

Karotázs elektromos mérések eredményeinek kiértékelése matematikai statisztikai becslési módszerrel

DRAHOS DEZSŐ*

A mérési eredmények kiértékelésénél alkalmazott idealizált modellek sohasem egyeznek a valóságos viszonyokkal, valamint a mért mennyiségek is tartalmaznak valamekkora mérési hibát. Ezek a hatások bizonytalanságot jelentenek a keresett paraméterek meghatározásában. A dolgozat ezt a problémakört vizsgálja a karotázs elektromos mérések esetében. A szokásos kiértékelési eljárások a paraméterek (R_1 , D) megbízhatóságára nem adnak mértékszámot. A meghatározott paraméterek bizonytalanságát demonstráljuk egy laterolog mérési anyag kétféle hagyományos módszerrel végzett kiértékelési eredményeinek összehasonlításával, amely azt mutatja, hogy a különbözőképpen kapott eredmények között jelentős eltérések lehetnek. Az ellentmondás feloldására matematikai statisztikai becslési módszerrel értékeltük ki a mért eredményeket. Így a paraméterek becsült értékei mellett megkapjuk azok bizonytalanságát jellemző hibákat is. A dolgozat ismerteti a kiértékelési módszert, valamint ennek alkalmazását szimulált mérési adatokra és terepi mért adatokra.

Идеализированные модели, применяемые для оценки результатов измерений, никогда не совпадают с реальными условиями, так же как измеренные величины всегда содержат некоторую ошибку измерений. Влияние этих факторов вносит неуверенность в определение искоемых параметров. В данной работе этот вопрос исследуется для случая электрокаротажных измерений. Обычные методы оценки не дают численного значения надежности параметров (D , R_1). Неуверенность в определении параметров авторы демонстрируют с помощью сравнения результатов обработки материала измеренного laterолога двумя традиционными методами. Сравнение показывает, что между полученными различными способами результатами возможны существенные расхождения. Для разрешения противоречия была проведена оценка результатов измерений с помощью математико-статистического метода. Это позволило помимо оценок самих параметров получить и ошибки, характеризующие неуверенность их определения. В статье изложен метод оценки, а также его применение для случаев искусственного массива данных и данных полевых измерений.

Models applied for interpretation of measured data are always idealised and the data contain measuring errors. These factors lead to uncertainty in the parameters to be determined. The paper deals with this problem in the case of evaluation of electrical logs. The classical methods of evaluation do not give the measure of uncertainty of the determined parameters. This uncertainty is demonstrated here by the evaluation of the same measurements in two different ways, which led to different results. To overcome this difficulty, mathematical statistical evaluating method was applied for the interpretation. It gives the estimates of the parameters and also their standard deviations. The paper describes the estimation method and its application for simulated and real data.

Bevezetés

A mélyfúrési geofizikai adatok kiértékelésének elsődleges eredményei a vizsgált kőzettartományt jellemző különböző kőzetfizikai paraméterek, például sűrűség, fajlagos ellenállás, porozitás stb., valamint a kőzet anyagi összetételét jellemző mennyiségek, mint például agyagosság, víztelítettség, hamutartalom stb. számszerű értékei. A gyakorlatban elterjedt kiértékelési eljárások a vizsgált kőzetfizikai paraméterre egyetlen mennyiséget adnak meg; például a sűrűség

* ELTE Geofizikai Tanszék

esetében $\delta = 2,26 \text{ g/cm}^3$, fajlagos ellenállás esetében $R_t = 185 \Omega \text{ m}$ stb. Közismert dolog, hogy a mérési eredményeket többféle, különböző eredetű hiba terheli, továbbá a kiértékelés során használt idealizált modellek sem fedik a valóságot. Mindezek a hatások befolyásolják a kiértékelés eredményeit, a kapott paraméterek megbízhatóságát. A fenti számszerű példáknál azonban nem derül ki, hogy ezek a határok milyen mértékűek voltak, és a kapott D , R_t paraméter értékek mennyire tekinthetők megbízhatónak.

A paraméterek meghatározásának bizonytalanságát jól szemlélteti egy az SZKFI-nél végzett interpretációs kísérlet, amelynek mérési anyagát és a meghatározott rétegpáraméter értékeket az 1. táblázat tartalmazza. Négy különböző laterolog szelvény alapján, az ezekből kiválasztott kétféle szondakombinációra

1. táblázat

Algyői fúrásban felvett elektromos mérési anyag kiértékelése az $ML-PLH$ és az $OL-PLH$ kiértékelési diagramok alapján. Jelölések: mikrolaterolog (MLL), optimális laterolog (OL), rövid pszeudolaterolog (PLR), hosszú pszeudolaterolog (PLH). H a rétegek vastagsága méterben.

Таблица 1.

Оценка материала электрических измерений, записанных в скважине Алдэ, на основании диаграмм $ML-PLH$ и $OL-PLH$. Обозначения: микролатеролог (MLL), оптимальный латеролог (OL), короткий псевдолатеролог (PLR), длинный псевдолатеролог (PLH). H – толщина слоев в метрах

Table 1.

Evaluation of measured electrical data on the basis of the $ML-PLH$ and $OL-PLH$ laterolog butterfly diagrams. Note the different results of the two different interpretations. Abbreviations: Microlaterolog (MLL), optimal laterolog (OL), short pseudolaterolog (PLR) and long pseudolaterolog (PLH). H is the thickness of layers in meters.

Sor-szám	H (m)	R_a^{MLL}	R_a^{OL}	R_a^{PLR}	R_a^{PLH}	R_a^{ML}	$ML-PLH$		$OL-PLH$	
							R_t	D	R_t	D
1	3,2	6,8	145	13,5	135	140	530	4,3	170	2,2
2	1,5	6,2	22	4,5	18	12,5	40	4	30	3,5
3	1,7	6,5	27,5	6	23	16,4	52	4,5	38	3,2
4	5,5	6,2	32,5	7	30,2	17,7	60	3,5	42	3,2
5	1,1	3,2	17,5	4,9	20,1	12,8	43	3,6	20	1
6	1,9	6,2	24	6	27,5	15	52	3,7	26	1
7	1,3	7	60	6,8	45	27,5	100	3,5	80	3,1
8	6,5	6,5	50	8	45	20	75	2,9	63	2,5
9	2,2	11,2	100	12	80	115	450	4,6	170	2,8
10	10,2	8,2	55	9,5	45	22,5	80	3,5	71,5	3
11	2,2	6,5	40	7,5	45	17,5	60	3	45	2
12	9,6	5,5	7,5	3,5	9	6	18,8	3	—	—

vonatkozó görbeseregek segítségével határozták meg az egyes rétegekre az R_t és D valódi fajlagos ellenállás, illetve relatív elárasztási mélység paramétereit. Az eredményeket megvizsgálva látható, hogy a kétféle interpretáció eredményei nem egyeznek, közöttük igen nagy különbség is előfordul. Ezek után felvetődik a kérdés, hogy melyik eredményt tekintsük elfogadhatónak, illetve hogy a kiértékelés eredménye mennyire megbízható. A továbbiakban ezt a problémát vizsgáljuk a laterologellenállás mérések kiértékelésének esetében.

A statisztikai elveken alapuló interpretáció matematikai algoritmusai

1. A statisztikai elveken alapuló interpretációs algoritmusok alapfeltételezése, hogy a mérésekből származó kísérleti anyagot valószínűségi jellegűnek tekintjük. Az interpretációs algoritmusok felépítése során meg kell különböztetni a vizsgált mennyiségek mérési eredményekből kapott értékeit — amelyeket valószínűségi változók realizációinak tekintünk, — valamint a szóban forgó mennyiségek bizonyos ideális modellre meghatározható elméleti értékeit. Ezeket a különböző eredetű mennyiségeket a továbbiakban általános esetben U és f szimbólumokkal, konkrétan pedig (M) és (T) felső indexszel jelöljük. Például az R_a látszólagos fajlagos ellenállásra vonatkoztatva: $R_a^{(M)}$ a mért, $R_a^{(T)}$ az elméleti számított értéket jelenti. A karotázs elektromos szondázásoknál a mért mennyiségek eredetük szempontjából két csoportba oszthatók:

a) az első csoportba tartoznak a közvetlenül mérőműszerekkel meghatározható, elsődleges mérési eredmények, például a feszültség ($V^{(M)}$), az áramerősség ($J^{(M)}$), elektródátávolságok ($L_{AM}^{(M)}$, $L_{AO}^{(M)}$);

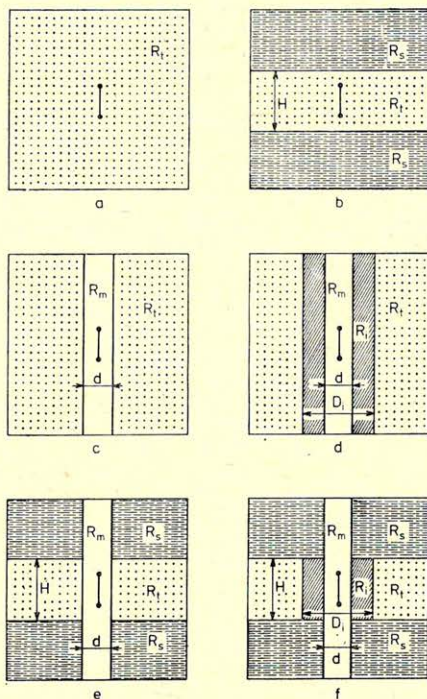
b) a második csoportba az előbbiekből leszarmaztatott, másodlagos mérési eredmények tartoznak. Esetünkben ilyen az $R_a^{(M)}$ látszólagos fajlagos ellenállás.

2. A mérési eredmények interpretációjához az interpretátornak meg kell választania valamilyen ideális fajlagos ellenállás eloszlást — a vizsgált geológiai közeg modelljét, amely a bonyolult valóságos viszonyok lényeges, jellemző vonásait tükrözi. A karotázs elektromos mérések szempontjából figyelembe veendő legfontosabb tulajdonság az, hogy a közeg a fúrólyuk tengelyére nézve többé-kevésbé hengersizmetrikus. Radiális irányban két vagy három különböző fajlagos ellenállású zóna (radiális réteg) különíthető el attól függően, hogy nem porózus, vagy porózus kőzetet vizsgálunk. Ezenkívül szerepe van a vizsgált zóna fölött és alatt elhelyezkedő különböző fajlagos ellenállású ágyazórétegeknek.

Ennek megfelelően a karotázs elektromos probléma megoldásánál a következő közegmodellek jöhetnek számításba:

- Végtelen homogén izotrop R_t fajlagos ellenállású közeg, a fúrólyuk átmérője elhanyagolhatóan kicsiny.
- H vastagságú, R_t fajlagos ellenállású réteg, R_s fajlagos ellenállású félvégtelen ágyazó rétegek között. A fúrólyuk átmérője itt is elhanyagolhatóan kicsiny.
- Végtelen homogén R_t fajlagos ellenállású közeg, melyet R_m fajlagos ellenállású d átmérőjű fúrólyuk harántol.
- Megegyezik a c) modellel, azzal a különbséggel, hogy a fúrólyuk és az R_t fajlagos ellenállású zóna között $D_i = d \cdot D$ külső átmérőjű, R_t fajlagos ellenállású elárasztott zóna helyezkedik el.

- e) H vastagságú réteget d átmérőjű fúróluk harántol. A b) és c) modellek kombinációja.
- f) H vastagságú réteg, amelyet fúróluk és elárasztott zóna harántol. A b) és d) modellek kombinációja. (Lásd: 1. a–f ábra.)



GEO 82/1-1

1. a–f ábra. Az elektromos kárótászás közeg-modelljei

Рис. 1а–ф. Модели среды электрического каротажа

Fig. 1. a–f. Different models of electrical well logging

Az ideális modelleket jellemző fajlagos ellenállás és geometriai paramétereiket a \vec{p} paraméter vektor komponenseinek tekintjük. Például a d) esetben $\vec{p} = \vec{p}(R_m, d, R_i, D, R_t)$.

A fenti a) és b) modelleket főként a mérések kvalitatív értelmezésére használjuk, míg kvantitatív kiértékelésre a c) és d) modellek használatosak. Az e) és f) modelleknél a kétféle (radiális és vertikális) inhomogenitás együtt fordul elő. Ilyen esetben az elektromos direkt feladat megoldása igen bonyolult, és emiatt ezek a gyakorlatban nem használatosak.

A \vec{p} paraméter vektorral jellemzett interpretációs modellt a mérési eredmények (látszólagos fajlagos ellenállás) tartományában – K számú különböző ideálisnak tekintett (tehát fizikailag szintén modellezett) mérési elrendezés esetén – az $f_1(\vec{p}), f_2(\vec{p}), \dots, f_K(\vec{p})$ elméleti értékek jellemzik, amelyeket az $\vec{f}(\vec{p})$ vektor komponenseinek tekintünk. Esetünkben a mérési elrendezések különböző laterolog szondaelrendezések lehetnek. Ezek fizikai modellje pontszerűnek gondolt táp és érzelő elektródákat jelent, továbbá az elektródáknak a henger-szimmetrikus közegmodell tengelyén való elhelyezkedését is feltételezi.

3. Ha a geológiai és fizikai modell pontosan írná le a valóságos viszonyokat, és az U_1, U_2, \dots, U_K mért mennyiségeket hibátlanul tudnánk megmérni, akkor a pontos modell paramétereinél az \vec{U} mért és az $\vec{f}(\vec{p})$ elméletileg számított mennyiségek azonosak lennének minden k -ra. A valóságban ez nem így van, a mért mennyiségek mindig valamekkora hibával terheltek, mivel a közeg modellje csak közelíti a bonyolult valóságos fajlagos ellenállás viszonyokat, és a központosított pontszerű elektróda modell is csupán közelítés. Ezért az U_k és $f_k(\vec{p})$ mennyiségek sohasem egyeznek meg pontosan. Az U_k és $f_k(\vec{p})$ mennyiségek eltérését n_k -val jelöljük:

$$\begin{aligned} U_1 &= f_1(\vec{p}) + n_1 \\ U_2 &= f_2(\vec{p}) + n_2 \\ &\vdots \\ U_K &= f_K(\vec{p}) + n_K \end{aligned} \quad (1)$$

Mivel U_k -ról feltételeztük, hogy valószínűségi jellegű mennyiség – $f_k(\vec{p})$ pedig az aktuális modell paramétereitől általánosan determinált érték – ezért n_k szintén valószínűségi jellegű mennyiségnek tekintendő. Tehát az U_k mért mennyiség az $f_k(\vec{p})$ modell által meghatározott komponens és az n_k véletlen eltérés komponens összege minden egyes szondára ($k = 1, 2, \dots, K$).

A karotázs elektromos műszereket általában úgy konstruálják, hogy a mért mennyiség (például a $V^{(M)}$ elektromos potenciál) állandó relatív pontossággal legyen meghatározható. Az állandó relatív hiba a mért mennyiség logaritmusának jó közelítéssel állandó szórását jelenti, mivel

$$\frac{\sqrt{\mathcal{D}(V^{(M)})}}{V^{(M)}} = \frac{dV^{(M)}}{V^{(M)}} \approx d(\log V^{(M)}) = \sqrt{\mathcal{D}(\log V^{(M)})} = \text{const.} \quad (2)$$

d a teljes differenciálás, \mathcal{D} a szórás képzés operátora.

Az n_k véletlen eltérés komponens másik forrása a valóságos fajlagos ellenállás eloszlás és az ideális modell közötti eltérések. Az n_k harmadik komponense a valóságban nem központosított helyzetű, véges méretű elektródák centrikus pontszerűekkel való helyettesítéséből, a fizikai modell hibáiból adódik. A véletlen eltérések két utóbbi összetevőjéről meglehetősen nehéz statisztikai jellemzőket mondani. Mindenesetre más elektromos mérések interpretációs tapasztalatai, valamint bizonyos valószínűségi megfontolások (centrális határeloszlás tétel) miatt az n_k véletlen komponens – a látszólagos fajlagos ellenállás logaritmusára vonatkoztatva – célszerű normális eloszlású valószínűségi válto-

zónák tekinteni. Az n_k mennyiségek várható értékét nullának vesszük (az U_k és $f_k(\vec{p})$ között nincs szisztematikus eltérés). A k szondával mért mennyiség logaritmusának és az elméleti érték logaritmusának eltérése a feltevés szerint σ_k szórású. Az (1) additív modell a karotázis elektromos szondázások esetére konkretizálva a következő:

$$\overrightarrow{\log R_a^{(M)}} = \overrightarrow{\log R_a^{(T)}} + \vec{n}.$$

A vektorok komponensei a $k = 1, 2, \dots, K$ indexű szondák $\log R_{a,k}^{(M)}$ mérési adatai, $\log R_{a,k}^{(T)}$ elméleti értékei, illetve ezek n_k eltérései. Az \vec{n} eltérés vektor valószínűség sűrűségfüggvényét K számú mérés esetén K dimenziós normális eloszlásúnak feltételezzük, amelynek valószínűség sűrűségfüggvénye

$$prd(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K \det\|C\|}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \vec{n}^{TRP} \|C^{-1}\| \vec{n}\right\} \quad (4)$$

alakú (lásd pl. Vincze I.: Matematikai statisztika, 53. old.), ahol

\vec{n} oszlopvektor, \vec{n}^{TRP} sorvektor;
 $\|C^{-1}\|$ a $\|C\|$ kovariancia mátrix inverze, és
 $\det\|C\|$ ennek a mátrixnak a determinánsa.

Mivel a mérési eredményeket valószínűségi változók realizációjának tekintjük, a belőlük meghatározandó paraméterekre vonatkozó ismereteink is valószínűségi jellegűek lesznek.

4. Feladatunk azoknak a \hat{p} paraméter becsléseknek a meghatározása, amelyek a rendelkezésre álló mérési eredmények mellett megadott értelemben a legjobb minőségűek. A maximum likelihood becslést véve, a

$$prd(\overrightarrow{\log R_a^{(M)}}; \hat{p}) = \max. \quad (5)$$

feltételt kell kielégíteni, vagyis az adott $prd(\vec{U}; \vec{p})$ valószínűség sűrűségfüggvény maximumához tartozó \hat{p} becsléseket kell meghatározni. E módszernél az (5) kifejezés konkrét alakja az \vec{n} -re feltételezett normális eloszlásnál az $L(\vec{p})$ likelihood függvény maximalizálási feltétele:

$$L(\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K \det\|C\|}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \overrightarrow{(\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)})} \xrightarrow{TRP} \|C^{-1}\| \overrightarrow{(\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)})}\right\} = \max. \quad (6)$$

A (6) kifejezés maximalizálásának jelentése a következő: keressük azt a \hat{p} paraméter vektorral jellemzett modellt, amely esetén a $\log R_a^{(M)}$ mért mennyiségek bekövetkezése a legvalószínűbb.

Az \vec{n} -re feltételezett normális-eloszlás miatt a maximum likelihood becslés elégséges eljárásának függvénye identikus a súlyozott legkisebb négyzetes becslésnél szereplő kvadratikus alak $(-I)$ -szeresével (lásd *Hudson*: Statisztika fizikusoknak (oroszul) 306. old.). Ahogy ez a (6) logaritmálásával közvetlenül belátható, a

$$Q(\hat{\vec{p}}) = \overrightarrow{(\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)})} \xrightarrow{TRP} \overrightarrow{(\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)})} \|C^{-1}\| \overrightarrow{(\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)})} = \min.$$

legkisebb négyzetes feltételben a $Q(\vec{p})$ súlyozott négyzetösszeg függvény (válaszfüggvény) minimum értéke és az $L(\vec{p})$ likelihood függvény maximum értéke ugyanahhoz a $\hat{\vec{p}}$ paraméter becsléshez tartozik.

Az $L(\vec{p})$ likelihood függvényben, illetve a $Q(\vec{p})$ válaszfüggvényben szerepel a $\|C\|$ kovariancia mátrix inverze. A $\|C\|$ mátrix az egyes $\log R_a^{(M)}$ mérési eredmények szórásaiból és az ezek közötti korrelációs együtthatókból épül fel. Ezekre vonatkozóan nincsenek ismereteink, ezért a $\log R_a^{(M)}$ mérési eredményeket korrelálatlannak és azonos szórásúaknak fogjuk tekinteni, azaz

$$\|C\| = \sigma_0^2 \|I\|$$

és

$$\|C^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_0^2} \|I\|,$$

ahol $\|I\|$ az egységmátrix, σ_0 a $\log R_a^{(M)}$ mérések szórása. Ennek megfelelően a $Q(\vec{p})$ válaszfüggvény

$$Q(\vec{p}) = \frac{1}{\sigma_0^2} \overrightarrow{(\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)})} \xrightarrow{TRP} \overrightarrow{(\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)})} \quad (7)$$

alakú lesz.

5. A paraméter becslés elméletéből ismert, hogy azokat a becsléseket célszerű megkeresni, amelyek torzítatlanok, effektívek és normális eloszlásúak. Az ilyen becsléseket nevezik optimálisnak. A maximum likelihood becslés aszimptotikusan optimális, azaz, ha viszonylag nagyszámú mérésekből kevés számú paramétert becsülünk. Kevésszámú mérésekből a maximum likelihood becslés szuboptimális.

Az optimális becslések effektivitását a paraméterek kovariancia mátrixa teljes mértékben meghatározza. A kovariancia mátrixot $\|D(\vec{p})\|$ -vel, elemeit $D(p_i, p_j)$ -vel vagy D_{ij} -vel jelöljük. A $\|D(\vec{p})\|$ mátrix S -ed rendű (S a becsült paraméterek száma), négyzetes, szimmetrikus, pozitív definit mátrix. A főátlójában szereplő D_{ii} elemek a megfelelő \hat{p}_i becslések diszperziói. Ennek négyzetgyöke a $\sigma(\hat{p}_i)$ szórás, amely a \hat{p}_i becslés hibájára jellemző. A kovariancia mátrix nem diagonális D_{ij} ($i \neq j$) elemei az egyes \hat{p}_i és \hat{p}_j becslések közötti korrelációs kapcsolatot jellemzik:

$$D_{ij} = \sigma(\hat{p}_i) \sigma(\hat{p}_j) r_{ij}, \quad (8)$$

ahol r_{ij} a \hat{p}_i és \hat{p}_j becslések közötti korrelációs együttható. Ennek értéke $(-1, +1)$ tartományon változhat. Ha r_{ij} nullához közeli érték, akkor a becsült paraméterek közötti kapcsolat gyenge, ilyenkor a \hat{p}_i , \hat{p}_j becslések egymástól függetlenül

könnyen meghatározhatók. Hogyha $|r_{ij}| \approx 1$, akkor a becsült paraméterek közötti kapcsolat szoros (hasonló módon hatnak a $\log R_a^{(T)}(\vec{p})$ elméleti térre — ez azt jelenti, hogy \hat{p}_i megváltozása kompenzálható \hat{p}_j valamekkora megváltoztatásával). Ilyenkor \hat{p}_i és \hat{p}_j együttes meghatározása nehezzé válik.

A $\|D(\vec{p})\|$ kovariancia mátrix függ:

- a $\log R_a^{(T)}(\vec{p})$ modell tértől;
- az \vec{n} véletlen komponens eloszlásának paramétereitől,
- a mérési komplexumtól.

Az interpretáció effektivitásáról közvetve tájékoztat a $\hat{\sigma}_0$ empirikus szórás, valamint a $\{\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)}\}$ reziduálok sorozata.

6. A likelihood függvény maximumhelyének (a $Q(\vec{p})$ reziduál négyzetösszeg függvénye minimumhelyének) meghatározására többféle szélsőérték-kereső eljárás is alkalmazható. A karotázs elektromos problémához a $\log R_a^{(T)}(\vec{p})$ függvények p_s paraméterek szerinti, lineáris tagig sorfejtett alakját felhasználó iterációs számítási eljárást választottunk. A közegmodell paramétereinek a továbbiakban az eredeti paraméter értékek logaritmusát tekintjük. Ezt azért célszerű megtenni, mivel így a szélsőérték keresést eleve a reális $R > 0$, $D > 0$ tartományra korlátozzuk.

Fejtsük sorba a $\log R_a^{(T)}(\vec{p})$ függvényt egy \vec{p}^0 hely környezetében lineáris tagig:

$$\log R_a^{(T)}(\vec{p}) \approx \log R_a^{(T)} \vec{p}^0 + \sum_{s=1}^S \frac{\partial \log R_a^{(T)}(\vec{p})}{\partial \log p_s} \Big|_{\vec{p} = \vec{p}^0} \cdot (\log p_s - \log \hat{p}_s^0). \quad (9)$$

A (9) sorfejtéssel a $Q(\vec{p})$ reziduál négyzetösszeg egy $Q'(\vec{p})$ közelítő értékét kapjuk meg:

$$Q'(\vec{p}) = \left\{ \overbrace{\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)}(\vec{p}^0)}^{\rightarrow TRP} - \sum_{s=1}^S \frac{\partial \log R_a^{(T)}(\vec{p})}{\partial \log p_s} \Big|_{\vec{p} = \vec{p}^0} \cdot (\log p_s - \log \hat{p}_s^0) \right\} \cdot \left\{ \log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)}(\vec{p}^0) - \sum_{s=1}^S \frac{\partial \log R_a^{(T)}(\vec{p})}{\partial \log p_s} \Big|_{\vec{p} = \vec{p}^0} \cdot (\log p_s - \log \hat{p}_s^0) \right\}. \quad (10)$$

A $Q(\vec{p})$ -t helyettesítő $Q'(\vec{p})$ mennyiség bevezetésével a minimumhely megkeresése egyszerűbb feladattá válik. A $Q'(\vec{p})$ helyettesítő mennyiség alkalmazása megkívánja a paraméterek egy $\overset{0\hat{}}{p}$ nulladik közelítő becslésének ismeretét. A (10) összefüggést úgy alkalmazzuk, hogy a $\overset{0\hat{}}{p}$ alapján a minimumfeltétel kielégítésével kapott $\overset{1\hat{}}{p} = \overset{1\hat{}}{p}$ -et beírjuk $\overset{0\hat{}}{p}$ helyébe, és újból megkeressük $Q'(\vec{p})$ minimumát, ami egy újabb $\overset{2\hat{}}{p} = \overset{2\hat{}}{p}$ -t eredményez és így tovább. Ezzel az iterációs eljárással alkalmas $\overset{0\hat{}}{p}$ kezdőérték választása esetén elérjük, hogy

$$\min \{Q'(\vec{p})\} \rightarrow \min \{Q(\vec{p})\}$$

és

$$\overset{l\hat{}}{p} \rightarrow \overset{l\hat{}}{p}.$$

Írjuk fel (10)-et az alábbi áttekinthetőbb formában:

$$Q'(\vec{p}) = \overset{\text{TRP}}{\longrightarrow} (\vec{y} - \|A\| \vec{\Theta}) \cdot (y - \|A\| \vec{\Theta}), \quad (11)$$

ahol az egyes mennyiségek jelentése a következő:

$$y_k = \log R_{a,k}^{(M)} - \log R_{a,k}^{(T)}(\overset{l\hat{}}{p}) \text{ az } \vec{y} \text{ vektor komponense;}$$

$$A_{k,s} = \frac{\partial \log R_{a,k}^{(T)}(\vec{p})}{\partial \log p_s} \Bigg|_{\vec{p} = \overset{l\hat{}}{p}}, \text{ az } \|A\| \text{ mátrix általános eleme;}$$

$$\Theta_s = \log p_s - \log \overset{l\hat{}}{p}_s, \text{ a } \vec{\Theta} \text{ vektor komponense;}$$

$Q'(\vec{p})$ minimuma esetén

$$\frac{\partial Q'(\vec{p})}{\partial \log p_s} = 0 \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

A minimumfeltételből következik a normálegyenletek rendszere, amelynek $\overset{l\hat{}}{\Theta}$ megoldásához tartozik $Q'(\vec{p})$ minimuma:

$$\|(\|A^{TRP}\| \cdot \|A\|)\| \cdot \overset{l\hat{}}{\Theta} = \|A^{TRP}\| \cdot \vec{y}. \quad (12)$$

Az

$$\|(\|A^{TRP}\| \cdot \|A\|)\|$$

mátrixot a normálegyenletek mátrixának nevezik. A normálegyenletek megoldása pedig:

$$\overset{l\hat{}}{\Theta} = \|(\|A^{TRP}\| \cdot \|A\|)^{-1}\| \cdot \|A^{TRP}\| \cdot \vec{y} \quad (13)$$

lesz. A $\hat{\Theta}$ vektor szolgáltatja a \hat{p} becslés soronkövetkező javított értékét:

$${}^{l+1}\hat{p} = \frac{{}^l\hat{p} + \hat{\Theta}}{2}$$

Az iterációs lépéseket addig kell ismételni, amíg a $Q'(\vec{p})$ mennyiség értéke nem változik számottevően. A lépésszám automatikusan beállítható valamilyen $\varepsilon = \varepsilon(\sigma_0, K, S)$ korlát tapasztalati beállításával úgy, hogy az $|Q'_{l+1} - Q'_l| < \varepsilon$ feltétel teljesülése esetén az iterációs eljárás álljon le, és a \hat{p} becslésnek a Q'_{l+1} minimumértékhez tartozó ${}^{l+1}\hat{p}$ paramétereket tekintjük.

A (7) összefüggésben szereplő – az \vec{n} véletlen eltérés komponenszt jellemző – σ_0^2 diszperzió általában nem ismert. Az interpretáció során lehetőség van σ_0^2 becslésére is. Kimutatható, hogy a $\hat{\sigma}_0^2$ becslés

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\overrightarrow{TRP} \cdot (\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)}(\hat{p})) \cdot (\log R_a^{(M)} - \log R_a^{(T)}(\hat{p}))}{K - S} \quad (14)$$

alakú, a \hat{p} becsült paramétereket jellemző $\|D(\vec{p})\|$ kovariancia mátrix becslése pedig

$$\|\hat{D}(\vec{p})\| = \sigma_0^2 \|(\|A^{TRP}\| \cdot \|A\|)^{-1}\| \quad (15)$$

lesz.

A képleteket nem mátrix formában is célszerű felírni, amikor is lineáris egyenletek rendszerét kapjuk:

$$\sum_{s=1}^S B_{is} \cdot \Theta_s = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, S, \quad (16)$$

ahol

$$B_{is} = \sum_{k=1}^K A_{ki} A_{ks}, \quad C_i = \sum_{k=1}^K A_{ki} y_k$$

Az ismertetett algoritmus megköveteli a direkt feladat tetszőleges paraméterre való megoldását és a paraméter értékek szerinti parciálisok meghatározását. A differenciálást a karotázs elektromos direkt feladat bonyolultsága miatt célszerű numerikus közelítéssel, differencia hányadosok képzésével elvégezni.

Az interpretációs algoritmus alkalmazása rétegenkénti kiértékelésre

1. Az eljárást megvalósító számítógépi program az előző fejezetben leírtak alapján működik. A mérési kombináció a hazánkban használatos négyféle (optimális, mélybehatolású, rövid és hosszú pseudo) laterolog szondák. Rétegenkénti kiértékelésnél a különböző szelvények alapján kijelölt rétegekre az egyes laterolog szelvények valamilyen módon vett átlagértékét képezzük, és ezek lesznek az $R_a^{(M)}$ mért mennyiségek. A mérésekből két paramétert (R_l , D) becsültünk úgy, hogy R_l -nek a mikrolaterolog látszólagos fajlagos ellenállást, mint rögzített számértéket választottuk. A számítógépi program tartalmazza a late-

PLR, PLH, OL, ML laterologok szimulált mérési eredményeinek kiértékelése különböző nagyságú, mérési hiba feltételezése esetén. A modell paraméterei: $R_m = 1 \Omega m$, $d = 0,15 m$, $R_t = 25 \Omega m$, $D = 2$, $R_t = 200 \Omega m$. A táblázat első két oszlopában az R_t , D nulladik közelítő becslések értékei találhatóak. A harmadik és negyedik oszlopban a középső számérték a megfelelő paraméter becslült értéke, az első és harmadik érték pedig a megfelelő hiba intervallum alsó és felső határa. $r(R_t, D)$ a becslült paraméterek közötti korrelációs együttható.

Таблица 2. а-ц

Оценка результатов искусственных измерений с помощью латерологов PLR, PLH, OL, ML для различных принятых ошибок измерений. Параметры модели: $R_m = 1 \Omega m$, $d = 0,15 m$, $R_t = 25 \Omega m$, $D = 2$, $R_t = 200 \Omega m$. В первых двух колонках таблицы находятся значения оценок нулевого приближения параметров R_t , D . Третья и четвертая колонки содержат среднее числовое значение оценки соответствующего параметра, а первое и третье значение соответствуют нижней и верхней границе интервала ошибки. $r(R_t, D)$ корреляционные коэффициенты между оцениваемыми параметрами.

Table 2. a-c

Evaluation of simulated apparent resistivities of four different laterologs (ML, OL, PLR, PLH see the capture of Table 1. for abbreviations) in the case of different simulated measuring errors. The parameters of the original model: $R_m = 1 \Omega m$, $d = 0,15 m$, $R_t = 25 \Omega m$, $D = 2$, $R_t = 200 \Omega m$. In the first two columns show the estimated parameters and the lower and upper limit of the error interval. $r(R_t, D)$ is the correlation coefficient between the two estimated parameters.

mérések hibája $\approx 10\%$				
\hat{R}_t^0	\hat{D}^0	\hat{R}_t	\hat{D}	$r(R_t, D)$
200	2	170 - 190 - 214	1,5 - 1,9 - 2,3	0,84
100	2	168 - 189 - 212	1,5 - 1,9 - 2,3	0,85
300	2	171 - 191 - 214	1,5 - 1,9 - 2,3	0,83
100	4	154 - 177 - 204	1,1 - 1,6 - 2,3	0,89
200	4	168 - 189 - 213	1,5 - 1,9 - 2,3	0,84
300	4	173 - 193 - 216	1,7 - 2,0 - 2,4	0,82
mérések hibája $\approx 25\%$				
\hat{R}_t^0	\hat{D}^0	\hat{R}_t	\hat{D}	$r(R_t, D)$
200	2	116 - 161 - 224	0,5 - 1,3 - 3,7	0,93
100	2	90 - 144 - 228	0,1 - 0,9 - 5,4	0,96
300	2	124 - 167 - 226	0,6 - 1,5 - 3,5	0,91
100	4	85 - 135 - 214	0,1 - 0,7 - 4,7	0,97
200	4	127 - 170 - 227	0,7 - 1,6 - 3,3	0,90
300	4	136 - 174 - 221	1,4 - 2,1 - 3,3	0,79

mérések hibája $\approx 40\%$

\hat{R}_t^0	\hat{D}^0	\hat{R}_t	\hat{D}	$r(R_t, D)$
200	2	60 – 126 – 266	0 – 0,7 – 16,6	0,97
100	2	41 – 106 – 271	0 – 0,3 – 55,5	0,98
300	2	70 – 140 – 279	0,1 – 1,0 – 13,5	0,96
100	4	93 – 159 – 270	0,2 – 1,2 – 7,3	0,95
200	4	97 – 155 – 248	0,3 – 1,3 – 5,9	0,93
300	4	113 – 170 – 255	0,6 – 1,7 – 4,4	0,88

rologok direkt feladatát megoldó szubrutinokat és a (10) képlet szerint működő iterációs minimumkereső eljárást. Az interpretáció eredményei a $\hat{\log} R_t$, $\hat{\log} D$ becslések, ezek $\hat{\sigma}(R_t)$, $\hat{\sigma}(D)$ szórásai és a becsült paraméterek közötti $r(R_t, D)$ korrelációs együttható.

Az interpretációs eljárást először szimulált mérési eredményeken próbáltuk ki. A szimulált mérési eredményeket a $\log R_a^{(T)}(\vec{p})$ elméletileg meghatározott érték és egy n véletlen komponens összegeként állítottuk elő úgy, hogy n a

$$\sigma = \log \left(1 + \frac{N}{100} \right)$$

szórású, nulla várható értékű normális eloszlásból vett véletlen minta. N közelítőleg a mérések százalékos hibáját jelenti. Ilyen szimulált mérések interpretációs eredményeit tartalmazza a $2.a-b-c$ táblázat $N = 10, 20$, illetve 40 százalékos hiba esetére. A tapasztalatok szerint az eljárás $2-3$ iterációs lépés után megtalálja a $Q(\vec{p})$ függvény minimumát, további iterációs lépések során a minimumhely nem változik lényegesen.

Fontos megvizsgálni azt, hogy az iterációs eljárás kiinduló paramétereit milyen pontossággal kell ismernünk. Ha ugyanis a \hat{p} nulladik közelítő értékek nagyon különböznek a \hat{p} becsléstől, elképzelhető, hogy a (9) sorfejtés nem közelíti elég jól a $\log R_a^{(T)}$ elméleti függvényt, és a Q' reziduálok sorozata nem konvergál a Q minimumához. A $2. a-b-c$ táblázatbeli interpretációs kísérletek alapján több megfigyelést tehetünk. Egy bizonyos nagyságú hiba feltételezésével jó közelítéssel ugyanahhoz a várható értékhez jutunk, hasonló hibatartományokkal, függetlenül a kiindulásként felvett modellől. A feltételezett mérési hiba növekedtével egyre nagyobb lesz a becsült paraméterek hibája, és a becslések is jobban eltérnek egymástól. Ugyancsak nő a paraméterek közötti korreláció is.

Ezek után megvizsgáltuk, hogy milyen eredményeket szolgáltat az eljárás az $1. táblázatban$ levő, valóságos mérési eredmények esetében. Az interpretáció eredményeit a $3. táblázat$ tartalmazza. A rétegek általában vékony rétegnek tekinthetők, a $4. (5,5 m)$, $8. (6,5 m)$, $10. (10,2 m)$ és a $12. (9,6 m)$ rétegektől eltekintve $3 m$ -nél vékonyabbak, öt réteg $2 m$ -nél is vékonyabb. Mivel a közeg

Az 1. táblázatban közölt mérési anyag matematikai statisztikai módszer alapján végzett kiértékelésének eredményei. Az eredmények azt mutatják, hogy az 1. táblázatban kétféle módon kapott paraméterek a hibaintervallumba, vagy annak közelébe esnek.

Таблица 3.

Результаты оценки материала измерений, представленного в таблице 1, проведенной с помощью математико-статистического метода. Результаты показывают, что полученные семью способами результаты таблицы 1 попадают или в интервал ошибки, или лежат вблизи от него

Table 3.

Mathematical statistical evaluation of the measured data given in Table 1. (For explanation see Tables 1. and 2. a-c). It is seen that the results of the two different interpretations in Table 1. are within or very near to the error intervals.

Sor- szám	H (m)	MLL R_a	OL R_a	PLR R_a	R_a^{PLH}	R_a^{ML}	\hat{R}_t	\hat{D}	$r(R_t D)$	$\sigma_0(\%)$
1	3,2	6,8	145	13,5	135	140	188-304-496	1,7-2,5-3,5	0,44	40
2	1,5	6,2	22	4,5	18	12,5	24-33-45	2,3-3,5-5,2	0,35	25
3	1,7	6,5	27,5	6	23	16,4	35-44-56	2,4-3,2-4,2	0,37	21
4	5,5	6,2	32,5	7	30,2	17,7	40-51-66	2,1-2,7-3,5	0,42	21
5	1,1	3,2	17,5	4,9	20,1	12,8	25-32-42	1,9-2,5-3,2	0,39	23
6	1,9	6,2	24	6	27,5	15	30-40-54	1,9-2,8-3,2	0,39	23
7	1,3	7	60	6,8	45	27,5	59-86-125	2-2,9-4,1	0,42	31
8	6,5	6,5	50	8	45	20	52-68-90	1,7-2,3-3,1	0,49	24
9	2,2	11,2	100	12	80	115	158-268-454	2,4-3,8-6	0,60	36
10	10,2	8,2	55	9,5	45	22,5	59-76-97	1,9-2,5-3,3	0,49	21
11	2,2	6,5	40	7,5	45	17,5	41-56-78	1,5-2,2-3,1	0,53	27
12	9,6	5,5	7,5	3,5	9	6	5-14-34	1,1-8,1-55	0,95	21

modellje végtelen vastag réteg, ezért az ágyazó rétegek torzító hatásának mutatkoznia kell az interpretáció eredményeiben. Ez a hatás annál nagyobb, minél kisebb a rétegvastagság és minél nagyobb a réteg és az ágyazó környezet között a fajlagos ellenállás kontraszt. Ilyen esetben a (3)-beli n eltérések nagyok, tehát nagy a mérések hibáját jellemző σ_0 szórás. Ez a hatás megfigyelhető a többihez képest nagy ellenállású és vékony 1., 9. és 7. rétegek esetében, amelyeknél a százalékban kifejezett σ_0 szórás rendre 40%, 36% és 31%-nak adódott. Külön figyelmet érdemel a 12. réteg ($H = 9,6$ m) amelynél a σ_0 érték kicsi ($\sigma_0 = 21\%$), ami azt jelenti, hogy az elméleti és a mért mennyiségek közel vannak egymáshoz, ezzel szemben a paraméterek gyengén meghatározottak. Ugyanakkor nagy a paraméterek közötti korrelációs együttható ($r(R_t, D) = 9,95$). Ez utóbbi azt jelenti, hogy az R_t, D paraméterek nem határozhatók meg egymástól függetlenül; az egyik paraméterben bekövetkezett változás hatása kompenzálható a másik paraméter alkalmas változtatásával.

A vizsgált anyagon szerzett tapasztalatok szerint R_t kedvező esetben 15–25% relatív hibával határozható meg, az ágyazó rétegek hatásának növekedésével azonban a hiba erősen megnő. D meghatározottsága kedvező esetben is csak 25–30%. A kapott interpretációs eredményeket összehasonlítva a determinisztikus elven operáló, klasszikus interpretáció eredményeivel, látható, hogy nincs semmi különös abban, hogy az egyes determinisztikus algoritmusok eredményei között esetenként jelentős eltérések vannak. Általában elmondható, hogy ezek az eredmények a statisztikus interpretáció hibaintervallumába esnek, vagy ahhoz közeli értékek.

Digitalizált elektromos szelvények pontonkénti kiértékelése

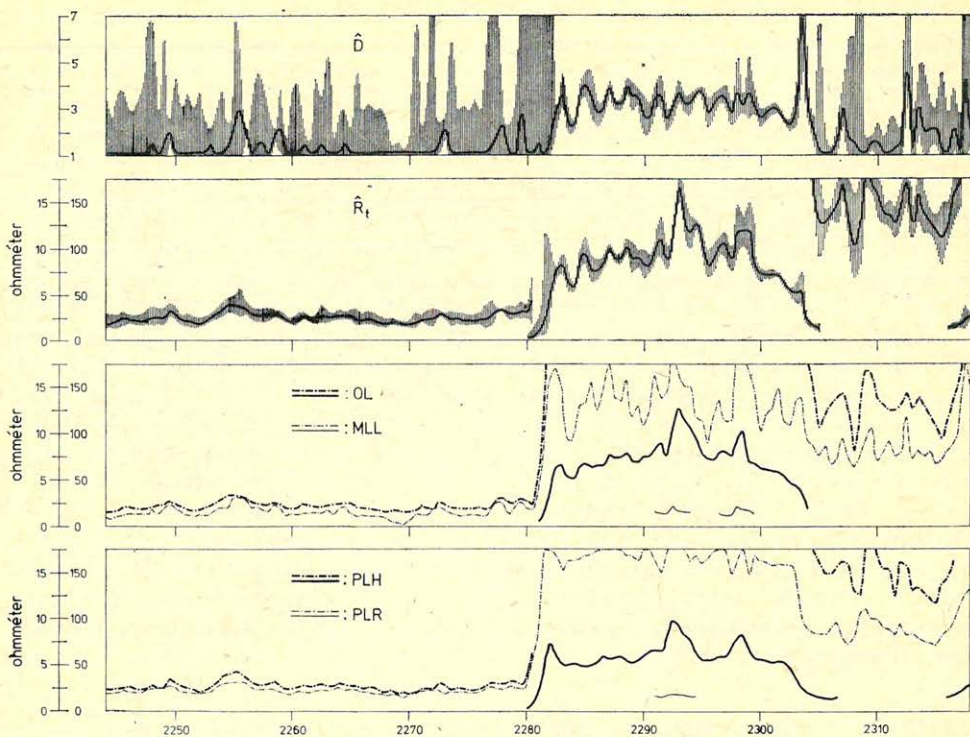
Az első részben ismertetett algoritmust alkalmaztuk laterolog szelvények pontonkénti kiértékelésére is. A 0,5 m-enként digitalizált szelvényértékeket a végtelen vastag réteg modelljével értékeltük ki, tekintet nélkül arra, hogy vastag réteg belsejében, vagy réteghatár környékén helyezkedtek el a pontok. A rétegenkénti kiértékelésnél tapasztalt paraméter hibák nagysága miatt ebben az esetben egyszerűsítettük a kiértékelési eljárást úgy, hogy a minimumkeresés csupán a paraméter tér diszkrét pontjaiban történik. Így a számítási idő körülbelül két nagyságrenddel kevesebb lett. A paraméter skálák diszkrétizálása úgy történt, hogy a soron következő diszkrét paraméter érték az előbbinek 1,072-szerese (logaritmikusan ekvidisztáns felosztás).

A vizsgált szelvényanyag egy az Alföldön mélyített fúrásban készült, optimális laterolog, rövid és hosszú pseudo-laterolog és mikrolaterolog mérésekből áll. Az elárasztott zóna fajlagos ellenállásának itt is a mikrolaterolog látszólagos fajlagos ellenállást választottuk. A kiértékelés eredményei a \hat{D} és \hat{R}_t becslések, valamint ezek egyszeres szórásának megfelelő hibaintervallumok a mélység függvényében. A mérési anyag és a kiértékelés eredményei a 2. ábrán láthatók. Három szakasz különíthető el a vizsgált zónában:

2244 m – 2281 m: impermeabilis agyag réteg;

2281 m – 2304 m: permeabilis, szénhidrogén-tartalmú zóna;

2304 m – 2319 m: permeabilis, víztartalmú zóna.



GEO 02/1-2

2. ábra. Egy alföldi fúrásban felvett digitalizált elektromos mérési anyag pontonkénti kiértékelése. A \hat{D} és \hat{R}_t szelvényen a folytonos vonal a megfelelő paraméterek becslései, a vonalkázott rész az egyszeres szórásnak megfelelő hiba intervallum a mélység függvényében.

Рис. 2. Поточечная оценка дигитализованного материала электрических измерений, записанного в одной из скважин Большой Венгерской Низменности. На графике \hat{D} и \hat{R}_t сплошная линия – оценка соответствующих параметров, заштрихованная часть – интервал ошибки, соответствующий однократному разбросу, как функция глубины.

Fig. 2. Evaluation of digitized electrical logs on the basis of mathematical statistical methods. On the \hat{D} and \hat{R}_t logs the curves are the estimates of the parameters (relative depth of infiltration and true resistivity, respectively), and the vertical lines give their error intervals.

R_t szelvény: Legnagyobb bizonytalanság mutatkozik az agyagréteg-szénhidrogén zóna kontaktusánál, ugyanis itt a legnagyobb a réteghatár-effektus (2280 m–2282 m között). A feltételezett végtelen vastag réteg modell ebben az esetben nagyon rosszul közelíti a valóságos viszonyokat, azaz nagyok az n eltérések. Hasonlóképpen megnő a hiba a szénhidrogénes zóna alsó, vizes réteggel érintkező szakaszában is (2303 m–2305 m), itt azonban kisebb a fajlagos ellenállás kontraszt mint a felső réteghatárnál. Legkisebb hibák a szénhidrogénes szakasz belsejében adódtak, a vizes zónában esetenként nagyobb hibák is előfordulnak.

\hat{D} szelvény: Igen nagy hibák adódtak az agyagréteg esetében. Ennek magyarázata az, hogy a közeg modellje itt is háromréteges, azonban a valóságban elárasztódás nem jön létre. Tehát az eljárás két azonos fajlagos ellenállású réteg között „keresi” a réteghatárt. A fizikailag irreális mennyiség becslése természetesen nagy hibával történik. Legkisebb hibával jellemzett a becslés a szénhidrogénes zónában. Itt nagy a fajlagos ellenállás kontraszt az elárasztott és bolygatatlan zóna között. Ennél nagyobb hibák adódtak a vizes zónában, ahol a fajlagos ellenállás kontraszt lényegesen kisebb, mint a szénhidrogénes szakaszban.

IRODALOM

- Barlai Z.*: Fúrólukban végzett geofizikai vizsgálatok speciális problémái. NIM DOK Budapest, 1971.
- Baráth I. – Drahos D. – Kovács J.-né – Salát P.*: Görbeseregek a fajlagos ellenállás meghatározására. A M. Á. E. L. Geofizikai Intézet kiadványa pp. 1–184. VIZDOK, Budapest, 1979.
- Drahos D.*: Karotázs elektromos görbék számítása a lineáris szűrés elméletén alapuló módszerrel. A Numerikus szűrési módszerek alkalmazásai a geofizikai adatok feldolgozásában c. jegyzet 10. fejezete, pp. 225–249. MGE kiadványa, 1973.
- Drahos D. – Salát P.*: The strategy for the interpretation of surface and borehole electromagnetic soundings based on the information theory and the linear filter theory. 19th Geophysical Symposium Contribution, Torun, 1974.
- Drahos D. – Salát P. – Torkos P.*: A karotázs elektromos szondázások felvételének és interpretációjának effektívitásvizsgálatai közel koaxiális rétegzettségű végtelen vastag fúróluk környezet esetében. Kutatási jelentés; készült az OKGT OGIL megbízásából az ELTE Geofizikai Tanszékén pp. 1–106. 1977.
- Hudson D. J.*: Statistics, Genf, 1964.
- Vincze I.*: Matematikai statisztika ipari alkalmazásokkal. 2. kiadás, Budapest, 1975.