

A 15°-os és 45°-os közelítésű egyenleten alapuló, véges differencia módszerrel történő hullámegyenletes migráció hibájáról

G Ö N C Z G Á B O R*

A hullámegyenletes migrációs eljárás fejlesztése során sikerült eljutni a lefelé folytatás elvégzésére alkalmas, 15°-os dőlésekig megfelelő közelítésű egyenletnél magasabb közelítésű egyenletekhez. Ezt számos dolgozatban publikálták (IV, V). A harmadrendű parciális differenciálhányadosokat tartalmazó, 45°-os közelítésű egyenlet a diszperziós egyenlete alapján jó eredményeket ígért. Vállalatunknál foglalkoztunk ennek az egyenletnek az x, z, t tartományban, véges differencia módszerrel történő megoldásával. A 45°-os módszer, mely számításigényesebb is, azonban nem hozott jelentős javulást.

Az előző, e témával foglalkozó cikkben (VI) ismertettem a 15°-os közelítésű egyenlet megoldásánál fellépő hibák egy vizsgálati módszerét. Jelen dolgozatban egy olyan hibaszámítási módszert ismertetek, mely szemléletesebb és nem csupán a 45°-os egyenlet közelítő jellegéből adódó hibát, hanem a teljes algoritmus hibáját adja. A hibaszámításokat elvégeztük a 15°-os és a 45°-os algoritmusra is. A hibaszámítások rámutattak arra, hogy a 45°-os egyenlet előnyeit nem sikerül igazán kihasználni, ha nem tudjuk fokozni a differenciálhányadosok közelítésének pontosságát.

В процессе развития метода миграции по волновому уравнению для продолжения вниз с 15 – ти градусным приближением удалось вывести более точные уравнения. Об этом было опубликовано несколько работ (IV, V). Миграция по дисперсному уравнению содержащего частные производные третьей степени уравнения для 45 – ти градусного приближения обещала хорошие результаты. В нашем предприятии это уравнение решалось по методу конечных разностей в области X, z, t . Между тем, требующий большего количества времени метод 45 – ти градусного приближения не дал ожидаемых результатов. В предыдущей, занимающейся этой темой статье (VI) был описан способ исследования погрешностей решения уравнения 15 – ти градусного приближения. В этой работе рассматривается такой метод вычисления погрешностей, который во-первых более нагляден, во-вторых определяет не только погрешности вытекающие из характера 45 – ти градусного приближения, но и погрешности полного алгоритма. Расчёты были проведены для алгоритмов 15 – ти градусного и 45 – ти градусного приближения. Результаты показали, что преимущества 45 – ти градусного приближения нельзя использовать в полной мере, не увеличивая точности приближения производных.

During the development of the algorithm of wave equation migration, a more exact equation was found capable for downward continuation larger than 15° dips. Such equations were published in several papers (IV, V). Those 45° equations containing third order partial derivatives promised good results on the base of their dispersion equations. We have solved this equation by the method of finite differences in the x, z, t domain. This 45° methods which are far more time consuming, have not resulted significant improvement of the results.

In the author's previous paper (VI) an error estimation was described for the solution of the 15° equation. In this paper a generalized error estimation procedure is published, which evaluates the error of the whole algorithm, not only of the error of the approximations made by neglecting of some terms. The method has a fine visual meaning. The results show, that the advantages of the 45° equation can only be exploited, if the derivatives are computed much more exactly.

A hullámegyenletes migráció lényeges lépése a felszínen észlelt hullámtér fokozatos lefelé folytatása. Ez azt jelenti, hogy a z mélységben adott hullámtér értékekből előállítjuk ezeket a $z + \Delta z$ mélységben.

Megvizsgáltuk, hogy milyen hibákkal valósul meg a 15°-os és a 45°-os közelítésű egyenlet megoldása során. A vizsgálatot a z irányú extrapoláció átvi-

* Geofizikai Kutató Vállalat

teli függvényének segítségével végeztük el különböző paraméterek mellett.

A felszínen észlelt adatoknak a dátumsíkra történő redukciójánál, a statikus korrekciónál is lefelé folytatást végzünk. Itt feltételezzük, hogy a dátumsík és a felszín között a hullámok pontosan függőleges irányban haladnak felfelé. A korrekció során az észlelt adatokat siettetjük, egy pozitív időtolást hajtunk végre, hiszen a dátumsíkon észlelve minden reflexió korábban érkezett volna be. Az adatokat ezzel extrapoláltuk a felszínről a dátumsíkra.

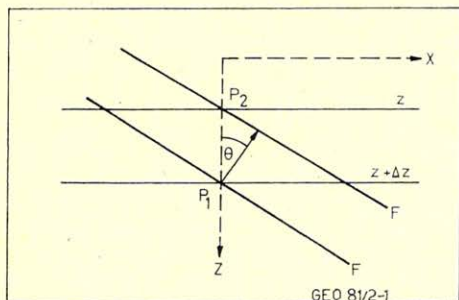
A hullámegyenletes migráció végrehajtásakor az összegzett időszelvény adatait egyre mélyebb és mélyebb dátumsíkokra extrapoláljuk. Az extrapolációt a hullámegyenletről levezetett különböző közelítésű, parciális differenciálegyenletek véges differencia módszerrel történő megoldásával végezzük. Hogy ennek a műveletnek a hibáját meghatározzuk, először megfogalmazzuk a helyes extrapolációt ferdén beérkező síkhullámok esetén. A migráció művelete ugyanis dőlt reflektáló felületekről beérkező hullámok esetén fontos.

Egy $v/2$ sebességű, homogén közegben a vertikálissal θ szöget bezáró irányban, felfelé haladó síkhullám az alábbi U függvény:

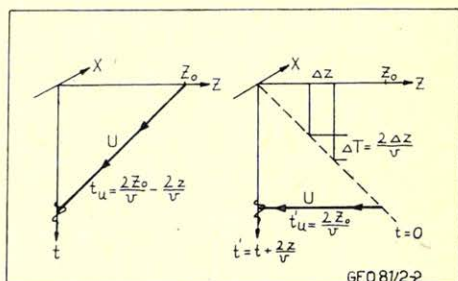
$$U = \exp i\omega \left(t - \frac{2x}{v} \sin \theta + \frac{2z}{v} \cos \theta \right) \quad (1)$$

Vizsgáljuk az U hullámot az x, z síkban, az $x = 0$ függőleges mentén elhelyezkedő z és $z + \Delta z$ mélységű P_2 és P_1 pontban (1. ábra). Az U hullámtér F -fel jelölt frontja a P_1 pontba $\Delta t = 2z \cos \theta / v$ idő múlva érkezik be. A θ szögű hullám Δz vastagságú rétegen való áthaladási ideje függ θ szögtől is! Ha az U hullám terjedését akarjuk leírni a Δz vastagságú rétegen keresztül, akkor a $z + \Delta z$ síkon levő adatok Δt -vel való késleltetésével kapnánk meg a z síkon észlelhető adatokat. A feladat azonban az U hullám lefelé folytatása. A helyes extrapolációt akkor végeznénk, ha a z síkon adott adatokat Δt -vel siettetnénk. Így juthatunk a $z + \Delta z$ síkon észlelhető adatokhoz. A szükséges időtolás azonban θ -tól is függ! Mivel az időszelvények lefelé folytatásakor a reflexiók beérkezési szögét nem ismerjük, a siettetést, az időtolást két összetevővel valósítjuk meg.

A t időváltozó helyett bevezetjük a $t' = t + 2z/v$ időváltozót. Ennek a transzformációnak a hatását a 2. ábrán illusztrálom. Az ábra baloldalán t_u -val jelöltük a $v/2$ sebességű közegben a Z_0 mélységű reflektáló felületről, pontosan vertikálisan felfelé haladó hullám menetidejét a mélység függvényében. A transzformált koordináta-rendszerben, az ábra jobboldalán, a felfelé haladó hullám menetideje



1. ábra. Puc. 1. Fig. 1.



2. ábra. Puc. 2. Fig. 2.

z -től függetlenné válik, $t'_u = konstans$. Itt a z és a $z + \Delta z$ mélységben levő észlelő azonos t' időpontban észleli a vertikálisan a felfelé haladó hullámot. Az extrapolációt a z síkról a $z + \Delta z$ síkra, ebben a koordinátarendszerben végezzük el, mert a pontosan vertikálisan felfelé haladó hullám itt z -től független. Az időváltozó ilyen transzformációjával az adatokon végrehajtunk egy a dőlésszögtől független, statikus korrekcióhoz hasonló $\Delta \tau$ időtolást. Ennek nagysága a Δz vastagságú réteg vertikális áthaladási ideje $\Delta \tau = 2\Delta z/v$. Ez a lefelé folytatáskor alkalmazott teljes időtolás egyik összetevője.

Ha a lefelé folytatást úgy végeznénk el, hogy csak ezt az időtolást alkalmazzuk, akkor Δz lépésként a Θ szögű síkhullámok esetén az alábbi időtolás hibát követnénk el:

$$DT_1 = \frac{2\Delta z}{v} (\cos \Theta - 1). \quad (2)$$

Az alkalmazott teljes időtolásnak azonban van egy másik, bonyolultabb összetevője is.

Clairbout és Johnson [1] a Z transzformáció formalizmusát alkalmazva levezették a 15° -os egyenlet, véges differencia módszerrel történő megoldásánál megvalósuló z irányú, egyetlen extrapolációs lépés átviteli függvényét. Hasonló gondolatmenettel levezettük ezt a 45° -os közelítésű egyenleten alapuló módszerre is. A 15° -os és 45° -os közelítésű, lefelé folytatásra alkalmas egyenletek a következő alakúak:

$$U_{xx} + \frac{4}{v} U_{zt} = 0 \quad (3)$$

$$U_{ttz} + \frac{v}{4} U_{xxt} - \frac{v^2}{16} U_{xxz} = 0. \quad (4)$$

A parciális differenciálhányados képzést alsó index jelöli.

A differenciálhányadosok legegyszerűbb, véges differencia közelítéseit véve, az alábbi átviteli függvényeket kapjuk:

$$F(Z)_{15} = \frac{(1 - aT) - (1 + aT)Z}{(1 + aT) - (1 - aT)Z} \quad (5)$$

és

$$F(Z)_{45} = \frac{(1 - aT + bT) - (2 - 2bT)Z + (1 + aT + bT)Z^2}{(1 + aT + bT) - (2 - 2bT)Z + (1 - aT + bT)Z^2} \quad (6)$$

ahol

$$a = \frac{v \Delta z \Delta t}{16 \Delta x^2}; \quad b = \frac{v^2 \Delta t^2}{64 \Delta x^2};$$

$$T = 2 \left(1 - \cos \frac{4\pi f \Delta x \sin \Theta}{v} \right) \quad \text{és} \quad Z = \exp i 2\pi f \Delta t.$$

Az a és b mennyiségek paramétereiktől függő konstansok, T az x irányú második differencia képzés átviteli függvénye, Z pedig a Δt mintavételi távolságnak meg-

felelő időtolás átviteli függvénye. Könnyen belátható, hogy (5) és (6), mindent átértesztő, rekurziós szűrők átviteli függvényei, mert

$$|F(Z)_{15}| = |F(Z)_{45}| = 1 \quad (7)$$

azaz

$$F(Z)_{15} = \exp i \Phi_{15}; \quad F(Z)_{45} = \exp \Phi_{45} \quad (8)$$

Ezek a szűrők egyetlen z irányú extrapolációs lépés során az adatokon csupán Φ_{15} illetve Φ_{45} fázistolást okoznak, ami f frekvencián $\Phi_{15}/2\pi f$, illetve $\Phi_{45}/2\pi f$ időtolást jelent. Ezek az időtolások azonban a T -n keresztül függenek a θ szögtől is. Hatásuk olyan, hogy az előbb említett, egyszerű, statikus jellegű időtolás hibáját csökkentik. Ezek az időtolások adják az extrapolációs módszerünkben megvalósuló, teljes időtolás másik összetevőjét.

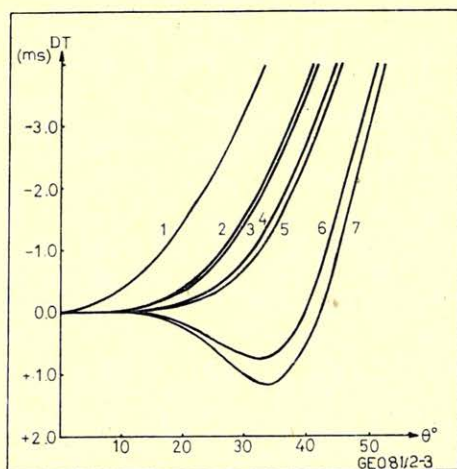
Mint láttuk a θ szögű hullámok helyes extrapolációjához $\Delta t = 2\Delta z \cos \theta / v$ időtolás szükséges. Különböző paraméterek mellett kiszámítottuk az ettől való eltéréseket az egyszerű, statikus tolás, majd a 15° -os és a 45° -os közelítésű módszer teljes időtolásának alkalmazása esetén. A 3. és 4. ábrán az 1,2 stb. sorszámú görbék a következő időtolás hibákat (DT) mutatják:

$$DT_1 = \frac{2\Delta z \cos \theta}{v} - \frac{2\Delta z}{v}$$

csak statikus tolás

$$DT_2 = DT_1 - \frac{\Phi_{15}}{2\pi f}; \quad \partial_{xx} \approx \frac{1}{\Delta x^2} T$$

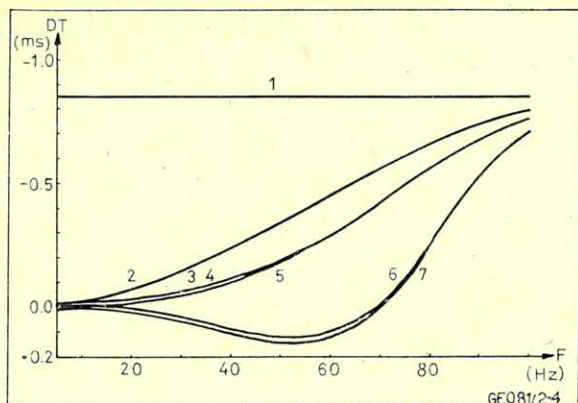
ahol $T = (1, -2, 1)$



3. ábra.

Рис. 3.

Fig. 3.



4. ábra.

Рис. 4.

Fig. 4.

$$\begin{aligned}
 DT_3 &= DT_1 - \frac{\Phi_{45}}{2\pi f}; & \partial_{xx} &\approx \frac{1}{\Delta x^2} T \\
 DT_4 &= DT_1 - \frac{\Phi_{15}}{2\pi f}; & \partial_{xx} &\approx \frac{1}{\Delta x^2} \frac{T}{1 + \frac{T}{12}} \\
 DT_5 &= DT_1 - \frac{\Phi_{45}}{2\pi f}; & \partial_{xx} &\approx \frac{1}{\Delta x^2} \frac{T}{1 + \frac{T}{12}} \\
 DT_6 &= DT_1 - \frac{\Phi_{15}}{2\pi f}; & \partial_{xx} &\approx \frac{1}{\Delta x^2} \frac{T}{1 + \frac{T}{6}} \\
 DT_7 &= DT_1 - \frac{\Phi_{45}}{2\pi f}; & \partial_{xx} &\approx \frac{1}{\Delta x^2} \frac{T}{1 + \frac{T}{6}}
 \end{aligned}$$

A végzett számításokból két összefüggést mutatunk be. A 3. ábrán a Θ szög függvényében ábrázoltuk az előbb említett időtolás hibákat. A paraméterek a következők voltak: $v = 2000 \text{ m/s}$, $f = 30 \text{ Hz}$, $\Delta x = 25 \text{ m}$, $\Delta z = 25 \text{ m}$ és $\Delta t = 0.004 \text{ s}$. A 45° -os egyenleten alapuló módszer hibája (DT_3 , DT_5 , DT_7) meglepő módon csak kevéssé kisebb mint a megfelelő 15° -os módszer hibája. Ez annak tulajdonítható, hogy bár maga a 45° -os egyenlet nagyobb szögekig adna lehetőséget a pontosabb extrapolációra, az alkalmazott közelítő differencia sémák hibái lerontják a pontosságot. Különösen látszik ez a 2. és 3. görbét vizsgálva. A 4. és 5. görbéket úgy kaptuk, hogy a ∂_{xx} derivált közelítésének javítására a

Claerbout által [2] levezetett operátort használtuk. Ez a hibákat egyenletesen és hatásosan csökkentette a teljes szögtartományban. A 6. és 7. görbék számításánál a Loewenthal és mások által [3] javasolt operátort használtuk a ∂_{xx} közelítésére. Ekkor a hibák csak bizonyos szögek felett csökkentek és a hibák kisebb szögek-nél ellenkező előjelűek lettek. Ez összefüggésben van azzal, hogy ezt az operátort alkalmazva nem kapunk mindig stabil differencia sémát a (3), illetve a (4) egyenletek közelítése során.

A 4. ábrán bemutatjuk az időtolás hibák frekvencia függését. A paraméterek: $\Theta = 15^\circ$, $v = 2000 \text{ m/s}$, $\Delta x = 25 \text{ m}$, $\Delta z = 25 \text{ m}$ és $\Delta t = 0.004 \text{ s}$. Az egyszerű, statikus jellegű tolás hibája (DT_1) természetesen nem függ a frekvenciától. Az azonos dőlésszögű, különböző frekvenciájú síkhullámokra az extrapolációs módszereink időtolás hibája azonban a frekvenciával nő. Ezt felfoghatjuk úgy is, hogy a lefelé folytatás olyan hatást okoz, hogy a hullámok terjedési sebessége függni fog a frekvenciától. A modell és terepi anyagokon végzett feldolgozásoknál tapasztalhatjuk ennek hatását a ferdén beérkező hullámok diszperziójában.

A hibagörbék alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy a 45° -os közelítésű, x, z, t -ben véges differencia módszer nem hoz jelentős javulást a 15° -os közelítésű módszerhez képest. Jelentős javulást lehet azonban elérni, ha a differenciasémák pontosságát javítjuk. A ∂_{xx} közelítésének javítása jelentős hibacsökkenést eredményezett és ennek a jobb közelítésnek az alkalmazása nem is növeli a számításgigényt. A (3) és (4) egyenletben szereplő többi differenciáhányados közelítésének javítása még nem megoldott feladat és valószínűleg csak komolyabb számításgigény növekedéssel érhető el.

A dolgozatban ismertetett hibaszámítási módszer egyik előnye az, hogy nem csupán az egyenletek közelítő jellegéről ad kvantitatív összefüggéseket, hanem a teljes migrációs algoritmus hibáját kapjuk meg. A másik előnye, hogy a hiba igen szemléletes, mert különböző hullámfrontok időtolás hibájaként fejeztük ki.

IRODALOM

- [1] Claerbout, J. F., Johnson, A. G.: Extrapolation of Time Dependent Waveforms along Their Path of Propagation., 1971. Geophysical J. of R. Astr. Soc. V. 26. p. 285 – 295.
- [2] Claerbout, J. F.: Fundamentals of Geophysical Data Processing.; 1976. McGraw – Hill Book Co.
- [3] Loewenthal D. et al.: The Wave Equation Applied to Migration.; 1976. Geophysical Prosp. V. 24. n. 2.
- [4] Berkhout A. J.: Steep Dip Finite-Difference Migration.; 1979. Geophysical Prosp. V. 27. p. 196 – 213.
- [5] Stolt R. H.: Migration by Fourier Transform.; 1978. Geophysics, V. 43. p. 23 – 48.
- [6] Göncz Gábor: A hullámegyenletes migrációval kapcsolatos vizsgálatok és tapasztalati eredmények. 1979.; Magyar Geofizika, XX. évf. 1. sz.