

Rétegsor meghatározás karotázsszelvények számítógépes feldolgozásával

V E R M E S M Á T Y Á S*

A dolgozatban egyetlen mélyfúrásban mért több karotázsszelvény alapján történő rétegmodell szerkesztéssel foglalkozunk. A feladatot olyan lépcsős függvények illesztésére vezetjük vissza, melyek optimálisan illeszkednek a karotázsszelvényekhez, ugrási helyeik korrelálódnak, a lépcsők átlagos szélessége pedig szabályozható. A lépcsős függvényeket egy többdimenziós Markov-lánc realizációként állítjuk elő. A Markov-lánc lehetséges állapotai és az adott kutatási területen előforduló kőzetfajták között hozzárendelés létesíthető. Az átmenetvalószínűségi mátrix felépítése révén az algoritmussal olyan apriori információt közölhetünk, amely jellemző a fúrásban alkalmazott szondakombinációra és a geológiai viszonyokra. Ily módon a lépcsős függvények illesztésekor az algoritmus képes különbséget tenni a paraméterek fizikailag értelmes és értelmetlen kombinációi között. A dolgozat utolsó részében olyan rétegsorokat vizsgálunk, ahol megengedjük a kőzetfizikai paraméterek lassú változását egyetlen rétegen belül is.

В работе описывается определение пластовой модели с помощью нескольких, полученных в одной скважине каротажных кривых. Задача состоит в получении таких ступенчатых зависимостей, которые оптимально аппроксимируют каротажные кривые, места скачков коррелируются, а средняя ширина ступеней регулируется. Ступенчатые зависимости определяются как реализации многомерной цепи Маркова. Представляется возможность совместить возможные состояния цепи Маркова с типами пород данной территории разведки. Строение переходной вероятностной матрицы дает возможность алгоритму содержать априорную информацию, характерную для геологических условий скважины и комбинации примененных зондов. При подгонке ступенчатых зависимостей алгоритм может различать имеющие или не имеющие физический смысл комбинации параметров.

В последней части работы исследуются и такие разрезы, в которых происходит медленное изменение физических свойств в пределах одного пласта.

In the study the determination of the layered model from some well logs measured in a single borehole is discussed. The problem is traced back to the determination of step functions fitting optimally to the well logs. The discontinuities of these step functions are correlated and the average width of the steps can be regulated. The step functions are given as the realizations of a multidimensional Markov-chain.

Mutual correspondence can be prescribed between the possible states of the Markov-chain and the rocks of the investigated area. Using the transition likelihood matrix such a priori informations can be introduced to the algorithm which are characteristic to the combination of the tools applied as well as the geological circumstances in the hole.

As a consequence when fitting the step functions the algorithm is able to distinguish physically sense and senseless combinations of the parameters.

In the last part of the paper models are examined in which the slow variation of the physical and rock parameters is also permitted inside the layers.

Bevezetés

Nem újkeletű próbálkozás a szakirodalomban, hogy a talaj rétegzettségét valamilyen sztochasztikus folyamat segítségével modellezzük. A gyakorlati alkalmazás céljára úgy tűnik, elsősorban a Markov-lánc használata célszerű [1]. Bizonyos értelemben a Markov-lánc matematikai fogalmát a fehér zaj (független folyamat) egyszerű általánosításának tekinthetjük: megengedjük, hogy a

* Geofizikai Kutató Vállalat, Budapest

véletlen függvény minden mintája függjön az előző minta értékétől, és csak attól [2]. Az utóbbi tulajdonság lehetővé teszi, hogy egyes illesztési feladatokban egyszerű kombinatorikus optimalizálási algoritmusokat alkalmazzunk [5]. *Godfréy et. al.* cikkükben a Markov-lánc modelljéből kiindulva akusztikus impedancia szelvényekhez illesztenek lépcsős függvényeket a *Bellman* által javasolt dinamikus programozás algoritmusával [3], [5]. Ez utóbbi cikk eredményeit jelen munkában több szempontból is általánosítjuk

A többdimenziós Markov-lánc bevezetése lehetővé teszi egyetlen fúrólukban mért több karotázsszelvény együttes kiértékelését, ami lényegesen növeli az interpretáció hatásosságát. A Markov-lánc lehetséges állapotai – a kőzetfizikai paraméterek bizonyos kombinációi – kapcsolatba hozhatók az adott területen előforduló kőzetfajtákkal. Ezzel kapcsolatban rámutatunk arra, hogy a Markov-lánc átmenetvalószínűségi mátrixának előzetes megadása révén az interpretációt végző szakember olyan apriori információt közölhet a modellel, amely a terület geológiai és geofizikai viszonyaira jellemző. A dolgozat utolsó részében kísérletet teszünk olyan modell szerkesztésére, ami lehetővé teszi inhomogén rétegek leírását.

I. Modellezés lépcsős függvények segítségével

Az alábbiakban leírjuk a rendelkezésünkre álló kísérleti anyag szerkezetét, valamint a modelleként használt rétegsorok tulajdonságait, és megvilágítjuk, hogy mit értünk valójában rétegmodell számítás alatt. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy adott fúrólukban mért L darab különféle karotázsszelvény, például: PS, laterolog, akusztikus log stb. szelvények. Δz -vel jelölve a mintavételi mélységközt, az i -edik mintavételi pont mélysége $i\Delta z$ ($i = 0, \dots, N$). Jelölje a szelvényegyüttes i -edik mintavételi ponthoz tartozó értékeit $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(L)}$. Az alsó index tehát a mélységet jelzi, a felső index a szonda típusára utal. Kísérleti adataink így az $U = \{u_i^{(l)}\}$ ($i = 0, 1, \dots, N; l = 1, 2, \dots, L$) mátrixba rendezhetők.

A dolgozatban kezdetben olyan idealizált rétegsort (modellt) használunk, mely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Az egyes rétegek homogének, így egy rétegen belül az összes kőzetfizikai paraméter állandó. Egy adott rétegre jellemző, l -edik típusú szondával mérhető kőzetfizikai paraméter elméleti értékét jelöljük $v_l^{(l)}$ -lel. Itt l a szonda típusa ($l = 1, \dots, L$), i a mélység. Ha a réteg felső és alsó határa $i_1\Delta z$ és $i_2\Delta z$, akkor tehát $i_1 \leq i < i_2$ esetén $v_i^{(l)} = \text{const}$.

2. A réteghatárok helyén a $v_i^{(l)}$ függvények közül egy vagy több megváltozik. Így ha az i -edik mélységpontban réteghatár van, akkor $v_{i-1}^{(l)} \neq v_i^{(l)}$ legalább egy l értékre. E két feltételből adódik, hogy a $v_i^{(l)}$ függvények diszkrét lépcsős függvények, melyeknek a réteghatárok helyén lehet ugrása.

Megjegyzések: E feltételeket első pillantásra sokan túlságosan korlátozónak fogják tartani, és úgy gondolják, hogy a fent leírt modellel a valóságnak csak nagyon gyatra közelítése. A modell ellen felhozott fő érv általában az, hogy léteznek olyan *geológiai rétegsorok*, melyekben az egyes rétegek fizikailag nem homogének, továbbá léteznek olyan *geológiai réteghatárok*, melyek egy adott szelvényegyüttes egyik elemén sem mutatkoznak. Ezzel kapcsolatban szeretnénk a következőkre kitérni. Jelen dolgozatban a rétegmodell felállításában kizárólag a karotázsszelvények adataira támaszkodunk, ezért nincs más lehetőségünk, mint

hogy a rétegződést pusztán a közetfizikai paraméterek révén próbáljuk leírni. Így le kell mondanunk olyan réteghatárok kijelöléséről, melyek a szelvényegyüttes egyik tagján sem láthatók. Az eredményül kapott rétegmellünk tehát nem geológiai rétegsornak tekintendő, hanem a kőzetek fizikai tulajdonságok szerint történő elkülönítésének. A geofizikai paraméterek és a geológiai viszonyok kapcsolatának tisztázása további feladat, amellyel ebben a dolgozatban csak érintőlegesen foglalkozunk az átmenetvalószínűségi mátrix (lásd a következő pontban) megadásával kapcsolatban. Még az előbbi érvelést elfogadva is felmerül a következő ellenvetés. Modellünk nem tudja leírni az olyan közeget, ahol a közetfizikai paraméterek folyamatosan változnak. Nos, a rétegmell fogalma magában hordozza azt a gondolatot, hogy a modell kívánt felbontottságának megfelelő méretű nagyobb egységeket próbáljuk megragadni, miközben az önálló egységek belső tulajdonságaitól eltekintünk. Ilyen értelemben a réteg fogalma már-már tartalmazza azt a feltevést is, hogy a réteg homogén. Ezért legalább a probléma első megközelítésekor mindenképpen célszerű a homogén rétegekből álló rétegsor használata.

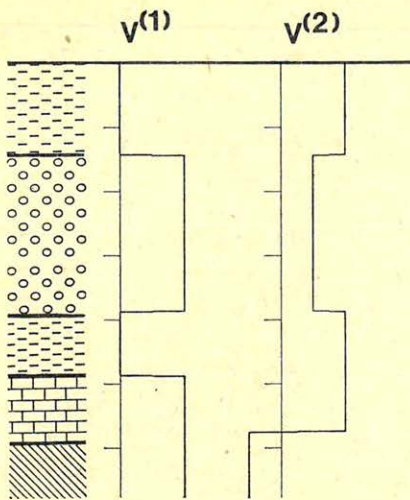
Bemutatunk egy példát, ahol a fent leírt modell használata egyértelműen előnyös. Tegyük fel, hogy VSP mérések alapján intervallumsebességeket kívánunk meghatározni [6]. Ekkor, mint az könnyen belátható, egy adott intervallum esetén a becsült sebesség hibája fordítottan arányos az intervallum hosszával. Emiatt túlságosan kis intervallumok esetén a sebességek hibája oly nagy lehet, hogy az egész sebességfüggvény értelmetlenné válik. Célszerű tehát az intervallumok hosszát egy bizonyos korlát felett tartani, és emellett az intervallumokat úgy beosztani, hogy az egyes intervallumok belsejében a sebesség lehetőleg keveset változzon. Ezen a módon eljárva lényegében a közeg hullámterjedési sebességét tükröző rétegmellét állítunk fel.

A dolgozat utolsó részében olyan rétegmellét fogunk vizsgálni, amelyben megengedjük a közetfizikai paraméterek lassú folyamatos változását az egyes rétegeken belül. Megmutatjuk, hogy a homogén rétegek leírására alkalmazott matematikai modell (Markov-lánc) hogyan általánosítható inhomogén rétegek esetére. Végül megadunk egy eljárást, amellyel az inhomogén rétegek általánosabb esete visszavezethető a homogén rétegekre kidolgozott módszereinkre. Megállapíthatjuk ezért, hogy a rétegmell illesztésének problémájában a homogén rétegekből álló modell több szempontból is alapvető. Fordítsuk tehát figyelmünket egyelőre az oly fontos homogén rétegekből álló modell vizsgálatára.

Ezekután a rétegmellről és a modell alkotó rétegek közetfizikai paramétereiről a következő képet alakíthatjuk ki magunknak (*1. ábra*.)

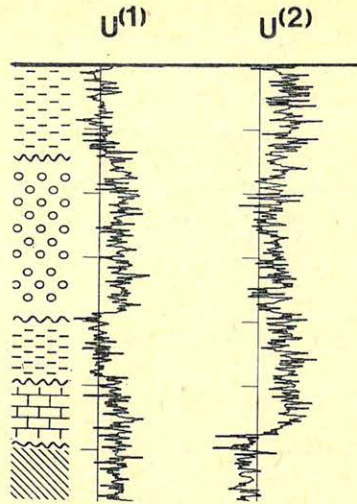
Az *1. ábra* baloldalán a rétegsor sematikus képe látható. A jobboldali lépcsős függvények az *1.*, *2.* típusú szondákkal mérhető közetfizikai paraméterek elméleti értékeit jelképezik. A lépcsős függvények ugrásai a réteghatároknál vannak. Bár nem minden réteghatár jelentkezik az összes lépcsős függvényen, a különböző függvények ugrási helyei *korrelálódnak*. Képzeljük most el, hogy az *1. ábrán* látható rétegsorhoz hasonló közeget harántoló fúrásban megmérjük az $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ görbéket (*2. ábra*).

Az *1.* és *2. ábra* megfelelő görbéinek eltérését tekinthetjük akár mérési hibának, akár az egyes rétegeken belüli olyan inhomogenitásnak, amely kis méreténél fogva önálló réteggént nem vehető számításba. Mármost a rétegmell illesztésekor a következő módon járunk el. A ténylegesen megmért $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ..., $u^{(L)}$ függvényekhez olyan $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, ..., $v^{(L)}$ lépcsős függvényeket keresünk, melyek eleget tesznek az alábbi követelményeknek:



GEO 84/16-1

1. ábra A rétegmodell
 Рус. 1. Пластовая модель
 Fig. 1. The layered model



GEO 84/16-2

2. ábra A mérési anyag
 Рус. 2. Материал измерений
 Fig. 2. The registrations

1. A $v^{(l)}$ lépcsős függvények lépcsőinek átlagos szélessége tetszőlegesen szabályozható, tehát beállíthatjuk a rétegmodell kívánt átlagos rétegvastagságát.

2. Az adott átlagos rétegvastagság mellett a $v^{(l)}$ függvények valamely statisztikai értelemben optimálisan illeszkednek az eredeti adatrendszerhez, vagyis az $u^{(l)}$ függvényekhez.

3. A $v^{(l)}$ függvények ugrási helyei, azaz a kijelölt réteghatárok *korrelálódnak*. Modellünkben a réteghatárokat a $v^{(l)}$ függvények ugrási helyeinek összessége adja meg. Kedvező esetben a $v^{(l)}$ értékekből magára a kőzetre is következtethetünk, s így rekonstruálhatjuk az 1. ábra baloldalát.

II. A Markov-lánc konstrukciója

Mint az előbb láttuk, a rétegmodell felállítása matematikailag olyan lépcsős függvények meghatározását jelenti, amelyek eleget tesznek az 1., 2., 3. követelményeknek. A következőkben a $v^{(l)}$ függvények matematikai leírásával foglalkozunk. E függvényeket egy L dimenziós Markov-lánc realizációiként állítjuk elő. A szerző a Markov-lánccal való modellezés ötletét *Godfrey et al. (1980)* cikkéből merítette. Az ő cikkükhöz képest jelen dolgozat leglényegesebb általánosítása a többdimenziós Markov-lánc használata, mely nem annyira matematikailag, mint inkább a gyakorlati alkalmazhatóság terén jelent lényeges többletet. További különbségekre vezet a modellezés feladatának eltérő megfogalmazása, aminek folyományaként a Markov-lánc bizonyos paramétereinek mi más tartalmat adunk, mint az említett cikkben. E különbségekre a megfelelő helyen még utalni fogunk.

Legyen az L dimenziós $\{v_i\}_{i=0}^N$ sorozat i -edik mintája

$$v_i = \begin{pmatrix} v_i^{(1)} \\ v_i^{(2)} \\ \vdots \\ v_i^{(L)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ahol tehát v_i L dimenziós oszlopvektor, és rögzített felső index esetén $\{v_i^{(l)}\}_{i=0}^N$ az l -edik közt fizikai paramétert jellemző függvény. A matematikai kezelhetőség érdekében feltesszük, hogy a $v^{(l)}$ lépcsős függvények értékkészlete diszkrét. Jelölje $v^{(l)}$ lehetséges értékeit $x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_{m_l}^{(l)}$, ami azt jelenti, hogy modellünkben az l -edik közt fizikai paraméter csak a fenti m_l számú értékkel rendelkezhet. A gyakorlati alkalmazások szempontjából ez a megszorítás nem lényeges, ha az $x_1^{(l)}, \dots, x_{m_l}^{(l)}$ számok a ténylegesen előforduló paraméterértékek intervallumában megfelelő sűrűn helyezkednek el. Feltevésünkéből nyomban adódik, hogy a közt fizikai paraméterek kombinációi, azaz a $\{v_i\}$ véletlen függvény értékkészlete is diszkrét halmaz, nevezetesen a v_i vektorok lehetséges értékei egy $M = m_1 m_2 \dots m_L$ elemű állapottérből valók. Tegyük fel, hogy az állapottér elemei valamilyen módon sorba vannak rendezve, ekkor v_i lehetséges értékeit (felső index nélküli) x_j -vel ($j = 1, 2, \dots, M$) jelölhetjük, ahol az x_j állapot a közt fizikai paraméterek egy kombinációja, például:

$$v_i = x_j = \begin{pmatrix} x_{j1}^{(1)} \\ x_{j2}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{jL}^{(L)} \end{pmatrix} \quad j_i = 1, \dots, m_i \quad (2)$$

ha a (2) jobboldalán álló oszlopvektornak megfelelő állapot az adott sorba rendezésnél a j -edik helyre került. $\{v_i\}$ ilyen konstrukciója biztosítja a $\{v_i^{(l)}\}$ függvények ugrási helyeinek korrelálódására tett követelményünket. Ha ugyanis $i \neq j$ -ben réteghatár van, akkor $v_{i-1} \neq v_i$, tehát a $\{v_i\}$ függvény néhány koordinátája az i pontban megváltozik, azaz a $\{v_i^{(l)}\}$ függvények közül néhánynak (esetleg mindnek, de legalább az egyiknek) ugrása van i -ben.

Térjünk rá a $\{v_i\}$ folyamat valószínűségi jellemzőinek megadására. Jelöljük α_j -vel a következő i -től független valószínűséget:

$$\alpha_j = Pr(v_i = x_j) \quad (3)$$

ahol $\sum_{j=1}^M \alpha_j = 1$, jelölje továbbá az α_j elemekből álló oszlopvektort $\bar{\alpha}$. Az α_j szám azt mutatja, hogy milyen valószínűséggel kaphatjuk egy réteg közt fizikai paramétereire az x_j állapotnak megfelelő értékeket. Ez a valószínűség az interpretációs algoritmus paramétere és így a ténylegesen mért adatok U összességétől *függetlenül* kell előírni. A legegyszerűbb esetben az $\bar{\alpha}$ eloszlást egyenletesnek adhatjuk meg: $\alpha_j = 1/M$, ennél azonban sokkal érdekesebb lehetőségünk is van. Emlékeztetünk arra, hogy mindeddig $\{v_i^{(l)}\}$ -ről, mint az

l-edik közetfizikai paramétert jellemző függvényről beszéltünk eltekintve annak konkrét fizikai jelentésétől. Mármost egy adott mélyfúrás és adott szondakombináció esetében geológiai és geofizikai megfontolások alapján gyakran tudni lehet, hogy mely paraméterkombinációk fordulhatnak elő nagy valószínűséggel *valódi közet fizikai paramétereiként*, azaz interpretálhatók, és mely kombinációk értelmetlenek. Világos, hogy ha egy mélységpontban a közetfizikai paraméterek olyan kombinációját mérjük, amit előzőleg értelmetlennek ítéltünk, akkor feltehető, hogy mérési hibával van dolgunk, ezért célszerű ezeket az adatokat kisebb súllyal bevonni az interpretációba. Vegyünk egy egyszerű példát. Tegyük fel, hogy a lyukban két fajlagos ellenállásra érzékeny szondával mértünk ($L = 2$). Ekkor nyilván azok a kombinációk kapnak nagy α_j apriori valószínűséget, melyekre $x_j^{(1)} \cong x_j^{(2)}$, a többi α_j kicsi vagy éppen zérus. Ily módon az interpretációt végző szakember az $\bar{\alpha}$ eloszlás megadásával jelentős apriori információt közölhet az algoritmussal.

Godfrey et. al. cikkükben a Markov-folyamattal való modellezést (többek között) egyfajta zajeltüntető eljárás céljára vezetik be. A szerzők az α_j valószínűségeket a mérési anyagból számított relatív gyakoriságokkal becsülik. Az ő megközelítésükben tehát $\bar{\alpha}$ az U mérési anyag paramétere. A mi céljainkra ez az eljárás nem volna megfelelő. Tegyük fel például, hogy két nagy vastagságú homogén réteg között ki akarunk mutatni egy harmadik vékony réteget. Ekkor ha az α_j értékeket a relatív gyakoriságok alapján becsülnénk, pusztán a méretek miatt a vékony réteget jellemző fizikai paraméterek kombinációjára olyan kis α_j érték adódhat, hogy az algoritmus esetleg kirekeszti a vékony réteg jelenlétére utaló adatokat az interpretációból. Példánk alapján világos, hogy az $\bar{\alpha}$ eloszlásnak nem a kőzetek előfordulási gyakoriságát kell tükröznie, sokkal inkább azt, hogy egy adott x_j kombináció milyen mértékben interpretálható egy kőzetfajta tényleges fizikai paramétereiként.

Ha megelégednénk csak az α_j valószínűségek rögzítésével, és feltennénk, hogy a folyamat független (fehér zaj), akkor egy adott

$$V = (v_0, v_1, \dots, v_N) = (x_{j_0}, \dots, x_{j_N})$$

realizációra egyenlő α_j -k esetén ($\alpha_j = 1/M$) a

$$Pr(V) = Pr(v_0 = x_{j_0}) \dots Pr(v_N = x_{j_N}) = \left(\frac{1}{M} \right)^{N+1}$$

apriori valószínűséget kapnánk. Mivel $Pr(V)$ minden realizációra ugyanaz, és az összes lehetséges V realizáció között azok vannak többségben, melyek gyorsan ugrálnak az x_j állapotok között, a fenti független folyamat nagy valószínűséggel olyan $v^{(l)}$ függvényeket adna, amelyek nem tesznek eleget a lépcsősség követelményének. Hogy a kívánt lépcsős tulajdonságot megkapjuk, a véletlen függvény bizonyos további valószínűségi jellemzőit is figyelembe vesszük, és a függetlenségnél kevésbé szigorú feltételezéssel élünk. Az előbbi $Pr(V)$ valószínűség legáltalánosabb kifejezése:

$$Pr(V) = \prod_{i=0}^N Pr(v_i | v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_0)$$

ahol a feltételes valószínűségek azt fejezik ki, hogy a $\{v_i\}$ véletlen függvény bármely mintája függ az összes előző minta értékétől. A következőkben azt a

feltevést fogjuk használni, hogy egy v_i minta kizárólag az őt megelőző v_{i-1} -től függ. Így $Pr(V)$ az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$Pr(V) = Pr(v_0) Pr(v_1|v_0) \dots Pr(v_N|v_{N-1}) \quad (4)$$

Ugyanezt felírva egy konkrét $V = (x_i, x_j, x_k \dots)$ realizációra, felhasználva, hogy $Pr(v_0 = x_i) = \alpha_i$:

$$Pr(V) = \alpha_i Pr(v_1 = x_j | v_0 = x_i) Pr(v_2 = x_k | v_1 = x_j) \dots \\ N+1 \text{ tényező}$$

A valószínűségszámításban éppen a (4) egyenlettel szokták definiálni a Markov-lánccokat. Vezessük be (4) tényezőire a következő jelölést:

$$P_{jk} = Pr(v_i = x_k | v_{i-1} = x_j) \quad (5)$$

P_{jk} jelöli tehát azt a valószínűséget, mellyel a $\{v_i\}$ véletlen függvény az x_k állapotban található, feltéve hogy az előző minta állapota x_j volt. P_{jk} -t hasonlóan az $\bar{\alpha}$ eloszláshoz az i mélységtől függetlennek tekintjük. Tömören fogalmazva P_{jk} a $j \rightarrow k$ ugrás valószínűsége, ezért

$$\sum_{k=1}^M P_{jk} = 1 \quad (6)$$

A P_{jk} elemekből felépített mátrixot P -vel jelöljük és átmenetvalószínűségi mátrixnak nevezzük. E mátrix megadásának az az értelme, hogy segítségével szabályozhatjuk a Markov-lánc által produkált „rétegek” átlagos vastagságát. Már most látható ugyanis, hogy annál vastagabb rétegekre számíthatunk, minél inkább dominál P -ben a főátló. Ha például P_{jj} megközelíti az egységet, akkor a véletlen függvény sokáig képes megmaradni az x_j állapotban. A következőkben megvizsgáljuk a P mátrix néhány tulajdonságát, majd céljainknak megfelelően rögzítjük P -t. Tegyük fel, hogy valamely i -re ismerjük a

$$P_j(i) = Pr(v_i = x_j) \quad j = 1, \dots, M \quad (7)$$

valószínűség eloszlást. Ekkor (a $p_j(i)$ elemekből felépített oszlopvektort $\bar{p}(i)$ -vel jelölve) könnyen belátható, hogy a következő mélységre vonatkozó $\bar{p}(i+1)$ eloszlást az alábbi módon számíthatjuk.

$$\bar{p}^T(i+1) = \bar{p}^T(i) P \quad (8)$$

(A felső T index a transzponálás jele.) Eléggé kézenfekvő azt várni, hogy a kezdeti állapot hatása fokozatosan elenyészik, és így a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}^T(i+n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}^T(i) P^n \quad (9)$$

határérték $\bar{p}(i)$ -től független. Ez valóban így van, sőt belátható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}^T P^n = \bar{\alpha}^T \quad (10)$$

minden \bar{p} -re, ezenkívül

$$\bar{\alpha}^T P = \bar{\alpha}^T. \quad (11)$$

A (10) és (11) egyenletek szerint $\bar{\alpha}$ a Markov-lánc ún. invariáns eloszlása. Ezekután specializáljuk a P mátrixot a következő alakban.

$$P = \lambda I + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} \bar{\alpha}^T \\ \bar{\alpha}^T \\ \vdots \\ \bar{\alpha}^T \end{pmatrix} \quad (12)$$

ahol I az egységmátrix, és λ skalár ($0 \leq \lambda < 1$). P fenti definíciója természetesen csak akkor értelmes, ha P kielégíti a (6) és (11) egyenleteket. Az olvasóra bízunk annak belátását, hogy a (12) szerint választott P -vel (6) és (11) valóban teljesül. Látjuk, hogy a λ szám P főátlójának nagyságát szabályozza, így egy előző megjegyzésünk értelmében λ az átlagos rétegvastagsággal áll szoros kapcsolatban. Például $\lambda = 0$ esetén a korábban már tekintett független folyamat áll elő, ekkor az átlagos rétegvastagság minimális. A másik határesetben ($\lambda \rightarrow 1$) a folyamat realizációi egyetlen rétegből állnak, azaz a $\{v_j\}$ függvény minden i -re azonos x_j állapotban marad, így a rétegvastagság maximális.

Legyen most $v_i = x_j$, és számítsuk ki azt a valószínűséget, mellyel $\{v_i\}$ még pontosan $n - 1$ lépésen keresztül a j -edik állapotban marad.

$$\begin{aligned} Pr(v_i = v_{i+1} = \dots = v_{i+n-1} = x_j, v_{i+n} \neq x_j) = \\ = P_{jj} P_{jj} \dots P_{jj} (1 - P_{jj}) = (1 - P_{jj}) P_{jj}^{n-1} \end{aligned} \quad (13)$$

Ebből az n lépésszám várható értékét képezve, egy x_j állapotú réteg átlagos vastagsága

$$w_j = (1 - P_{jj}) \sum_{n=1}^{\infty} n P_{jj}^{n-1} = \frac{1}{1 - P_{jj}} = \frac{1}{(1 - \lambda)(1 - \alpha_j)}, \quad (14)$$

ahol felhasználtuk a geometriai eloszlás várható értékének képletét. A (14) egyenlet tehát összefüggést ad meg λ és az átlagos rétegvastagság között.

Ismét utalunk *Godfrey et. al.* cikkére, ahol a szerzők λ -t az U mérési anyag paraméterének tekintik, és részletesen foglalkoznak λ -nak U alapján történő becslésével. Jelen cikkben λ -t úgy kezeljük, mint az eredményül kapott rétegsor átlagos rétegvastagságát befolyásoló paramétert. Mivel a modell kívánatos felbontottsága elsősorban az interpretáció céljától függ, ezért az interpretációt végző szakembernek λ -t az U mérési anyagtól függetlenül kell meghatároznia. Szeizmikus kiértékelésben használható modell számításakor például célszerű lehet 10–500 m -es felbontottságra törekedni. Az eddigieket tömören összefoglalva:

Az α_j valószínűségek és a λ paraméter előírásával a P mátrix felépítése révén konstruáltunk egy L dimenziós Markov-láncot. Az ebből származó $\{v_i^{(l)}\}$ függvények teljesítik az első részben megfogalmazott 1. és 3. követelményeket, azaz az átlagos lépcsőszélességük szabályozható és ugrási helyeik korrelációban vannak. Ezenkívül a (4) képlet $\{v_i\}$ minden realizációjához egy apriori valószínűséget rendel.

III. A lépcsős függvények illesztése

A következő lépés, hogy a $\{v_i\}$ folyamat realizációi közül kiválasszuk azt, amelynél a $v^{(l)}$ függvények optimálisan illeszkednek az U adatrendszerhez (lásd az első rész 2. követelményét). Tekintsük a következő egyenletet, melyet a szakirodalomban gyakran a kísérleti anyag additív modelljének neveznek [4].

$$U = V + N \quad (15)$$

ahol eddigi jelöléseinkkel összhangban U a mérési adatok összességéből felépített mátrix, V a lehetséges rétegsorok közetfizikai paramétereinek elméleti értékeit tartalmazó mátrix, N pedig az előző kettő eltérése. V -t úgy fogjuk megválasztani, hogy N -t kicsivé tegyük, ezért az N mátrix elemei zajnak tekinthetők, és világos, hogy $n_i^{(l)} = u_i^{(l)} - v_i^{(l)}$, valamint $Pr(N) = Pr(U|V)$. N elemeiről feltesszük, hogy függetlenek, normális eloszlásúak, 0 várható értékűek és σ_i szórással rendelkeznek. Megjegyezzük, hogy mind a függetlenségre vonatkozó feltevés, mind az eloszlás fajtája tekintetében léteznek más értelmes alternatívák is, amelyekre a most következő levezetés kisebb módosításokkal átvihető. Így például tárgyalhatók azok az esetek, amikor megengedjük, hogy n_{i-1} és n_i korrelációban álljanak, σ_i pedig függjön a mélységtől [6]. A [3] cikkben példát találhatunk más eloszlás alkalmazására is.

Optimalitási kritériumnak a maximális a posteriori valószínűség elvét fogadjuk el. Ennek szemléletes tartalma az, hogy olyan optimális \hat{V} mátrixot keresünk, amely kicsivé teszi N elemeit, miközben a hozzátartozó (4) a priori valószínűség viszonylag nagy. Pontosabban:

$$\hat{V} = V\{\max Pr(V|U)\} \quad (16)$$

(16) jobboldala azt a V mátrixot jelenti, amelyik maximalizálja a $Pr(V|U)$ valószínűséget. Felhasználva Bayes tételét:

$$\hat{V} = V\left\{\max \frac{Pr(U|V) Pr(V)}{Pr(U)}\right\} \quad (17)$$

Figyelembe véve, hogy a maximum nem függ a nevezőtől, és képezve a tényezők negatív logaritmusát:

$$\hat{V} = V\{\max Pr(U|V) Pr(V)\} = V\{\min [-1nPr(U|V) - 1nPr(V)]\} \quad (18)$$

N elemeinek függetlenségére vonatkozó feltevésünk és (4) alapján:

$$\hat{V} = V\left\{\min \left[-\sum_{i=0}^N \sum_{l=1}^L 1nPr(u_i^{(l)}|v_i^{(l)}) - \sum_{i=0}^N 1nPr(v_i|v_{i-1})\right]\right\} \quad (19)$$

(19) jobboldalán minden tagot kiszámíthatunk. Figyelembe véve az $n_i^{(l)}$ mennyiségek valószínűség eloszlására vonatkozó feltevéseinket, felhasználva a korábban bevezetett α_j , P_{jk} jelöléseket, egy konkrét $V = (x_{j_0}, x_{j_1}, \dots)$ realizáció esetén a (19) -ben minimalizálandó függvényre a következő kifejezés adódik:

$$C(V) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \sum_{l=1}^L \left(\frac{(u_i^{(l)} - x_{j_l}^{(l)})^2}{\sigma_l} \right) - 1n\alpha_{j_0} - \sum_{i=1}^N 1nP_{j_{i-1}, j_i} \quad (20)$$

Itt elhagytuk azokat a (19)-ben szereplő tagokat, amelyek V -től függetlenek, és így a maximum helyét nem befolyásolják. A (20) veszteségfüggvény minimalizálásával kapjuk a keresett \hat{V} optimális becslést. Rátérünk annak az algoritmusnak leírására, amely segítségével megkereshetjük (20) minimumát. Alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$$D_{j,i} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^L \left(\frac{u_i^{(l)} - x_j^{(l)}}{\sigma_l} \right)^2 \quad (21)$$

$$i = 0, 1, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M$$

ahol $D_{j,i}$ az i -edik mélységpontban mért $u_i^{(l)}$ értékek és az elméleti $v_i^{(l)} = x_j^{(l)}$ értékek eltéréséből származó veszteségjáruléék. Legyen továbbá:

$$T_{j,k} = -1n P_{jk} \quad (22)$$

$$j, k = 1, \dots, M$$

ahol $T_{j,k}$ a $v_{i-1} = x_j$, $v_i = x_k$ állapotváltásból származó veszteségjáruléék. Ezekután tekintsük a következő rekurzív összefüggést:

$$C_{j,0} = -1n \alpha_j + D_{j,0}$$

$$C_{j,i+1} = \min_k \{ C_{k,i} + T_{k,j} \} + D_{j,i+1} \quad (23)$$

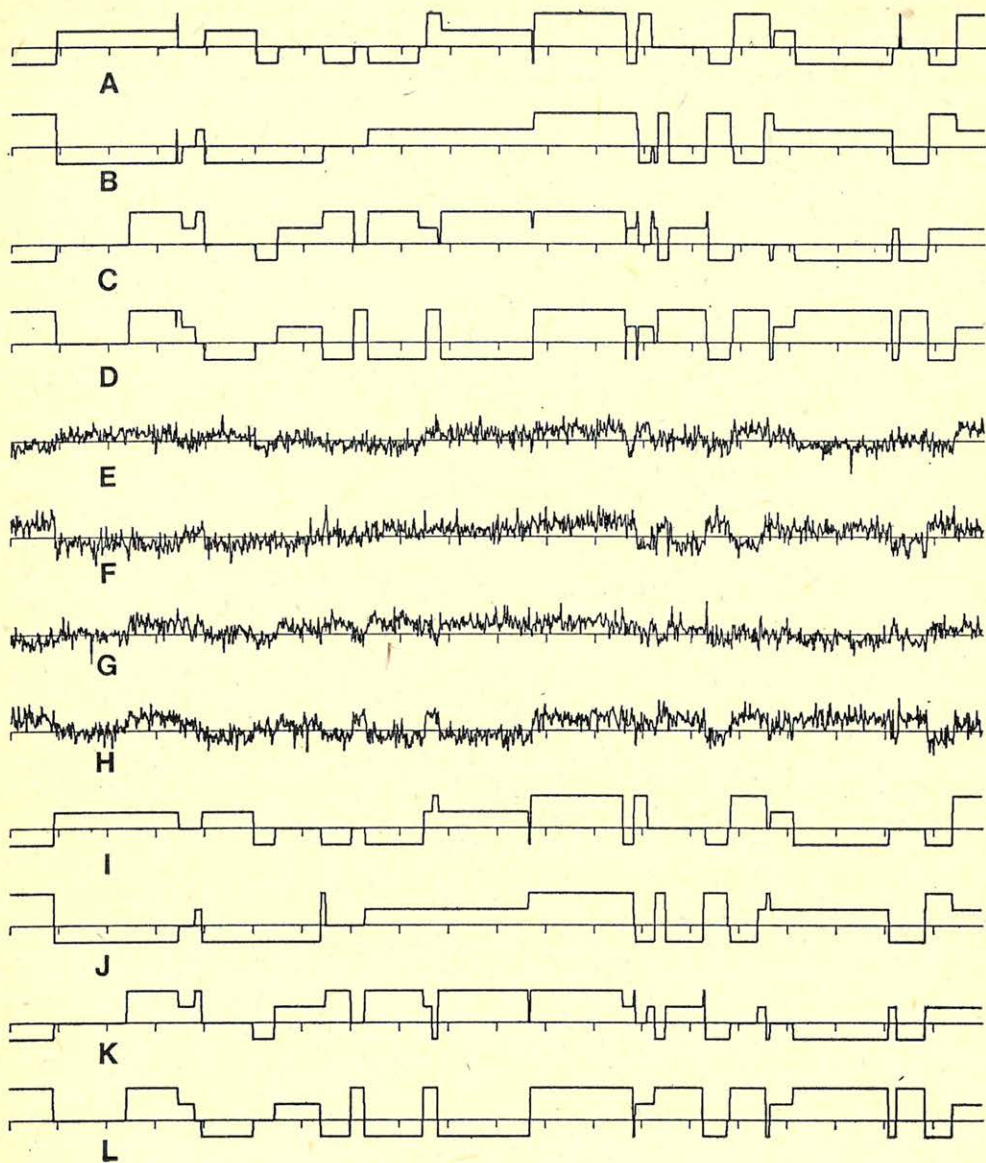
$$i = 0, 1, \dots, N$$

$$j, k = 1, 2, \dots, M$$

N -re vonatkozó teljes indukcióval belátható, hogy a $C_{j,N}$ veszteségértékek rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal. Azon (20) szerint számított veszteségek közül, melyek az x_j állapottal végződő (tehát $v_N = x_j$) realizációkhoz tartoznak a minimális veszteség éppen $C_{j,N} \cdot N = 0$ esetén ez az állítás triviális. A teljes indukció szabályai szerint feltesszük, hogy állításunk igaz $C_{k,N-1}$ -re minden $k = 1, \dots, M$ esetén. Ekkor a $v_{N-1} = x_k$, $v_N = x_j$ végződésű minimális veszteségű realizációhoz tartozó veszteségérték $C_{k,N-1} + T_{k,j} + D_{j,N}$. Mivel az optimális $v_N = x_j$ végződésű realizáció is ezek között van, az ehhez tartozó veszteség nyilván a k szerint vett minimummal egyenlő. Ezzel állításunkat bizonyítottuk. Az optimális $\{v_i\}$ függvény meghatározásához kiszámítjuk a $C_{j,i}$ veszteségeket minden $j = 1, \dots, M$ és $i = 0, \dots, N$ -re, eközben megőrizzük a (23)-ban minimumot biztosító k indexeket. A minimális $C_{j,N}$ veszteséghez tartozó ágon a k indexekben visszafelé haladva adódik az optimális $\{v_i\}$, ennek koordinátái pedig a keresett $\{v_i^{(l)}\}$ lépcsős függvényeket szolgáltatják.

IV. Szintetikus és terepi példák

Az algoritmus illusztrálására tekintsük a 3. ábrát. A 3. ábra A, B, C, D lépcsős függvényeit a II. pontban leírt Markov-lánc realizációjaként kapjuk. A négydimenziós függvény hossza 1000 minta, minden görbe 4 lehetséges értéket vehet fel, így az állapottér $M = 4^4 = 256$ elemű. Az $\bar{\alpha}$ eloszlást egyenletesnek választottuk, az átlagos lépcsőszélességet meghatározó λ paraméter értéke 0.97 volt. Az A, B, C, D görbékben normális eloszlású, nulla várható értékű, független zaj hozzáadásával készítettük az E, F, G, H görbéket, utóbbiak képezték az algo-



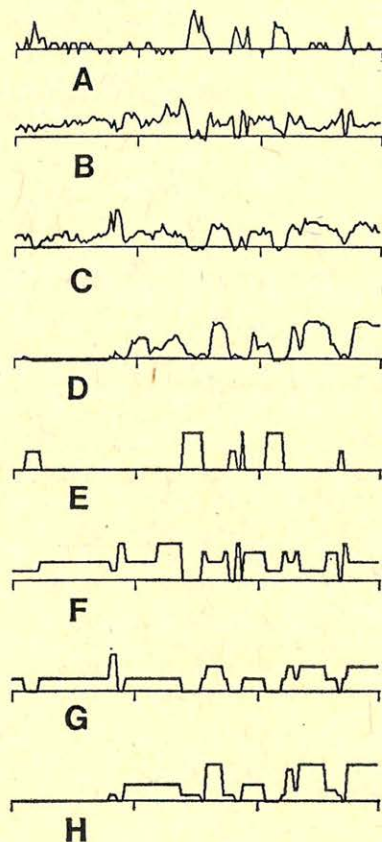
GEO 84/16-3

3. ábra Szintetikus példa négy csatornával
 Рис. 3. Синтетический пример с четырьмя каналами
 Fig. 3. Synthetic example including four channels

ritmus bemenetét. Az algoritmus eredménye az *I, J, K, L* görbe, ezek az *A, B, C, D* lépcsős függvények becslésének tekintendők. A megfelelő görbék hasonlósága — csak egészen apró eltérések vannak — mutatja az eljárás nagy teljesítő-képességét.

Mielőtt továbbmennénk, emlékeztetünk arra, hogy a $\{v_i\}$ L dimenziós lépcsős függvény ugrási helyeit tekintjük réteghatárnak, továbbá hogy a geológiai és geofizikai viszonyok ismeretében $\{v_i\}$ lehetséges állapotaihoz hozzárendelhetők az adott területen előforduló kőzetfajták. Így módon a karotázsszelvényekhez illesztett lépcsős függvényeket rétegmodellként értelmezhetjük. A réteghatárok kijelölése egyértelmű, míg $\{v_i\}$ állapotai és a kőzetfajták közti hozzárendelést ebben a dolgozatban nem konkretizáljuk.

A 4. és 5. ábrán a Visonta F-389/0 mélyfúrás szelvényei alapján készült különböző felbontottságú rétegmodelleket mutatunk be.



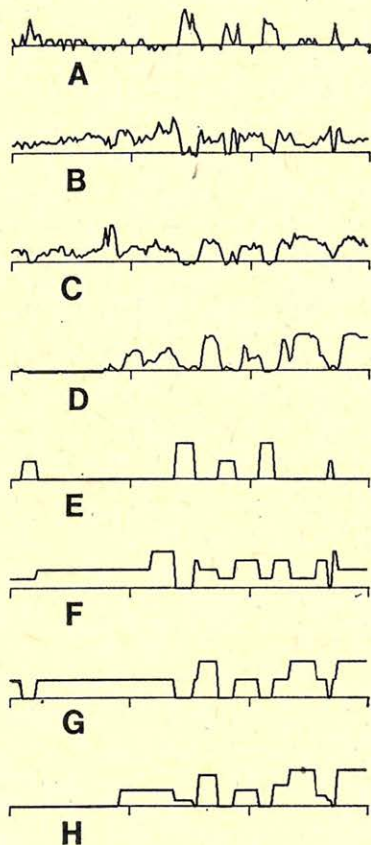
GEO 84/16-4

4. ábra Visonta F-389/0 mélyfúrás; kompenzált $\gamma\gamma$, természetes γ , neutron-neutron és ellenállás szelvényekhez illesztett lépcsős függvények

Рис. 4. Скважина F-389/0 Вишонта, ступенчатые зависимости совмещенные с кривыми компенсированный $\gamma\gamma$ каротаж, естественный γ , кривой нейтрон-нейтрон и кривой сопротивления

Fig. 4. Borehole Visonta F-389/0; step functions fitted to compensated $\gamma-\gamma$ natural γ , neutron-neutron and resistivity logs

Az ábrák *A, B, C, D* görbéje rendre kompenzált $\gamma\gamma$, természetes γ , neutron-neutron és ellenállás szelvény. A szelvények *150 m* mélységet fognak át *1 m*-enként mintavételezve. Az algoritmus kimenete az *E, F, G, H* lépcsős függvény. Ezek *3, 5, 4* és *8* elemű értékkészlettel rendelkeznek, így az állapottér $3 \times 5 \times 4 \times 8 \times = 480$ elemű. Mindkét esetben az $\bar{\alpha}$ eloszlást egyenletesnek adtuk meg, λ értéke *0.98* volt. Az azonos bemeneti anyag alapján készült két rétegmodell közti eltérés – a *4. ábrán* látható modell részletesebb, mint az *5. ábra* modellje – oka az eltérés komponens szórásának különbözősége. A *4. ábra* esetében az algoritmus az eltérés komponensnek kisebb σ_i szórásértékeket tulajdonított, mint az *5. ábra* példájában. A σ_i szórások nagysága a következő módon hat az illesztett $\{v_i^{(0)}\}$



GEO 84/16-5

5. ábra Visonta F–389/0 mélyfúrás; kompenzált $\gamma\gamma$, természetes γ , neutron-neutron és ellenállás szelvényekhez illesztett lépcsős függvények

Рис. 5. Скряжина F–389/0 Вишонта, ступенчатые зависимости совмещенные с кривыми компенсированный $\gamma\gamma$ каротаж, естественный γ , кривой нейтрон-нейтрон и кривой сопротивления

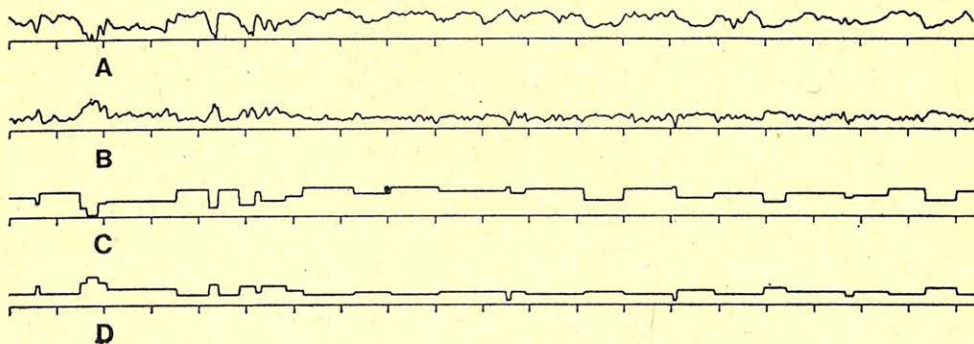
Fig. 5. Borehole Visonta F–389/0; step functions fitted to compensated γ – γ natural γ , neutron-neutron and resistivity logs

függvények lépcsőszerűségére. Növekvő σ_1 esetén az adatoktól való nagy eltérés sem növeli lényegesen a (20) veszteségfüggvény értékét, így egyre inkább a kevés ugrást tartalmazó, nagy apriori valószínűségű lépcsős függvények kerülnek előtérbe. Nullához tartó σ_1 esetén viszont az adatoktól való legkisebb eltérés is korlátlanul növelheti a veszteségfüggvényt, ezért $\{v_i^{(0)}\}$ gyakorlatilag meg fog egyezni az eredeti $\{u_i^{(0)}\}$ adatrendszerrel. Látjuk tehát, hogy σ_1 növekedése általában az illesztett lépcsős függvény lépcsőinek szélesedését, így a rétegmodell felbontottságának csökkenését okozza. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha meggondoljuk, hogy nagy eltérés komponens (zaj) mellett, tehát nagy bizonytalanságú kis információ tartalmú adatokból nem szerkeszthetünk részletes, sok információt tartalmazó modellt. Érdekes ezen a helyen összefoglalnunk azokat a tényezőket, amelyek meghatározzák az eredményül kapott rétegmodell felbontottságát.

1. Maga a mérési anyag, illetve a rétegek tényleges vastagsága.
2. A (12)-beli λ paraméter.
3. Az eltérés komponens szórása.

Az eltérés komponens szórásával kapcsolatban megjegyezzük még, hogy azt az $\bar{\alpha}$ eloszláshoz és a λ paraméterhez hasonlóan az interpretáció paraméterének tekinthetjük, és így nincs szükség σ_1 -nek az U mérési anyag alapján történő becslésére. A szórások legfontosabb szerepe, hogy megfelelő előírásukkal szabályozhatjuk az egyes szelvények részvételének súlyát a rétegmodell kialakításában.

A 6. és 7. ábrán az AL745-ös mélyfúrásban felvett sűrűség és akusztikus terjedési idő szelvényeket (A és B görbék), valamint az ezekhez illesztett különböző felbontottságú lépcsős függvényeket (C, D) láthatjuk. A rétegmodelleket szeizmikus kiértékelés számára készítettük.

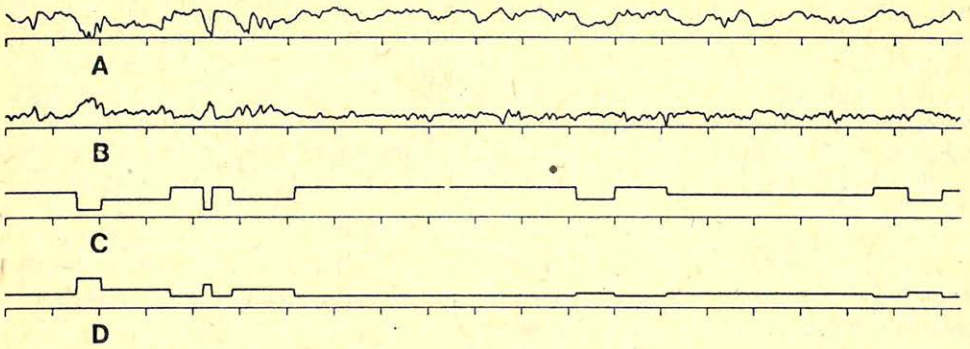


GEO 84/16-6

6. ábra AL745 mélyfúrás; sűrűség és akusztikus terjedési idő szelvényhez illesztett lépcsős függvények

Рис. 6. Скважина AL-745, ступенчатые зависимости, совмещенные с кривыми плотности и акустического времени прохождения

Fig. 6. Borehole AL745; step functions fitted to density and acoustic logs



GEO 84/16-7

7. ábra AL745 mélyfúrás; sűrűség és akusztikus terjedési idő szelvényhez illesztett lépcsős függvények

Рис. 7. Скважина AL – 745, ступенчатые зависимости, совмещенные с кривыми плотности и акустического времени прохождения

Fig. 7. Borehole AL745; step functions fitted to density and acoustic logs

V. Rétegek lassan változó fizikai paraméterekkel

E pontban elhagyjuk azt a feltevést, hogy egy réteg belsejében minden kőzetfizikai paraméter konstans, és megengedjük ezek *lassú* változását egy rétegen belül is. Valamely kőzetfizikai paraméter ugrásszerű változását azonban továbbra is réteghatárnak tekintjük. Hogy korábbi eredményeinket alkalmazni tudjuk, célszerű a mérési anyagot olyan átalakításnak alávetni, amely után azt a homogén rétegek esetéhez hasonlóan kezelhetjük. E célból a karotázsszelvényeket felbontjuk egy lassan változó és egy ugró függvény összegére. Az első komponens matematikailag szakaszonként lineáris, folytonos (törtlineáris) függvénnyel fogjuk leírni, míg a második komponens a korábban tárgyalt lépcsős függvény lesz. A közeg rétegződésére vonatkozó információt nyilván a lépcsős függvény hordozza. A lassan változó komponens levonjuk az eredeti mérési anyagból, így olyan másodlagos mérési anyaghoz jutunk, amely már kielégíti a homogén rétegek esetére kidolgozott algoritmus feltételeit.

Matematikai modellünk alapjául egy kétdimenziós Markov-lánc (lásd a II. pontot) szolgál.

$$\{v_i\}_{i=0}^N, \quad v_i = \begin{pmatrix} v_i^{(1)} \\ v_i^{(2)} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Ebből egyszerűen megalkothatjuk a kísérleti anyag additív modelljét.

$$w_i = v_i^{(1)} + \sum_{j=0}^i v_j^{(2)} + n_i \quad (25)$$

$$i = 0, \dots, N$$

ahol w_i a felbontandó karotázsszelvény adatait jelöli. Alkalmassá diszkrét érték-készletet választva $\{v_i^{(1)}\}$ -nek és $\{v_i^{(2)}\}$ -nek elérhetjük, hogy (25) jobboldalának

első és második tagja a kívánt tulajdonságú lépcsős függvény, illetve a lassan változó törtlineáris függvény legyen. A harmadik tag az eltérés komponens, melyre vonatkozóan most is élünk a (15) után tett feltevésekkel. Célunk, hogy megkeressük a $\{w_i\}$ mérési adatokhoz legjobban illeszkedő $\{v_i^{(1)}\}$ és $\{v_i^{(2)}\}$ függvényeket. Az illesztés kritériumaként ismét a maximális a posteriori valószínűség elvét alkalmazzuk. A (16)–(20) képletek levezetéséhez hasonló módon (ezek részletezését az olvasóra bízjuk) az alábbi optimalizáló algoritmushoz jutunk.

Tegyük fel, hogy a (24) folyamat egy realizációjának $i-1$ -edik mintája a k -adik, i -edik mintája a j -edik állapotban van, és jelölje a lassan változó komponens k -adik állapothoz és $i-1$ -edik mintához tartozó értékét $S_{k,i-1}$. Ekkor a mérési adatoktól való eltérés vesztesége:

$$D_{kj,i} = \frac{1}{2\sigma^2} (w_i - x_j^{(1)} - x_j^{(2)} - S_{k,i-1})^2 \quad (26)$$

ahol σ az eltérés komponens szórása. A teljes veszteségre vonatkozó (23)-mal analóg rekurzív összefüggés most a következő alakú.

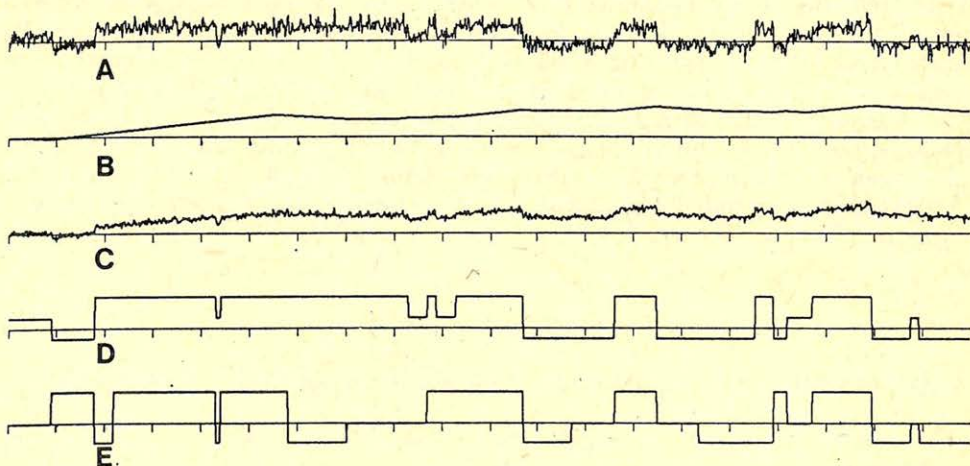
$$C_{j,i+1} = \min_k \{C_{k,i} + T_{kj} + D_{kj,i+1}\} \quad (27)$$

ahol T_{kj} jelentése ugyanaz, mint (22)-ben. Meg kell még adni $S_{j,i}$ rekurzív kifejezését, ez egyszerűen

$$S_{j,i} = S_{k,i-1} + x_j^{(2)} \quad (28)$$

Itt k az az index, amely (27)-ben a minimumot biztosítja. A (23) után mondottak a (26)–(28) képletek által megadott algoritmusra is érvényesek, a teljes indukciós bizonyítás majdnem szó szerint megismételhető.

Az algoritmus működését a 8. ábra példáján mutatjuk be.



GEO 84/16-8

8. ábra Szintetikus példa inhomogén rétegekkel
 Рис. 8. Синтетический пример с неоднородными пластами
 Fig. 8. Synthetic example containing inhomogeneous layers

A 8. ábra A görbéje egy additív zajjal terhelt lépcsős függvény, míg B viszonylag lassan változik és szakaszonként lineáris. E kettő összegeként adódott a C görbe, ami az algoritmus bemenete volt. Az algoritmus eredménye a D és E lépcsős függvény, ezek felelnek meg $\{v_i^{(1)}\}$ -nek, illetve $\{v_i^{(2)}\}$ -nek. Az E függvényt integrálva megkaphatnánk a B függvény becslését, D pedig gyakorlatilag megegyezik az A görbe zajmentes változatával. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az egyes görbék függőleges léptéke a rajz normalálása miatt különböző.)

Összefoglalás

A dolgozatban rétegmelleket szerkesztettünk azonos mélyfúrásban mért több karotázsszelvény alapján. A felhasznált szelvények fajtájára vonatkozóan semmilyen kikötést nem tettünk, feltettük viszont, hogy a réteghatárok helyén a szelvénykombináció egy vagy több elemén ugrásszerű változás van. A feladatot olyan lépcsős függvények keresésére vezettük vissza, melyek optimálisan illeszkednek a szelvények adataihoz, ugrási helyeik korrelálódhatnak és a lépcsők átlagos szélessége szabályozható. A lépcsős függvényeket egy többdimenziós (vektor értékű) Markov-lánc realizációiként nyertük. A Markov-lánc állapotai és az adott fúrásban előforduló kőzetfajták között hozzárendelés létesíthető, bár ezt a hozzárendelést ebben a dolgozatban seholsem konkretizáltuk. Az \bar{x} eloszlás és ezen keresztül a P átmenetvalószínűségi mátrix felépítésével olyan apriori információt közölhetünk az algoritmussal, amely jellemzi a rendelkezésre álló szelvénykombinációt és a kutatási terület geológiai viszonyait. Az algoritmus ily módon képes különbséget tenni a paraméterek fizikailag értelmes és értelmetlen kombinációi között. Az állapotok és a kőzetfajták közötti megfeleltetés megadása, valamint az \bar{x} eloszlás előírása a gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából nagyon fontos. E feladatokat meg kell oldani minden gyakran használt szondakombinációra és minden kutatási területre.

A cikkben leírt módszer — a kidolgozottság jelenlegi fokán — még nem tekinthető a címben ígért univerzális rétegsor meghatározó eljárásnak. A szerző szándéka csupán az volt, hogy, olyan egyelőre inkább csak matematikai eszközt nyújtson a karotázsszal foglalkozó szakembereknek, amely alapján esetleg megvalósítható lesz a gyakorlat számára is megfelelő értelmezési rendszer.

IRODALOM

- [1] *Dowds, J. P.*, 1969, Oil rocks: information theory: :Markov chains : entropy, Colorado School Mines Quart., v. 51, No 3, p. 275–293.
- [2] *Feller, W.*, 1978, Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba, XV. fejezet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [3] *Godfrey, R., Muir, F., Rocca, F.*, 1980, Modeling seismic impedance with Markov chains, Geophysics, v. 45, p. 1351–1372.
- [4] *Golcman, F. M.*, 1971, Sztatizticszeszkije modeli interpretacii, Izd. Nauka, Moszkva.
- [5] *Lawler, E. L.*, 1982, Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok, 3. fejezet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
- [6] *Vermes Mátyás*, 1984, Intervallumsebesség függvény számítás függőleges szeizmikus szelvényezés (VSP) adataiból, Magyar Geofizika (megjelenőben).