON PÉTER [1]

Eötvös görbületi variométere a nehézségi erőtér horizontális irányító képességének vagy más szóval, a nívófelület görbületi eltérésének mérésére szolgál. Eötvös a földmágneses tér horizontális irányító képességének mérését is megoldotta, amikor létrehozta az ún. asztatikus (mágneses) variométert, amelynek elméletét teljes korrektséggel ugyan, de még saját mércéjével mérve is rendkívül tömören ismertette. Ezt a tömörséget feloldandó az eredeti dolgozatban [1] olvasható állítások itt részletes indoklásra kerülnek. Ezután — minthogy a horizontális irányító képesség a mágneses esetben nem nívófelületi jellemző — megmutatjuk, hogy a nívófelületi jellemzők az Eötvös mágneses eszközeivel mérhető mennyiségekből, a térerősség vektor ismeretében meghatározhatók. Végül a mágneses irányító erő globális eloszlására vonatkozó Eötvös–féle számítások módszerét és eredményeit ismertetjük.

The horizontal directive tendency (H. D. T.) of the geomagnetic field can be determined with an astatic magnetic variometer designed by L. Eötvös for this purpose [1]. His description of the principles of the instrument is repeated here in a more detailed manner. Further we show the relationship of the H. D. T. and the field gradients with the quantities characteristic of the equipotential surfaces of the geomagnetic field. Finally we explain how Eötvös computed the global distribution of the H. D. T. from the field model of A. Schmidt for the epoch 1885.

Bevezetés

A magyar geofizikusok előtt jól ismertek Eötvös Lorándnak a nehézségi erő nívófelületeire és az erő változására vonatkozó vizsgálatai. Az idők folyamán ezek több-kevesebb részletességgel az egyetemi tananyag részét képezték, az Eötvös ingával való mérés pedig ma is állandó témája a geofizikus laboratóriumi gyakorlatoknak. Úgy tűnik viszont, hogy Eötvös hasonló irányú vizsgálatai a földmágnességi erőre vonatkozólag mintha lassan feledésbe merültek volna, amelynek egyik oka talán az, hogy Eötvös mágneses műszereivel rendszeres terepi méréseket soha nem folytattak, a másik pedig az lehet, hogy működő mágneses eszköz már régóta nem áll rendelkezésre. Ennek ellenére a transzlatométer [1], amelyet Eötvös eredetileg a $\partial X/\partial x$, $\partial X/\partial z$, $\partial Y/\partial x$ és $\partial Y/\partial z$ (szokásos jelölések) gradienskomponensek lemérésére konstruált még hosszú ideig használatban maradt a Geofizikai Intézetben.

Maga Eötvös különféle anyagok mágneses tulajdonságait (remanencia, szuszceptibilitás) vizsgálva, számtalan mérést hajtott végre a transzlatométerrel.

A transzlatométer részletes leírása megtalálható Eötvös eredeti közleményében [1], arra vonatkozólag pedig, hogy miképpen történt a mágneses rezonancia és szuszceptibilitás mérése, Haáz István Béla kimerítő részletességű dolgozatára utalunk [2].

Eötvös második, a transzlatométert mintegy kiegészítő mágneses eszköze, az asztatikus variométer, amely a $\partial Y/\partial y - \partial X/\partial x$, illetve $\partial X/\partial y + \partial Y/\partial x$ mennyiségeket méri [1]. Ezek a mágneses tér "horizontális irányító erejének összetevői", illetve a horizontális irányító képesség jellemzői. E képesség tanulmányozására Eötvös nemcsak eszközt hozott létre, hanem — amint azt Fekete Jenő megemlékezéséből [3] tudjuk — különféle számításokat is végzett. Ezek nagy része azonban nem került nyilvánosságra.

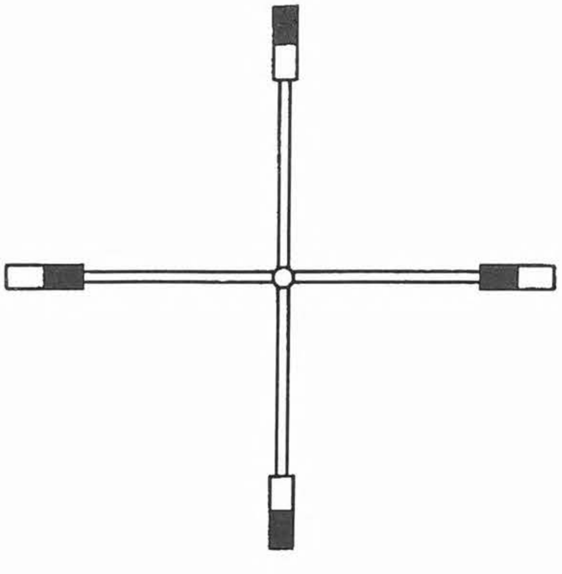
A közelmúltban Eötvös archeomágneses mérései után keresgélve egy vaskos, kézzel írott számolólapokból álló köteget találtam, amelynek borítóján ez áll: "A földgömbre számított mágneses irányító erők". Egyrészt ez a lelet, másrészt az asztatikus variométerre vonatkozó eredeti jelentés [1] túlzott tömörsége indokolja, hogy a mágneses tér horizontális irányító képességének méréséről, az irányító képesség és a nívófelület görbületének kapcsolatáról és végül az irányító képesség számolással történő meghatározásáról egy kevésbé tömör összefoglalás készüljön.

A horizontális irányító képesség mérése

Az Eötvös féle asztatikus variométer finom torziószálon függő könnyű alumínium csövekből összeállított vízszintes kereszt, amelynek végein négy, lehetőleg egymást asztatizáló mágnes van. A kereszt egyik rúdján a mágnesek É-i pólusaikkal kifelé, a rá merőleges rúdon pedig É-i pólusaikkal befelé állnak (*1. ábra*). Finomabb asztatizálásra a rúdra helyezhető kis segédmágnesek szolgálnak. Az elrendezést vasmentes szekrény védi, amely a torziószállal megegyező függőleges tengely körül tetszőlegesen elforgatható.

Eötvös görbületi variométerének elméletéből következik, hogy az asztatikus variométer a keresztalakú elrendezés miatt a nehézségi erő változásaira teljesen érzéketlen. Eötvös szerint "az asztatikus tűpárnak a földi mágneses erő inductiója olyan forgásmomentumot ad, amely $C \sin 2\alpha$ alakban állítható elő, s így két egymásra merőleges tűpárra:

[1] ELTE Geofizikai Tanszék, Budapest



1. ábra. Az asztatikus variométer lengője felülnézetben.
Fig. 1. The sensitive unit of the astatic variometer.

$$C\sin 2\alpha + C\sin 2(\alpha + \pi/2) = 0. \qquad (1)$$

E szerint a keresztalakú szerkezet forgásmomentumának kiszámításánál csak a mágneses erőt kell tekintetbe vennünk, s annak hatását olymódon állapíthatjuk meg, mintha a mágnesek inductiótól mentek, azaz állandók volnának" [1].

Tegyük fel, hogy az egyik, É-i végével kifelé mutató mágnes tengelyének iránya α szöget zár be, a horizontális intenzitás irányával (x-irány). Bontsuk fel a mágnes momentumát egy ($m_{\parallel}$) tengelyirányú és egy ($m_{\perp}$) rá merőleges komponensre:

$$m_{\parallel} = M_0 + C_1 H \cos\alpha$$
$$m_{\perp} = C_2 H \sin\alpha$$

ahol M_0 a mágnes permanens momentuma, H a horizontális értéke, továbbá

$$C_1 = \frac{\kappa V}{1 + N_{\parallel}\kappa} \text{ (=áll.), illetve } C_2 = \frac{\kappa V}{1 + N_{\perp}\kappa} \text{ (=áll.),}$$

ahol κ a mágnesvas szuszceptibilitása, V a térfogata és $N_{\parallel}$ a tengelyirányú, $N_{\perp}$ pedig a rá merőleges irányban érvényes lemágnesezési tényező. Az x és y irányú momentumkomponensek a következők:

$$m_x = m_{\parallel} \cos\alpha + m_{\perp} \sin\alpha\,,$$
$$m_y = m_{\parallel} \cos\alpha - m_{\perp} \sin\alpha\,,$$

úgyhogy H forgatónyomatéka a mágnesre (amely azonosan egyenlő a függőlegesen lefelé irányuló nyomatékkomponenssel),

$$F^{(1)} = -m_y H =$$
$$= -[(M_0 + C_1 H \cos\alpha)\sin\alpha - C_2 H \sin\alpha \cos\alpha] H =$$
$$= -M_0 H \sin\alpha - C \sin 2\alpha\,,$$

ahol

$$C = \frac{1}{2}(C_1 - C_2) H^2 \quad \text{(=áll.).}$$

Az ($\alpha + \pi/2$) irányban fekvő mágnes momentuma befelé mutat, azaz

$$m_{\parallel} = M_0 + C_1 H \sin\alpha\,,$$
$$m_{\perp} = C_2 H \cos\alpha\,,$$

és miután most

$$m_x = m_{\parallel} \sin\alpha + m_{\perp} \cos\alpha\,,$$
$$m_y = m_{\parallel} \cos\alpha + m_{\perp} \sin\alpha\,,$$

ezért

$$F^{(2)} = -m_y H =$$
$$= -[-(M_0 + C_1 H \sin\alpha)\cos\alpha + C_1 H \cos\alpha \sin\alpha] H =$$
$$= M_0 H \cos\alpha + C \sin 2\alpha\,,$$

tehát

$$F^{(1)} + F^{(2)} = -M_0 H \sin\alpha + M_0 H \cos\alpha$$

valóban mentes az indukált momentumok hatásától. Hasonlóan kapható, hogy az ($\alpha + \pi$), illetve ($\alpha + 3\pi/2$) irányban fekvő mágnesek esetén

$$F^{(3)} = M_0 H \sin\alpha - C \sin 2\alpha\,,$$

illetve

$$F^{(4)} = -M_0 H \cos\alpha - C \sin 2\alpha\,,$$

és így egyrészt

$$F^{(3)} + F^{(4)} = M_0 H \sin\alpha - M_0 H \cos\alpha\,,$$

másrészt

$$F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + F^{(4)} = 0\,,$$

tehát teljesen asztatizált keresztre a homogén H tér nem fejt ki forgatónyomatékot.

Inhomogén térben az indukciómentes, É-i pólusával kifelé mutató és az x-tengellyel ($X_0 \equiv H$ iránya az origóban) α szöget bezáró M momentumú mágnesre ható forgatónyomaték,

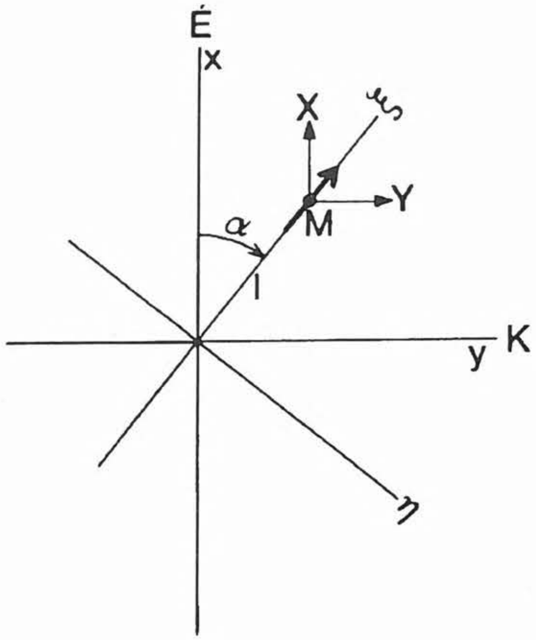
$$F = -H M \sin\alpha + M l \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) \sin 2\alpha + M l\, 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha\,, \qquad (2)$$

amelyet Eötvös [1]-ben levezetés nélkül közöl. Itt l a mágnes középpontjának távolsága az origótól, V pedig a mágneses tér potenciálja.

Az origó kis környezetében a $H(X,Y)$ mágneses tér kellő pontossággal leírható Taylor sora nulla-, és elsőrendű tagjainak összegével, *(2. ábra):*

$$X = X_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 y = X_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\right)_0 y$$
$$Y = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 y = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 y \qquad (3)$$

($Y_0 \equiv 0$, mert az x-tengelyt a mágneses meridiánban É-felé irányítjuk). Az (x, y) pontban lévő M momen-



2. ábra.
Fig. 2.

tumú mágnesre ható T forgatónyomaték vertikális (jobbra forgató) komponense:

$$T_z = M_x\, Y - M_y\, X\,.$$

De

$$M_x = M\cos\alpha\ , \quad M_y = M\sin\alpha\ ,$$

továbbá — a mágnessel együtt forgó rendszerre áttérve —

$$x = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha$$
$$y = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha$$

írható, vagyis

$$T_z = M\cos\alpha\left[\frac{\partial Y}{\partial x}(\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha) + \frac{\partial Y}{\partial y}(\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha)\right] -$$

$$- M\sin\alpha\left[X_0 + \frac{\partial X}{\partial x}(\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha) + \frac{\partial X}{\partial y}(\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha)\right],$$

amely (3)-at felhasználva így alakul:

$$T_z = -M\, X_0\sin\alpha + \frac{1}{2} M\,\xi\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha +$$

$$+ M\,\eta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sin^2\alpha\right) +$$

$$+ M\,\xi\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\cos^2\alpha - \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\sin^2\alpha\right) -$$

$$-\frac{1}{2} M\,\eta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\right)\sin 2\alpha\,.$$

Minthogy

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}$$

és a mágnes helyén $\xi = 1$ és $\eta = 0$, ezért

$$T_z = -M\, X_0\sin\alpha + \frac{1}{2} M\, l\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha + + M\, l\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\cos 2\alpha \qquad (4)$$

lesz a homogén térben ható forgatónyomaték végső alakja. A tér inhomogenitása azonban ugyanerre a mágnesre egy

$$P = (M\ \mathrm{grad}\ )\ H$$

eltolási erő hat, amelynek szintén van forgatónyomatéka. A jobbra forgató nyomatékkomponens:

$$T'_z = P_y x - P_x y = \left(M_x\frac{\partial Y}{\partial x} + M_y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)x -$$

$$-\left(M_x\frac{\partial X}{\partial x} + M_y\frac{\partial X}{\partial y}\right)y\,,$$

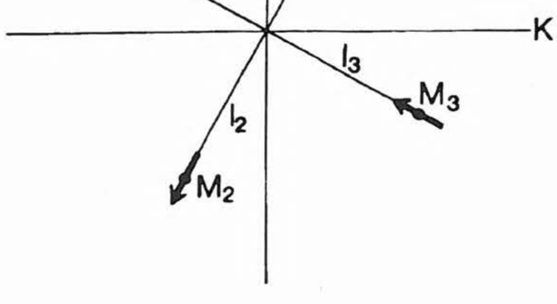
amely a fent követett úton

$$T'_z = \frac{1}{2} M\, l\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha + M\, l\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\cos 2\alpha \qquad (5)$$

formára hozható. (4) és (5) összege az Eötvös által megadott (2) képletet szolgáltatja, azaz

$$F = T_z + T'_z$$

Tekintsük most a *3. ábrán* látható négy mágnest a megadott elrendezésben. (A mágnesek momentumai és középpontjaik origótól mért távolságai is jó közelítéssel azonosak). Kiszámítottuk, hogy M_1-re



3. ábra.
Fig. 3.

$$F_1 = -M_1X_0\sin\alpha + M_1l_1\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right)\sin2\alpha + $$
$$+ M_1l_1\,2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\cos2\alpha$$

forgatónyomaték hat. Minthogy M_2 -re a szög $(\alpha + \pi)$, ezért

$$F_2 = M_2X_0\sin\alpha + M_2l_2\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right)\sin2\alpha + $$
$$+ M_2l_2\,2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\cos2\alpha\,.$$

Továbbá, miután M_3 és M_4 esetén a momentumok negatív előjelet kapnak és a szögek $(\alpha + \pi/2)$ és $(\alpha - \pi/2)$ értékűek, ezért

$$F_3 = M_3X_0\cos\alpha + M_3l_3\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right)\sin2\alpha + $$
$$+ M_3l_3\,2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\cos2\alpha\,,$$

és

$$F_4 = -M_4X_0\cos\alpha + M_4l_4\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right)\sin2\alpha + $$
$$+ M_4l_4\,2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\cos2\alpha\,.$$

Ezek F eredője

$$F = -X_0\left[(M_1-M_2)\sin\alpha - (M_3-M_4)\cos\alpha\right] + $$
$$+ (M_1l_1 + M_2l_2 + M_3l_3 + M_4l_4)\left[\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right)\sin2\alpha + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\cos2\alpha\right]$$

lesz, amit tovább alakíthatunk, ha bevezetjük a rendszer kompenzálatlanságából származó

$$\mu = \left[(M_1-M_2)^2 + (M_3-M_4)^2\right]^{1/2}$$

kicsiny mágneses momentumot, illetve azt az egyébként ismeretlen γ szöget, amelyre

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{M_1 - M_2}{[-(M_3-M_4)]}\,.$$

Ekkor az eredő forgatónyomaték így írható:

$$F = -\mu X_0\sin(\alpha+\gamma) + 4Ml\left\{\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right)\sin2\alpha + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\cos2\alpha\right\}, \tag{6}$$

ahol a $4Ml = M_1l_1 + M_2l_2 + M_3l_3 + M_4l_4$ jelölést alkalmaztuk. Egyensúlyi helyzetben

$$F = \tau\theta\,,$$

ahol θ a felfüggesztő szál elcsavarodása, τ pedig a szál direkciós forgatónyomatéka.

A mérendő $\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right)$ és $2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}$ mennyiségeken kívűl ismeretlenek még μ, γ és a szál torziómentes állapotához tartozó θ' szög, vagyis minimálisan öt különböző α értéket kell beállítani, illetve a megfelelő θ elcsavarodásokat leolvasni.

Eötvös nyomán [1] tekintsük a következő eseteket:

$$\alpha = 0 \qquad \tau\theta_0 = -\mu X_0\sin\gamma + 8Ml\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\,,$$

$$\alpha = \pi \qquad \tau\theta_\pi = \mu X_0\sin\gamma + 8Ml\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\,,$$

$$\alpha = \pi/4 \qquad \tau\theta_{\pi/4} = -\mu X_0\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\gamma + \sin\gamma) + $$
$$+ 4Ml\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right),$$

$$\alpha = 3\pi/4 \qquad \tau\theta_{3\pi/4} = -\mu X_0\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\gamma - \sin\gamma) - $$
$$- 4Ml\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right).$$

Az első kettőből

$$\tau(\theta_\pi - \theta_0) = 2\mu X_0\sin\gamma\,.$$

A második kettőből

$$\tau\left(\theta_{3\pi/4} - \theta_{\pi/4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\mu X_0\sin\gamma - 8Ml\left(\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}\right),$$

azaz

$$\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2} = \frac{\tau}{8Ml}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\theta_\pi - \theta_0\right) - \left(\theta_{3\pi/4} - \theta_{\pi/4}\right)\right\},$$

amellyel az egyik keresett mennyiség, $\frac{\partial^2V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2V}{\partial x^2}$ meghatározást nyert. A másik irányító mennyiség mérésére Eötvös a transzlatométert ajánlja, noha megjegyzi, hogy egy ötödik azimutban történő méréssel $2\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}$ az asztatikus variométerrel is megkapható [1]. Az ötödik (pl. $\alpha = \pi/2$) mellé vegyünk fel még egy hatodikat (pl. $\alpha = 3\pi/2$) is.
Ekkor

$$\alpha = \pi/2 \qquad \tau\theta_{\pi/2} = -\mu X_0\cos\gamma - 8Ml\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\,,$$

$$\alpha = 3\pi/2 \qquad \tau\theta_{3\pi/2} = \mu X_0\cos\gamma - 8Ml\frac{\partial^2V}{\partial x\partial y}\,,$$

amelyekből

$$\tau\,(\theta_{3\kappa/2} - \theta_{\kappa/2}) = 2\mu X_0 \cos\gamma \;.$$

Ezért

$$\mu = \frac{\tau}{2\,X_0}\left[\left(\theta_{3\kappa/2} - \theta_{\kappa/2}\right)^2 + \left(\theta_\kappa - \theta_0\right)^2\right]^{1/2}$$

és

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{(\theta_\kappa - \theta_0)}{(\theta_{3\kappa/2} - \theta_{\kappa/2})}\left(= \frac{M_1 - M_2}{M_4 - M_3}\right),$$

továbbá

$$2\,\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\tau}{8\,M\,l}\left\{(\theta_\kappa - \theta_{\kappa/2}) - (\theta_{3\kappa/2} - \theta_0)\right\}.$$

Teljes asztatizáció mellett $\mu = 0$, azaz

$$F = 4\,M\,l\left\{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\sin 2\alpha + 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\cos 2\alpha\right\}.$$

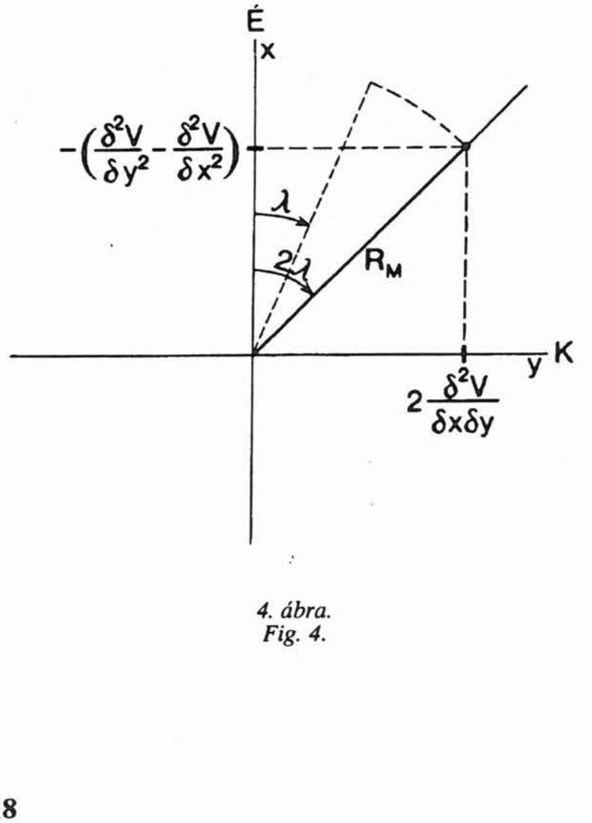
Legyen

$$R_M = \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2\right]^{1/2},$$

továbbá (*4. ábra*)

$$\sin 2\lambda = \frac{2\,\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}}{R_M} \quad \text{és} \quad \cos 2\lambda = \frac{-\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)}{R_M}.$$

Ha az α szög éppen λ-val vagy $\lambda + \pi$-vel egyenlő, akkor $F = 0$. Ugyancsak zérus a forgatónyomaték az



4. ábra.
Fig. 4.

$\alpha = \lambda \pm \pi/2$-nél is, azonban könnyen igazolható, hogy a lengő csak az $\alpha = \lambda$ (vagy az ekvivalens $\alpha = \lambda + \pi$) helyzetben van stabilis egyensúlyi helyzetben u.i. ha δ kicsiny pozitív szög, akkor

$$\alpha = \lambda + \delta \text{ -ra} \quad F < 0\,,$$
$$\alpha = \lambda - \delta \text{ -ra} \quad F > 0\,,$$

míg

$$\alpha = \lambda + \pi/2 + \delta \text{ -ra} \quad F > 0\,,$$
$$\alpha = \lambda + \pi/2 - \delta \text{ -ra} \quad F < 0\,,$$

tehát a lengő 1-el jelölt karja a

$$(\lambda - \pi/2) < \alpha < (\lambda + \pi/2)$$

tartományban az $\alpha = \lambda$ helyzet elérésére törekszik.

A maximális forgatónyomaték $\alpha = (\lambda \pm \pi/4)$ -ben lép fel, ahol

$$|\,F_{\max}\,| = 4\,M\,l\,R_M$$

A λ szög a mágneses tér irányító képességének irányát jelzi, R_M pedig a nagyságát jelenti.

A nívófelület görbületi eltérésének kiszámítása a mért gradiensekből és horizontális irányító képességből

A földmágneses helyi koordináta-rendszerben az **F** mágneses térerősséget három derékszögű komponensével (X, Y, Z), vagy a deklináció (D) és inklináció (I) szögeivel, valamint a térerő abszolút értékével (F_0) szokás megadni (*5. ábra*). Minthogy a nívófelület mindenütt merőleges **F**-re, a nívófelület O-beli érintősíkjának D irányú egyenese (90°-I) szöggel mutat a vízszintes fölé. Legyen ez a nívófelületi rendszer $\xi = x'$ tengelye. Ha az $\eta = y'$ tengelyt vízszintesnek vesszük, akkor a harmadik, $\zeta = z'$ tengely **F** irányába fog mutatni. A földmágneses (K) és a nívófelületi rendszer (K') kapcsolatát az

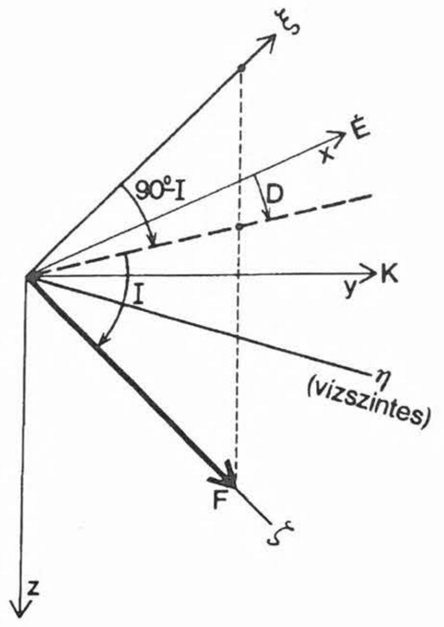
$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$$

ortogonális transzformáció írja le, amelyben $\boldsymbol{x}$ a K rendszer tetszőleges vektora,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos D \sin I & \sin D \sin I & -\cos I \\ -\sin D & \cos D & 0 \\ \cos D \cos I & \sin D \cos I & \sin I \end{pmatrix}$$

a transzformáció mátrixa, $\boldsymbol{x}'$ pedig $\boldsymbol{x}$ transzformáltja K'-ben. Ilymódon a térerősségvektor komponensei a nívófelületi rendszerben

$$X' = X \cos D \sin I + Y \sin D \sin I - Z \cos I\;,$$
$$Y' = -X \sin D + Y \cos D\;,$$
$$Z' = X \cos D \cos I + Y \sin D \cos I + Z \sin I\;,$$



5. ábra. A *K* földmágneses (*x, y, z*) és a *K'* nívófelületi (*x', y', z'*) rendszer kapcsolata.

Fig. 5. Relationship between the geomagnetic (*x, y, z*) coordinate system and the coordinate system attached to the niveau surface (*x', y', z'*).

a nívófelületi gradiensvektoré pedig

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \cos D \sin I \frac{\partial}{\partial x} + \sin D \sin I \frac{\partial}{\partial y} - \cos I \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = -\sin D \frac{\partial}{\partial x} + \cos D \frac{\partial}{\partial y}$$

lesznek.

A nívófelület görbületi eltérését az

$$R'_M = \left[\left(\frac{\partial Y'}{\partial y'} - \frac{\partial X'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y' \partial x'}\right)^2\right]^{1/2}$$

formula adja meg, amelyben $V' = V'(x', y', z')$ a mágneses tér potenciálja a nívófelületi rendszerben. Minthogy a görbületi eltérés iránya (λ') a

$$\sin 2\lambda' = \frac{\left(\frac{\partial X'}{\partial y'} + \frac{\partial Y'}{\partial x'}\right)}{R'_M} = \frac{\left(\frac{\partial^2 V'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y' \partial x'}\right)}{R'_M},$$

vagy a

$$\mathrm{tg}\, 2\lambda' = \frac{\frac{\partial X'}{\partial y'} + \frac{\partial Y'}{\partial x'}}{\frac{\partial X'}{\partial x'} - \frac{\partial Y'}{\partial y'}} = \frac{\frac{\partial^2 V'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y' \partial x'}}{\frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial y'^2}}$$

képletből fejezhető ki, a görbületi mennyiségek (R'_M és λ') kiszámításához a szereplő deriváltakat a *K*-ra vonatkozó mért adatokkal, kell előállítani. Alkalmazva a fenti transzformációkat, rendezés után a következő eredményekre jutunk:

$$\frac{\partial Y'}{\partial y'} - \frac{\partial X'}{\partial x'} = \cos 2D \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) + \cos^2 I \left\{(1 + \sin^2 D) \frac{\partial Y}{\partial y} + (1 + \cos^2 D) \frac{\partial X}{\partial x}\right\} - \frac{1}{2} \sin 2D \,(1 + \sin^2 I) \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} \cos D \sin 2I \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} \sin D \sin 2I \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

ahol a fellépő $\frac{\partial Z}{\partial z}$ komponens kiküszöbölésére felhasználtuk a

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

Laplace egyenletet.

$$\frac{\partial X'}{\partial y'} + \frac{\partial Y'}{\partial x'} = \sin 2D \sin I \left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right) + \cos 2D \sin I \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) + \sin D \cos I \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - \cos D \cos I \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right).$$

A képletekben természetesen

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}\,; \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

írható és az eredmények a $V = V(x, y, z)$ potenciál deriváltjaival is kifejezhetők.

Az Eötvös-féle torziós eszközökkel a szereplő deriváltak közül

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad \text{és} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}$$

a transzlatométerrel [1],

$$\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

pedig az asztatikus variométerrel mérhető meg (utóbbi — amint láttuk — $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ mérésére is alkalmas). Ezután már a $\frac{\partial Y}{\partial y}$ derivált is számolható, tehát a nívófelületi görbületi jellemzők (R'_M és λ') megadhatók.

A nívófelület görbületi jellemzőin túlmenően a mért gradiensekből a fenti transzformációk alkalmazásával kiszámítható a mágneses erővonal ρ' görbületi sugara a kezdőpontban:

$$\rho' = \frac{F_0}{\left[\left(\frac{\partial X'}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y'}{\partial z'}\right)^2\right]^{1/2}}$$

és a nívófelületre merőleges erővonalak simuló síkjának az x' z' síkkal bezárt (μ') szöge is:

$$\cos\mu' = \frac{\frac{\partial X'}{\partial z'}}{\left[\left(\frac{\partial X'}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y'}{\partial z'}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

$1/\rho'$ ugyanakkor az erővonal irányváltozásának mértéke z' irányában.

A horizontális irányító képesség számítása

Noha Eötvös torziós elven működő mágneses eszközei (a transzlatométer és az asztatikus variométer) a tér rendkívül kicsiny, normális térbeli változásainak kimérésére nem voltak elég érzékenyek, a helyi jellegű sokkal nagyobb változások kimutatására viszont alkalmasak voltak, de ilyen célzatú rendszeres mérésekről nincs tudomásunk. Minthogy azonban néhány térgradiens, illetve a horizontális irányító erő anomáliái elegendően sűrű — lényegében X, Y, és Z adatokból álló — mágneses hálózatból szintén megadhatók, Eötvös ezzel a kérdéssel is foglalkozott, és először saját mérési eredményeiből Kecskemét környékére számította ki a horizonátlis irányító erő anomáliáit [4].

A horizontális irányító erő globális változásainak megismerésére végzett számításokhoz Eötvös A. Schmidt 1885-re vonatkozó térmodelljét, illetve annak szabályos (φ, λ) koordinátahálóban megadott kiindulási X, Y, Z adatait használta fel [5].

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial X}{\partial \varphi} - \frac{Z}{r}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{r\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{Y}{r}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Y}{r\cos\varphi\,\partial\lambda} - \frac{X}{r}\operatorname{tg}\varphi - \frac{Z}{r}$$

A helyi gradienskomponenseket előállító képletek jobboldalán szereplő differenciálhányadosokat a megfelelő különbségi hányadosokkal helyettesítette és a Föld r sugarát 6367,4 km-nek vette. Noha elvileg $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$, ezt Eötvös— minthogy nyers adatokkal dolgozott — nem használhatta ki, hanem mindkét mennyiséget kiszámolta és az irányító erőt (képességet) az

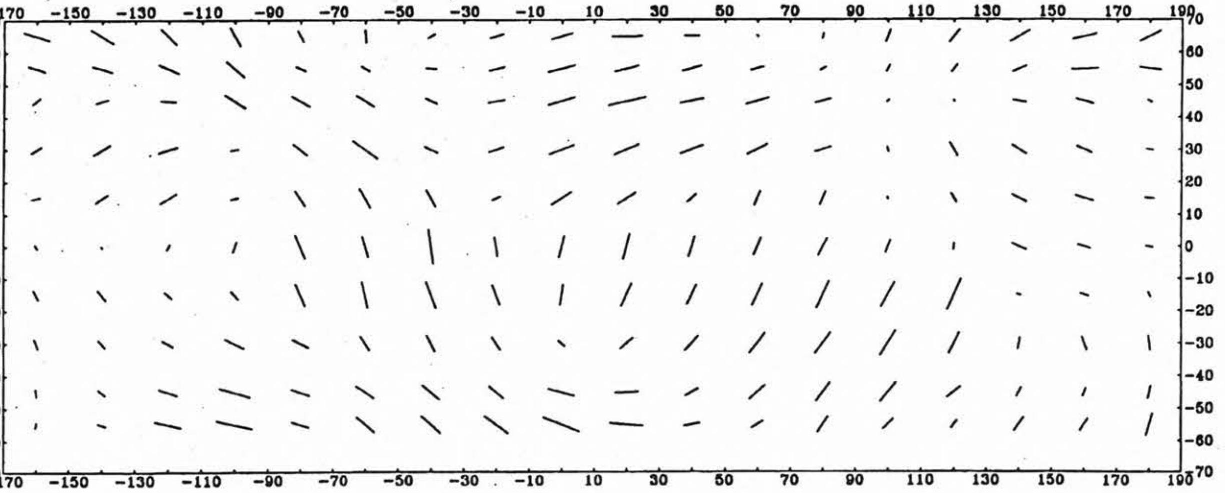
$$R_M = \left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2\right\}^{1/2},$$

ennek irányát pedig

$$\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}}$$

képletekből határozta meg.

A számításokat az északi féltekén a 0° és 55 °-os szélességek között, 5° x 5°-os hálózat sarokpontjaira végezte el. A 65°-os északi szélességen és a déli félteke -15°, -30°, -45° és -55°-os szélességi körein viszont a hosszúság szerint 20°-onként haladt. Úgy



6. ábra. A horizontális irányító képesség irányának és nagyságának globális eloszlása Eötvös számításai alapján az 1885.0 epochára vonatkozóan (ritkított adatok). R_M max =0.5 eötvös.

Fig. 6. Global distribution of the H. D. T. for the epoch 1885.0 according to the computations of Eötvös (selected data). R_M max = 0.5 eötvös units

tűnik, hogy a számítási eredmények nagy része nem ellenőrzött, noha nagyobb hibákat a számított értékek valószínűleg nem tartalmaznak. A mellékelt térképen az áttekinthetőség végett a számított adatoknak csak egy részét ábrázoltuk, amelyből világosan kitűnik az irányító képesség globális eloszlásának jellege (*6. ábra*).

Köszönetnyilvánítás

"A földgömbre számított mágneses irányító erők" feliratú, kézzel írott számolási lapok az Eötvös hagyatéknak abból a részéből kerültek elő, amelyet az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet Tihanyi Obszervatóriumában őriznek. Ezúton köszönöm meg Körmendi Alpárnak, az Obszervatórium vezetőjének, hogy az anyagot rendelkezésemre bocsájtotta.

HIVATKOZÁSOK

[1] EÖTVÖS, L. 1896. Vizsgálatok a gravitatio és a mágnesség köréből. Math. és Term. tud. Ért. **14**. Különlenyomat, 1-46.

[2] HAÁZ, I. B. 1963. Eötvös és a paleomágnesség. Fizikai Szemle. **XIV**. 50-54.

[3] FEKETE, J. 1918. A földmágnességre vonatkozó vizsgálatokról. Math. és Phys. Lapok. **27**. 206-229.

[4] EÖTVÖS, L. 1912. Über Arbeiten mit der Drehwaage. Ausgeführt im Auftrage der Kön. ungarischen Regierung in den Jahren 1908-1911. Verhandl. d. XVII. allg. Konferenz der Internat. Erdmessung in Hamburg. 1912. I. 427-438.

[5] EÖTVÖS, L. (évszám nélkül). A földgömbre számított mágneses irányító erők. (Magyarázat nélküli számolólapok). Kézirat.