

Numerikus légkörmodellek előállítása

KOVÁCS KÁROLY*

A dolgozatban röviden bemutatjuk a numerikus légkörmodellkészítés alap gondolatait. Ismertetjük a Boltzmann féle transportelmélet segítségével nyerhető, az aeronomiai modellezésben használható transportegyenleteket. Végezetül ismertetünk egy elkészült numerikus légkörmodellt.

В этой работе описываются основные принципы разработки численной модели верхней атмосферы. Излагаются уравнения транспорта полученные на основании теории Больцмана и применяющиеся в аэрономическом моделировании. Наконец, как пример показывается численная модель атмосферы.

In this report the basic principles of the numerical modelling of the upper atmosphere are discussed. The transport equations obtained by the transport theory of Boltzmann and used in aeronomic applications are described. Finally as an example, a numerical model atmosphere is given.

Bevezetés

A tudományos megismerés egyik alapvető módszere a modellkészítés. Amikor felállítunk egy tudományos elméletet, akkor tulajdonképpen a valóság egyféle modelljét állítjuk fel.

A modellkészítésre azért van szükség, mert a vizsgált jelenségeket a maguk összetettségében nem tudjuk megragadni. Ezért megpróbálunk olyan egyszerűsítésekkel élni, amelyek a jelenségek számunkra legfontosabb elemeit megtartják, a lényegtelen, zavaró elemeket pedig elhagyják. Ezután ellenőrizzük, hogy az így létrejövő elméleti konstrukciónk (modellünk) valóban teljesíti-e az elvárásokat. Az ellenőrzés úgy történik, hogy a modell által jósolt eredményeket összehasonlítjuk valóságos mérési adatokkal. Ha a modellünk jól működik, akkor bizonyos hibahatárokon belül a valóságos mérésekkel egyező eredményeket kell kapnunk. Ha a jósolt és a mért értékek eltérnek, akkor ez azt jelenti, hogy a modellünk felépítésénél valamilyen hibát követtünk el. Ekkor újra átvizsgáljuk a modellt és megpróbáljuk megkeresni a hibás pontot. Ha a modell megfelelő pontossággal visszaadja a mérési adatokat, akkor feltételezhetjük, hogy sikeresen választottuk ki a jelenségek halmazából a leglényegesebb összefüggéseket, és hogy valóban a kevésbé lényeges dolgokat hanyagoltuk el.

Kissé általánosítva az elmondottakat végül is minden tudományos elmélet egyfajta modellje a valóságnak. Például a newtoni mechanika is egy olyan modellnek tekinthető, amely a makroszkópikus fizikai folyamatokat megfelelő pontossággal leírja.

Láthatjuk tehát, hogy a modellkészítés igen fontos szerepet játszik a tudományos megismerés folyamatában. Egyrészt segítségével kiválaszthatjuk a legfontosabb törvényszerűségeket (pl. a newtoni mechanika mozgástörvényei), másrészt pedig a modell segítségével kvantitatív jóslásokat tehetünk az egyes folyamatokra (pl. kiszámolhatjuk egy mozgó test helykoordinátáit egy jövőbeni t időpontban).

* MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatói Intézete, Sopron, Múzeum u. 6-8.

A fentiekben elmondottak vonatkoznak a numerikus légkörmodellekre is. A célunk az, hogy a légkörben lejátszódó nagyszámú fizikai folyamat közül kiválasszuk azokat, melyek adott geofizikai feltételek mellett meghatározzák a rendszer állapotát.

Mivel a felsőlégkörben *in situ* méréseket végezni nagyon költséges és bonyolult, ezért sok esetben célszerű az egyes légköri paraméterek (nyomás, hőmérséklet, stb) számszerű értékeit a modellekből kiszámítani.

A légkör numerikus modellezése

A numerikus modellezés a nagy teljesítményű számítógépek megjelenésével vált lehetővé. A rakétás és műholdas mérések megtervezése és kivitelezése számítógépek nélkül szinte lehetetlen lenne. Gondoljunk csak a nagyszámú beérkező mérési adatra, melynek rögzítése és feldolgozása is számítógépekkel történik.

Mielőtt magukról a numerikus modellekről szólnánk, röviden ki kell térnünk arra, hogy a légköri folyamatokat milyen fizikai törvényekkel írhatjuk le.

A részecskék mozgásának leírására először Lagrange dolgozott ki egy módszert a newtoni axiómák alapján. Elméletének az a lényege, hogy az egyes részecskék mint individuumok mozognak egymás, ill. a külső erők eredőjének az erőterében. A módszer a jól ismert soktestprobléma.

A soktestprobléma azonban zárt alakban csak két test esetében oldható meg. Három test esetében már csak közelítő megoldás adható. Kontinuum számosságú részecskék esetében, mint amilyen a légkör is, a módszer nagy nehézségekbe ütközik.

Pontosan ezeket a nehézségeket próbálta Euler kiküszöbölni a róla elnevezett elméletben. Euler a sok részecskéből álló rendszert olyan folytonos eloszlású folyadéknak tekintette, melynek tulajdonságai helyről helyre változnak. A rendszer jellemzői nem az egyes részecskék „sorsához” kötöttek, hanem ezek a hely és az idő függvényei. Ezeknek az ún. makroszkópikus mennyiségeknek a változását, a hely és az idő szerint, parciális differenciálegyenletek írják le.

Az Euler-féle szemlélet hasonlít a maxwelli erőtérszemlélethez, azzal a különbséggel, hogy az Euler elméletben másodfokú parciális differenciálegyenletek szerepelnek, míg az erőtereket lineáris parciális differenciálegyenletek írják le.

Az Euler-féle szemlélet nagyon hasznosnak bizonyult többek közt a hidrodinamikában, a gázdinamikában és a magnetohidrodinamikában.

A fentiekből láthatjuk, hogy tulajdonképpen kétféle módon készíthetünk numerikus légkörmodellét. Az egyik módszer az, hogy követjük az Euler-féle szemléletet, azaz a makroszkópikus fizikai mennyiségekre felírjuk a megfelelő parciális differenciálegyenleteket és ezt alkalmas határfeltételek mellett megoldjuk. A nehézség itt abból adódik, hogy az adott rendszerről olyan fizikai modellt készítsünk, mely a lényeges folyamatokat tartalmazza, és emellett az ismeretlenekre olyan egyenletrendszert ad, amely numerikusan megoldható. Az Euler-féle szemléletmód esetében csak az egyensúlyi, vagy ahhoz közelálló folyamatok írhatók le. Előfordulhat az is, hogy az egyenletrendszer megoldhatósága érdekében a fizikai kép felállításakor olyan információkat is elhagyunk, amelyeket egyébként ismerünk.

Az Euler-módszer előnye, hogy a kapott egyenletrendszer viszonylag kis teljesítményű számítógépen is megoldható.

A modellezés másik módja a Lagrange-féle szemléleten alapul. Tekintsünk N db részecskét, melyeknek egy $t = 0$ időpillanatban ismerjük az összes hely és

sebességkoordinátáit. A ható erők ismeretében mindegyik részecskére külön-külön kiszámolhatjuk a későbbi $t = t_1$ időpillanatra vonatkozó összes hely és sebességkoordinátát. Ezután a $t = t_2, t_3$ stb. időpillanatokra is elvégezhetjük a számolást és így végső soron teljes pontossággal nyomonkövethetjük az N db részecskéből álló rendszer időbeli változását. Ezzel a módszerrel tulajdonképpen az N részecskére nézve egy valódi reprodukciót végzünk. A módszer előnye az, hogy az időskála széthúzható, a kis karakterisztikus idejű folyamatok nyomonkövethetőek, a részeredményeket pedig a rendszer zavarása nélkül megtudhatjuk.

Hátránya a módszernek, hogy nagy kapacitású számítógépen is csak viszonylag kis N számú részecske mozgása modellezhető. A valóságban pedig, mint ismeretes a részecskék száma igen nagy (cm^3 -enként $10^{10} - 10^{22}$ db).

A teljesség kedvéért megemlítjük még az ún. empirikus léggörmodelleket is. Ezek a modellek nem abból a célból készülnek, hogy a lejátszódó fizikai folyamatokat nyomonkövethessük. A meglévő mérési adatokra egy empirikus formulát próbálnak illeszteni azzal a céllal, hogy azokban a pontokban is számolhassunk léggöri paramétereket, mely pontok a mérési pontok közé esnek. Ilyen módszerrel készítenek empirikus modelleket a semleges léggörre és az ionoszférára. Ezeknek a modelleknek a segítségével tájékozódhatunk arról, hogy az egyes geofizikai körülmények között a különböző léggöri paraméterek milyen számszerű értékek között mozognak. Ha nincsenek közvetlen mérési adataink, akkor ezeket a modelladatokat viszonylag egyszerű formulákkal gyorsan kiszámolhatjuk.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy számunkra a fentiekben ismertetett két számítógépes modellezés közül az Euler-féle szemléleten alapuló módszer a kivitelezhető.

Az Euler-féle modellezés elméleti háttere

Mint már korábban említettük az Euler-féle szemléletmód alap gondolata az, hogy a kontinuum sokaságú rendszerben makroszkópikus fizikai mennyiségeket vezetünk be, mint pl. a nyomás, koncentráció, hőmérséklet stb. Felírjuk az ezekre vonatkozó parciális differenciálegyenleteket, melyek leírják a fenti mennyiségek hely- és időbeli változását. A bevezetett makroszkópikus mennyiségek már nem az egyes részecskék egyedi állapotára, hanem a részecskesokaság átlagos viselkedésére vonatkoznak.

Az aeronómiai folyamatokat leíró megmaradási törvényeket a Boltzmann-egyenletből származtathatjuk a következő módon [4].

N db azonos típusú részecske állapotát $3N$ hely és $3N$ sebességkoordinátával adhatjuk meg. A $6N$ dimenziós térben (a fázistérben) a rendszernek egy pont felel meg. A rendszer a következő időpillanatban a fázistérben egy másik pontba mozdul el.

Ha az N részecskéből álló rendszert a 6 dimenziós térben ábrázoljuk (3 hely és 3 sebességkoordináta), akkor a rendszernek ebben a koordináta-rendszerben egy N db pontból álló *pontfelhő* felel meg.

A rendszer jellemzésére vezessük be az $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ eloszlásfüggvényt. Ez a függvény megadja, hogy az időpillanatban az \mathbf{r} pont körüli d^3r térfogattartományban hány olyan részecske van, melynek sebessége a \mathbf{v} körüli d^3v -be esik, azaz:

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v \quad (1)$$

ahol $d^3r = dx dy dz$ és $d^3v = dv_x dv_y dv_z$.

Az N részecskeszámhoz úgy juthatunk, hogy az (1) összefüggésnek vesszük a teljes térre és az összes sebességre vonatkozó integrálját, azaz:

$$N = \int \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}. \quad (2)$$

Feltételezve, hogy az adott térfogatban a részecskék száma az idővel nem változik, írhatjuk a következőt:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \int \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Mivel az integrálási határok függetlenek az időtől, ezért az integrálás és az idő szerinti differenciálás felcserélhető. Bevezetve továbbá a $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ és $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \cdot \mathbf{F}$ összefüggéseket (3)-ból megkaphatjuk az ütközésmentes Boltzmann egyenletet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (4)$$

Ha figyelembe vesszük a részecskék ütközését is, akkor egy bizonyos sebességtartományba eső részecskék száma az ütközések miatt változik.

Az ütközési tagot $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i$ -vel jelölve a (4) Boltzmann egyenlet alakja:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i. \quad (5)$$

A $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i$ ütközési tag bizonyos ütközési típusok esetében megszerkeszthető. Ilyen eset például a Coulomb szórás. A fenti egyenletekben szereplő \mathbf{F} a részecskékre ható erőt jelenti. Ha a részecskék közötti erőhatás rövid hatótávolságú (a részecske sugarával összemérhető), akkor ezek az ún. belső erők elhanyagolhatók. Ebben az esetben \mathbf{F} a rendszerre ható külső erők eredője. Hosszabb hatótávolságú belső erők esetén, mint pl. a töltött részecskék között ható Coulomb erő esetében is, \mathbf{F} a külső és a belső erők eredőjét jelenti.

A transzportermelethez ismeretes, hogy egy részecskesokaságra jellemző fizikai mennyiségek felépíthetők, mint a részecske sebesség hatványainak a függvényei. A rendszerre jellemző makroszkópikus fizikai mennyiségek, mint pl. a nyomás, hőmérséklet stb., a részecskék atomos szintű mozgásával kapcsolatosak, így nem csoda, hogy ezek a makroszkópikus mennyiségek a részecskék sebességének megfelelő hatványaitól függenek. Természetesen a részecskék sebessége mellett szerepelnek a részecskéket meghatározó állandók is, mint pl. a tömeg vagy a töltés.

Tekintsük ezután a tetszőleges $Q(\mathbf{v})$ fizikai mennyiséget, mely a \mathbf{v} megfelelő hatványából és a részecskék adataiból épül fel. Ilyen $Q(\mathbf{v})$ fizikai mennyiségek például a következők:

| | |
|-------------------|---------------------------|
| fizikai mennyiség | $Q(\mathbf{v})$ |
| részecskeszám | l |
| elektromos töltés | e |
| tömeg | m |
| impulzus | $m \cdot \mathbf{v}$ |
| elektromos áram | $e \cdot \mathbf{v}$ |
| mozgási energia | $\frac{1}{2} m \cdot v^2$ |

A makroszkópikus mennyiségek, mint már említettük, a mikroszkópikus mozgások átlagaként jelennek meg. Ezek az ún. termodinamikai mennyiségek. Számunkra azoknak a fizikai mennyiségeknek van jelentősége, melyeknek a \mathbf{v} -re vett átlaga nem nulla. Előfordulhatnak ugyanis olyan mennyiségek is, melyek a részecskék ütközései során kiátlagolódnak.

Képezzük a $Q(\mathbf{v})$ átlagát a szokásos módon:

$$\langle Q(\mathbf{v}) \rangle = \frac{\int Q(\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}} \quad (6)$$

A (6) összefüggésben az $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ eloszlásfüggvényt, mint súlyfüggvényt használjuk. A (6) összefüggés lényegében azt veszi figyelembe, hogy a $Q(\mathbf{v})$ hogyan oszlik el a részecskék között.

A részecskesűrűsége írhatjuk:

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v}. \quad (7)$$

A $\langle Q \rangle$ függvény hely- és időfüggő. Változására a Boltzmann-egyenletből kaphatunk választ. Beszorozva (5)-öt Q -val, majd mindkét oldalt \mathbf{v} szerint integrálva, kapjuk az:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle Q \rangle) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (n \cdot \langle Q \cdot \mathbf{v} \rangle) - n \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{1}{m} \cdot \mathbf{F} Q \right) \right\rangle = \{Q\}_{\text{ütk.}} \quad (8)$$

kifejezést, ahol a $\{Q\}_{\text{ütk.}}$ tag nem más mint a

$$\{Q\}_{\text{ütk.}} = \int Q(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{ü}} d^3\mathbf{v}. \quad (9)$$

A (9) csak akkor adható meg pontosan, ha az ütközési tag konkrét formája ismert. A (9) kifejezés a Q mennyiség azon változását tartalmazza, mely a részecskék ütközése révén jön létre, úgy, hogy az ütközésben résztvevő valamennyi partner járulékát tartalmazza.

A (8) egyenlet a Q fizikai mennyiség $\langle Q \rangle$ átlagának térbeli és időbeli változását írja le. Ez a változás végső soron a mikroszkópikus mozgások eredménye. A (8) egyenlet a Q mennyiség transzportjának vagy forgalmának a leírására szolgál, ezért (8)-at a Q mennyiség transzportegyenletének nevezzük.

Például ha $Q = 1$, akkor (8) megadja a részecskeszám transzportját:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(n \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (10)$$

ahol feltételeztük, hogy $\{Q\}_{\text{ütk.}} = 0$ és hogy $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{v}} = 0$ és az $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ átlagsebesség egyenlő a $\langle \mathbf{v} \rangle$ -vel, azaz $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

A (10) egyenlet nem más, mint a szokásos kontinuitási egyenlet.

A fentiekhez hasonlóan a $Q = e$ -re megkaphatjuk az $e \cdot n(\mathbf{r}, t)$ elektromos töltéssűrűsége és a $Q = m$ esetében pedig az $m \cdot n(\mathbf{r}, t)$ tömegsűrűsége a megfelelő kontinuitási egyenleteket. A $Q = m \cdot \mathbf{v}$ az impulzus transzportját adja, ami nem más mint a folyadékok és gázok mozgásegyenlete. A továbbiakban folytathatnánk a \mathbf{v} egyre magasabb hatványaihoz tartozó Q -ra vonatkozó transzportegyenletek felírását. Fontos észrevétel az, hogy a \mathbf{v} egy adott hatványához tartozó transzportegyenlet tartalmazza az eggyel nagyobb és eggyel kisebb kitevőjű hatványhoz tartozó járulékokat is. Ezt egyébként (8)-ból is láthatjuk, mivel itt szerepel egy \mathbf{v} -vel való szorzás és egy \mathbf{v} szerinti differenciálás is.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a \mathbf{v} egyre magasabb hatványaihoz tartozó Q fizikai mennyiségek változását leíró transzportegyenletek hierarchikusan egymásra épülnek.

Célszerű bevezetni az eloszlásfüggvényt

$$\begin{aligned} & \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} \\ & \int \mathbf{v} \cdot f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} \\ & \int \mathbf{v} \circ \mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} \\ & \int \mathbf{v}^2 \cdot f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} \end{aligned}$$

ígynevezett nyomatékait.

Az eloszlásfüggvény nyomatékainak az időbeli és térbeli változását is természetesen a transzportegyenletek írják le. Ezek a transzportegyenletek, mivel hierarchikusan egymásra épülnek, egymástól függetlenül nem oldhatók meg. A transzportegyenletek jelentősége abban áll, hogy a mikroszkópikus folyamatoktól elvezetnek a makroszkópikus törvényszerűségekhez, és lehetőséget nyújtanak a problémák közelítő megoldására. Példának megemlíthetjük az ideális gázok esetét. Itt feltételezhetjük, hogy nincs sűrűdés vagy hővezetés, ezért az ezekhez a fizikai mennyiségekhez tartozó magasabbrendű nyomatékok elhagyhatók, így a transzportegyenletek hierarchikus rendszere lezárható, s a kapott egyenletrendszer megoldható. Bonyolultabb esetekre *Chapman* [5] és *Enskog*, valamint *Grad* dolgozott ki közelítő eljárásokat.

A korábbi aeronómiai modellekben egyensúlyi állapotot tételeztek fel. A részecskék eloszlását Maxwell-félenek tekintették és a modellekben az Euler egyenletet használták. A valóságban viszont a legtöbb légköri folyamat nem egyensúlyi állapotra vonatkozik, így a modellek használhatósága, pont a valóságos fizikai folyamatokat durván közelítő fizikai kép miatt, eléggé korlátozott volt. A nemlineáris folyamatokra *Chapman* és *Einskog* dolgozott ki elméletet. Ez az elmélet már figyelembe veszi a perturbált sebességeloszlást. A *Chapman* elmélet jól felhasználható az alacsonysebességű transzportfolyamatok leírásához. Hátránya viszont, hogy a többkomponensű gázokban csak átlagos tömegsűrűséggel és átlagos áramlási sebességgel számol. Az aeronómiai modellezéshez a legjobban felhasználható elméletet *Grad* [1] dolgozta ki. Ezek a transzportegyenletek már tartalmazzák a nyomás és hőáramlási viszonyokat leíró mennyiségeket is az áramlási sebesség és a hőmérséklet értékei mellett.

A *Grad*-féle közelítő módszerrel származtatott transzportegyenletek már sokféle geofizikai feltétel mellett jó megoldást adnak.

Az egyensúlyi állapottól nagyon távoleső folyamatok esetében, mint amilyenek például a nagysebességű transzportfolyamatok, azonban már a *Grad*-féle elmélet sem használható.

A továbbiakban röviden bemutatjuk a *Grad*-féle közelítésen alapuló aeronómiai transzportegyenleteket, mivel jelenleg ezek tekinthetők a valóságos fizikai folyamatok legjobb közelítésének. A legújabb szakirodalom is egyöntetűen ezt a modellt használja. Természetesen a jövőben kívánatos lenne egyensúlyi állapottól nagyon távoleső folyamatokat is leírni, de valószínű, hogy erre csak olyan módszerek lesznek alkalmasak, amelyek már az egyensúlyi állapotot nem tüntetik ki.

A *Grad*-féle közelítés alapgondolata a következő. Tekintsük az (5) *Boltzmann* egyenletet a következő alakban

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla f_s + \left[\mathbf{G} + \frac{e_s}{m_s} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_s \times \mathbf{B} \right) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}_s} f_s = \left(\frac{\partial f_s}{\partial t} \right)_{\text{ütk.}} \quad (11)$$

A 11 egyenlet valamely s komponensre vonatkozik. Az egyenletben szereplő tagok a következők: f_s az s komponens eloszlásfüggvénye, \mathbf{v}_s a sebesség, e_s a töltés, m_s a tömeg, \mathbf{G} a gravitációs gyorsulás, \mathbf{E} az elektromos térerősség \mathbf{B} a mágneses térerősség, ∇ a koordináták szerinti gradiens $\nabla_{\mathbf{v}_s}$ a sebességkoordináták szerinti gradiens. A korábbiakban ismertetett módon vegyük az f_s eloszlásfüggvény következő momentumait.

$$\frac{3}{2} k \cdot T_s = \frac{1}{2} m_s \langle c_s^2 \rangle \text{ az } s \text{ komp. hőmérséklete}$$

$$\mathbf{q}_s = \frac{1}{2} m_s \cdot n_s \langle c_s^2 \cdot \mathbf{c}_s \rangle \text{ hőáramlási vektor}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_s = n_s m_s \langle \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s \rangle \text{ nyomástenzor}$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_s = \bar{\mathbf{P}}_s - p_s \cdot I \text{ feszültségtenzor}$$

$$\bar{\mu}_s = \frac{1}{2} n_s \cdot m_s \langle c_s^2 \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s \rangle \text{ magasabbrendű nyomástenzor}$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = n_s \cdot m_s \langle \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s \rangle \text{ hőáramlási tenzor}$$

A fenti nyomatékokban n_s az s komponens sűrűsége $p_s = n_s \cdot k \cdot T_s$ az s komponensre vonatkozó parciális nyomás, k a Boltzmann állandó, I az egységnyi diadikus, $\mathbf{c}_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s$, ahol \mathbf{u}_s az s komponens átlagsebessége.

A $\langle \rangle$ jelölés, mint korábban is, az átlagolást jelenti, azaz egy A mennyiség $\langle A \rangle$ átlaga a

$$\langle A \rangle = \frac{1}{n_s} \cdot \int f_s \cdot A d\mathbf{c}_s.$$

A Boltzmann-egyenlet (11) alakját beszorozva az 1 , $m_s \cdot \mathbf{c}_s$, $\frac{1}{2} \cdot m_s \cdot \mathbf{c}_s^2$, $m_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s$ és $\frac{1}{2} \cdot m_s \cdot \mathbf{c}_s^2 \cdot \mathbf{c}_s$ értékekkel, majd az így kapott egyenleteket integrálva a sebesség-

terre, megkapjuk a megfelelő transzportegyenleteket, melyek a következők: kontinuitási, impulzus megmaradási, energiamegmaradási, a nyomástenzor és a hőáramlási egyenletek. Természetesen mindegyik egyenlet az s . komponensre vonatkozik. A kapott egyenletek, melyek részletesen kifejtett alakja [2]-ben található, jobb oldali tagja leírja a megfelelő fizikai mennyiség ütközés hatására létrejövő változását. Az úgynevezett Maxwell-molekula kölcsönhatás esetében ez az ütközési tag pontosan számolható. Ilyenkor ugyanis az ütközési frekvencia független a sebességtől. Másfajta kölcsönhatás esetében az ütköző részecskék eloszlásfüggvényét közelíteni kell. Az ütközési tag csak így számolható ki.

Mint azt már korábban is hangsúlyoztuk, az r -ed fokú momentumokra vonatkozó transzportegyenlet tartalmazza az $r+1$ -ed fokú momentumot is, így a momentumok hierarchikusan összekapcsolódnak. Ahhoz, hogy egy egyenletrendszert meg tudjunk oldani az $r+1$ -edik fokú momentumot az r -ed fokú momentummal közelíteni kell. A közelítést *Grad* [1] dolgozta ki. A felhasznált közelítés alakja:

$$f_s = f_{s0} \left[1 + \frac{m_s}{2kT_s p_s} \bar{\mathbf{r}}_s \cdot \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s - \left(1 - \frac{m_s \cdot \mathbf{c}_s^2}{5kT_s} \right) \cdot \frac{m_s}{k \cdot T_s \cdot p_s} q_s \cdot \mathbf{c}_s \right]. \quad (12)$$

Ezzel a közelítéssel az egyenletrendszer lezárható, így meg lehet kísérelni a megoldását.

A megoldáshoz még az ütközési tagokat is valamilyen formában közelíteni kell. Az ionoszféra E tartományában (90–150 km) például, ahol a semleges részecskék száma sokkal nagyobb mint az ionizált részecskéké, a töltött részecskék közötti ütközés elhanyagolható. A semleges és töltött részek között a legfontosabb kölcsönhatás az ún. indukált dipol vonzás (ez külső elektromos tér hatására jön létre). Ebben az esetben a már említett Maxwell-féle molekulakölcsönhatás lép fel, s így az ütközési tag kiszámítható.

Az E tartományra levezetett egyenletekben a kontinuitási egyenlet nem tartalmazza az ionok keletkezését és rekombinációját. Jelenleg nincs olyan zárt elmélet, mely ezt a tagot is tartalmazza, így fenomenológikusan bevezetjük a

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = K_i - L_i \quad (13)$$

kifejezést.

Semleges gázkeverék esetében a részecskék között rugalmas gömbök közötti ütközést feltételeznek. Ebben az esetben az eloszlásfüggvény csak közelíthető. A közelítés is csak akkor érvényes, ha a termikus sebesség és a driftsebesség nem sokban különbözik az egyes komponensek hőmérsékletétől.

Az F tartományban (150–500 km) a legfőbb komponensek: az atomos oxigén, az atomos oxigénion és az elektron.

A fellépő ütközési formák:

- ion-semleges részecske,
- elektron-semleges részecske,
- Coulomb kölcsönhatás.

Ebben az esetben is csak akkor sikerült az ütközési tagra közelítő formulát találni, amikor a driftsebesség közel van a termikus sebességhez.

Egy példa légkörmodellre

Az előzőekben igyekeztünk megvilágítani a légkörmodellezés leglényegesebb vonásait. Mint láttuk a modellezés főbb mozzanatai a következők. Először megtervezzük a fizikai modellt, majd közelítések segítségével zárt, megoldható egyenletrendszer állítunk fel és numerikusan megoldjuk az egyenleteket, végül pedig a számolt eredményeket összevetjük a mérésekkel. Befejezésül egy olyan modellt szeretnénk röviden vázolni, ahol ezek a lépések mind megtörténtek.

Young-ék [3] 1980-ban dolgozták ki légkörmodelljüket az arecibói obszervatórium feletti aeronómiai feltételekre. Az ellenőrzéshez az obszervatórium mérési eredményeit is felhasználták. A modell számolja az ionok koncentrációját, hőmérsékletét és áramlását.

Az alapegyenleteket a korábban ismertetett nyomatékegyenletekből származtatták. Egyszerűsítések után 5 db egyenletet kaptak. Ezek a következők:

1. elektron és ion energiamegmaradási egyenlet
2. az O^+ és H^+ ionokra vonatkozó impulzusmegmaradási egyenlet
3. ionok kontinuitási egyenlete.

A modellezés egy 1 cm^2 átmérőjű mágneses fluxuscsőre történt, melynek a talppontja 120 km magasságban volt s a konjugált hemiszféra 120 km magasságú pontjában végződött. Feltételezték, hogy a talppontokban egyensúlyi állapot uralkodik.

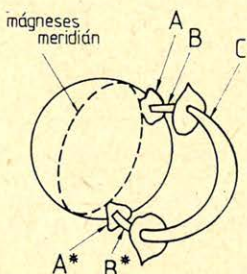
A csövet 3 részre osztották (1. ábra), Az A és A^* felületen adták meg az egyensúlyi állapotra vonatkozó határfeltételeket. A B és B^* tartományokban az ion-ion és az ion-semleges részecske ütközések az uralkodók. Az egyenletek ebben a tartományban pontosan reprodukálják a koncentráció és áramlási viszonyokat.

A C tartományban, az O^+ és H^+ -ra vonatkozó, az áramlást leíró tagok elhanyagolhatókká válnak és a diffúziós egyensúly közelítés jól leírja az ionok eloszlását.

Az egyenletek megoldásai a tartományok határai mentén összekapcsolódnak.

A fizikai modell folyamatábráját a 2. ábra mutatja. A kapott egyenleteket a véges differenciák módszerével oldották meg. A modell bemenő adatai a következők: semleges komponensek hőmérséklete, sűrűsége, összetétele, a meridionális semleges szélesebbég és a Nap EUV sugárzási fluxusa. Ezeket az adatokat mé-

résekből vagy pedig empirikus modellekből származtatták. A MSIS semleges atmosféra modellt használták a semleges részecskék koncentráció és a hőmérséklet értékeinek a meghatározásához.

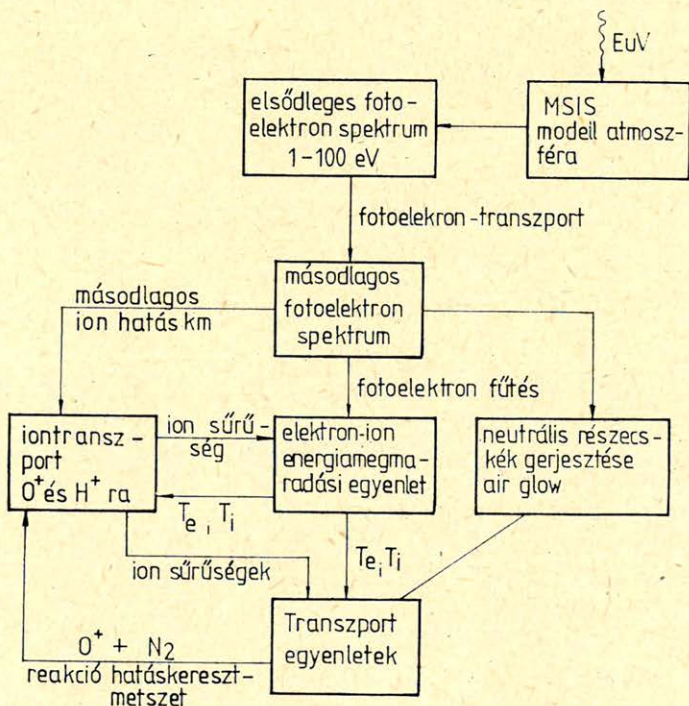


Geo 86 / 14-1

1. ábra. A modellezési tartományok és határok

Рис. 1. Области и пределы моделирования

Fig. 1. Regions and boundaries



Geo 86/14-2

2. ábra. A modell blockdiagramja

Рис. 2. Блок диаграмма модели

Fig. 2. Overall schema of the model

A Nap *EUUV* fluxusát, mely érték a fotoelektron spektrum és a fotoionozációs hatáskeresztmetszetek számolásához kellett, *Hintegger*-től vették át.

Végül a modell jóságára a már említett obszervatóriumi méréseket használták. A saját modellezési munkánkban mi is a *Young* [3] féle modellt tekintjük kiindulási alapnak.

IRODALOM

- [1] *Grad, H.* (1949): On the kinetic theory of rarified gases, *Comm. Pure Appl. Math.* 2, 331.
- [2] *Schunk, R. W.*: Transport equations for aeronomy, *Planet. Space Sci.* 1975, Vol. 23, pp. 437.
- [3] *Young, E. R., D. G. Torr, P. G. Richards and A. F. Nagy*: A computer simulation of the midlatitude plasmasphere and ionosphere. *Planet. Space Sci.* 1980, Vol. 28, pp. 881.
- [4] *Abonyi Iván*: A negyedik halmazállapot. Gondolat, Budapest 1971.
- [5] *Chapman, S and Cowling, T. G.* (1970): *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, Cambridge.