

Szeizmikus jelek adaptív dekonvolúciója

VERMES MÁTYÁS*

A dolgozat első, bevezető jellegű része áttekintést nyújt a jóslási hiba számításán alapuló dekonvolúciós módszerekről, és ismerteti egy egyszerű matematikai módszerekkel megvalósítható adaptív jósló algoritmust. Az adaptív dekonvolúcióval elérhető eredményeket terepi példákon mutatjuk be.

A második részben előbb megvizsgáljuk a szeizmikus csatorna autoregresszív modelljének alapvető tulajdonságait, majd a rekurzív legkisebb négyzetes becslés (jóslás) feladatából kiindulva eljutunk a Kalman-szűrő egyenleteihez. A dolgozatot kiegészítő három függelék lezárja a korábban nyitva hagyott, főleg információ elméleti vonatkozású kérdéseket.

Первая, вступительная часть доклада даёт обзор основанных на вычислении ошибки предсказания методов обратной фильтрации и описание алгоритма адаптивной прогнозирующей деконволюции, использующего простые математические способы.

Во второй части сначала исследуются основные свойства авторегрессивной модели сейсмического канала, затем, исходя из задачи рекурсивной оценки (прогноза) на основе наименьших квадратов, выводится уравнение фильтра Кальмана. Три приложения к работе отвечают на ранее оставленные открытыми вопросы, связанные с теорией информации.

The first part of the paper gives a review of deconvolutional methods based upon the calculation of prediction error and describes an adaptive prediction algorithm that may be realised by simple mathematical tools. The results of adaptive deconvolution are showed on field seismic data.

In the second part we study the significant properties of the autoregressive model of seismic trace. Starting from the problem of recursive least squares estimation (prediction) we obtain the equations of Kalman-filter. The three appendices completing the paper settle mainly information-theoretical problems previously unsolved.

BEVEZETÉS

I.

A talaj réteghatárainak szeizmikus kutatásakor valamilyen módon – pl. robbantással, vibrátorral – gerjesztjük a talajt. A gerjesztéskor keletkező hullám, geofizikus szaknyelven wavelet energiájának egy része a réteghatárokon fellépő akusztikus impedancia ugrás miatt reflektálódik. A reflektálódott hullámokat a felszínen geofonokkal észleljük.

Vizsgáljuk meg, milyen összefüggés van a gerjesztő hullám amplitúdója, valamint a reflektált és transzmittált (továbbhaladó) hullámok amplitúdója között! Ha a beeső hullám amplitúdója egységnyi, és a reflektált illetve transzmittált hullámok amplitúdóját r , illetve t jelöli (*I. ábra*), az elmozdulásokra ki-szabható határfeltételek alapján:

$$t = I + r.$$

Az r reflexiók együttható kifejezhető a két rétegre jellemző hullámterjedési sebességgel (v_1, v_2) és sűrűséggel (p_1, p_2):

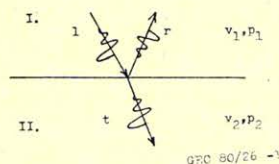
$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

* GKV Fejlesztési Osztály

ahol Z_1 a felső közeg akusztikus impedanciája:

$$Z_1 = v_1 p_1.$$

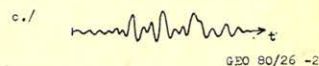
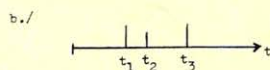
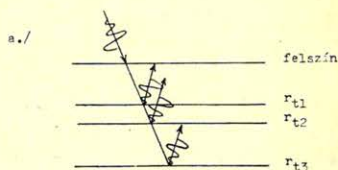
Hasonló képlet érvényes Z_2 -re. Látható, hogy a közetek paramétereire vonatkozó információt (hullámterjedési sebesség, sűrűség) az r reflexiók együtttható tartalmazza. A szeizmikus kutatás feladata tehát a reflexiók beérkezési idejének és amplitúdójának – vagyis a reflexivitás függvénynek – meghatározása.



1. ábra.

Puc. 1.

Fig. 1.



2. ábra. a) b) c)

Puc. 2. a) b) c)

Fig. 2. a) b) c)

Ezt a látszólag egyszerű feladatot megnehezíti a reflektált hullámok interferenciája. Tekintsük a 2a ábrán látható három vízszintes réteget tartalmazó közeget! (Feltesszük, hogy a valóságban a gerjesztés és az észlelés ugyanabban a pontban történik, és így a valóságos sugárutak függőlegesek. Az ábrán csak azért alkalmaztunk ferde sugárutakat, hogy azok ne fedjék át egymást.) A három réteghatárról reflektált hullám beérkezési idejét jelölje t_1, t_2, t_3 , a határookra jellemző reflexiók együtttható legyen r_{t1}, r_{t2}, r_{t3} . A közegekre jellemző reflexivitás függvényt mutatja a 2b ábra. Feltéve, hogy a gerjesztő hullám amplitúdója egységnyi, a reflektált hullámok amplitúdója rendre r_1, r_2, r_3 . A 2a ábrán azonban láthatjuk, hogy a hullámok – mivel egymáshoz térben és időben közel vannak – egymásra rakódnak, interferálnak, lehetetlenné téve, hogy a szeizmogramon (2c ábra) külön-külön azonosítsuk őket.

II.

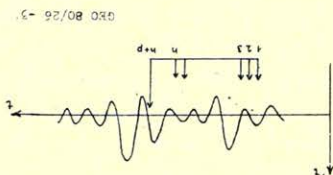
Dekonvolúción azt a műveletet értjük, amely a szeizmogrammból (2. c) a reflexivitás függvény (2. b) valamilyen közelítését állítja elő. A dekonvolúció végrehajtására számos elvileg különböző módszer létezik (minimumentrópiás, homomorf), a gyakorlatban legjobban bevált eljárások azonban azok, amelyek a jóslási hiba számításán alapulnak. A továbbiakban vázlatosan ismertetjük e módszerek elvét.

A 2. a ábrán megfigyelhetjük, hogy a reflektált hullámok közötti interferencia akkor erős, ha a wavelet hossza a beérkezési idők különbségeihez képest nagy. A dekonvolúciónak tehát csökkentenie kell a jelalak hosszát. A jóslási hiba számításán alapuló (prediktív) dekonvolúcióval ezt a célt a következő módon érhetjük el:

A szeizmogramm korábbi adatai alapján jósoljuk a szeizmogramm egy későbbi adatát, majd a valódi és a jósolt érték különbségét képezve kiszámítjuk a jósolási hibát (3. ábra). Ezt a műveletet a szeizmogramm minden adatára elvégezzük, az így kapott sorozat képezi a dekonvolúció kimenetét. A jósolás matematikai alakja:

$$\hat{x}_t = \sum f_i x_{t-i-p},$$

ahol x_t és \hat{x}_t a szeizmogramm valódi, illetve jósolt értéke a t időpontban, $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ a jósoló operátor, p a jósolási távolság. A jósoló operátor együtt hatóit úgy választjuk, hogy a jósolási hiba szórásnégyzete minimális legyen.



3. ábra. Puc. 3. Fig. 3.

Minden matematikai megfontolás nélkül, egyszerűen a szemléletre támaszkodva beláthatók a következők:

A jósolási hiba csak ott lehet nagy, ahol új információ érkezik a közegről. Tegyük fel, hogy egy geofonpontba még semmilyen reflexió nem érkezett, így a geofon kimenetén levő feszültség nulla. Nyilván azt jósolnánk, hogy a következő időpontokban sem fog változni a feszültség. Ez a helyzet áll fenn mindaddig, míg az első reflexió be nem érkezik. Mivel a talaj szerkezetéről előzőleg semmit sem tudunk, és semmilyen információ nem áll rendelkezésünkre, hogy előre jelezzük a hullám beérkezését, a hullám első részének beütésekor a jósolási hiba nagy lesz. Geofonunk kimenetén tehát megjelenik a hullám lefutásának megfelelő feszültség. E feszültséget a beütés után számítva, néhány msec elteltével már ismét tudjuk jósolni, feltéve, hogy valamilyen közelítéssel ismerjük a hullám alakját.

Ahhoz azonban, hogy az előbb leírt mechanizmus érvényesülhessen, teljesülniük kell az alábbi követelményeknek:

A hullámnak hirtelen kell elkezdődni (matematikai kifejezéssel: szükséges, hogy a jel minimumfázisú legyen), máskülönben a beütéskor sem lesz kiugró a jósolási hiba (4. ábra). A másik követelmény: nem szabad, hogy a reflexiók beérkezési ideje között valamilyen szisztéma érvényesüljön (mint pl. a többszörös reflexióknál), ekkor ugyanis az új információt hordozó hullám is jósolható. (A feltétel matematikai megfogalmazása: a reflexivitás függvénynek korrelálatlannak, fehér spektrumúnak kell lenni.)

Az esetleges problémát tehát nem az okozza, hogy a jósoló algoritmus rosszul működik. Éppen ellenkezőleg, a dekonvolúció kimenete akkor lesz gyenge minőségű, ha a hullám kedvezőtlen alakja vagy a reflexivitás függvény korreláltsága miatt pontosabban tudunk jósolni, mint kellene. Ilyenkor a hasznos információ egy része elvész. E hatások ellen a jósolási távolság növelésével, illetve a jósoló operátor hosszának csökkentésével védekezhetünk.



4. ábra. a) Minimumfázisú wavelet b) Kevert fázisú wavelet
 Рус. 4. а) Сигнал с минимальной фазой, б) Сигнал со смешанной фазой

Fig. 4. a) Minimum phase wavelet b) Mixed phase wavelet

Befejezésül tömören összefoglaljuk a *jóslási hibát* számító dekonvolúciós módszerekkel kapcsolatos tudnivalókat.

1. A jóslás feladata matematikailag teljesen megoldott, mindig meg tudjuk adni az optimális jóslást. A jóslási hiba ezért mindig számítható.

2. A jóslási hibák sorozata közelítést ad a reflexivitás függvényre, ha teljesül az alábbi két feltétel:

- a) a jelalak minimumfázisú
- b) a reflexivitás függvény korrelálatlan

3. Ha a fenti két feltétel nem teljesül, a hasznos információ egy része elvész

A dolgozathoz mellékelt dekonvolvált szelvények a GKV fejlesztési osztályán kidolgozott autoadaptív dekonvolúcióval készültek. Az új algoritmus fő eltérése a hagyományos dekonvolúciós algoritmusoktól, hogy a jósló operátor mintáról mintára változhat. Mivel a szűrő időben folyamatosan változik, lehetővé válik a jel alakváltozásainak követése a szeizmogramm mentén. A jóslás és a jósló operátor javítása rekurzív úton történik. Az optimális rekurzív szűrések elméletét *R. E. Kalman* dolgozta ki a 60-as évek elején, ezért az ilyen szűrést szokás *Kalman-féle szűrésnek* is nevezni. Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban általában a *Kalman-egyenletek* egyszerűsített változatait használjuk a fennálló számítás-technikai nehézségek miatt.

A következőkben levezetjük a rekurzív szűrés egyik legegyszerűbb változatát. Jelölje a jóslási hibák négyzetének összegét $t-1$ időpontig $E(t-1)$, és tegyük fel, hogy a rendelkezésünkre álló f operátor minimalizálja $E(t-1)$ -et.

$$E(t-1) = \sum_{\tau=-\infty}^{t-1} \left(x_{\tau} - \sum_i f_i x_{\tau-i-p} \right)^2$$

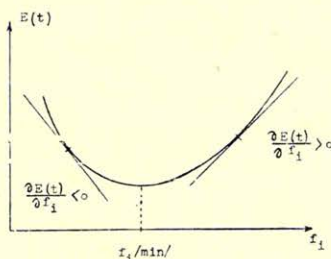
$$= \sum_{\tau} e_{\tau}^2 = \text{minimum,}$$

ahol e_{τ} jelöli a τ időponthoz tartozó jóslási hibát. A szélsőérték fennállásának szükséges feltétele miatt:

$$\frac{\partial E(t-1)}{\partial f_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Ha az előző összegben a t időhöz tartozó e_t hibát is figyelembe vesszük, feltehető, hogy az f operátor már nem optimális, ezért $\partial E(t)/\partial f_i \neq 0$. Tekintve, hogy $E(t)$ az f_i együttthatók pozitív négyzetes függvénye (ez azt jelenti, hogy az $E(t)-f_i$

függvény grafikonja egy száraival felfelé mutató parabola, amely sehol nem kerül az abszcissa alá), $\partial E(t)/\partial f_i > 0$ esetén f_i -t csökkenteni kell, $\partial E(t)/\partial f_i < 0$ esetén f_i -t növelni kell, hogy az optimumot újra elérjük, vagy legalább megközelítsük (5. ábra).



DEO 80/26 -

5. ábra. Puc. 5. Fig. 5.

Mivel

$$\frac{\partial E(t)}{\partial f_i} = \frac{\partial E(t-1)}{\partial f_i} + \frac{\partial e_t^2}{\partial f_i},$$

és a szűrő optimalitására vonatkozó feltevésünk szerint az első tag nulla:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial f_i} = \frac{\partial e_t^2}{\partial f_i} = -2e_t x_{t-i-p}$$

A fenti okoskodás alapján a szűrőegyütthatók módosítására a következő lehetőség kínálkozik:

$$f_i \leftarrow f_i + 2ke_t x_{t-i-p},$$

ahol k valamilyen pozitív állandó. Behozonyítható, hogy k megfelelő választása esetén az algoritmus stabil, ezenkívül időben változatlan jelalak esetén a szűrő a Wiener-egyenletből kapható szűrőhöz közelít. A szűrés megkezdésekor természetesen f -nek valamilyen kezdőértéket kell adni. Legegyszerűbben akkor járunk el, ha $f = 0$ -át veszünk. Látható, hogy a szűrőegyütthatók módosításakor felhasználjuk a szűrés kimenetét képező e_t jóslási hibát is. A szűrő javításában alkalmazott rekurzió tehát olyan negatív visszacsatolásnak felel meg, amely a jóslási hiba elnyomására irányul.

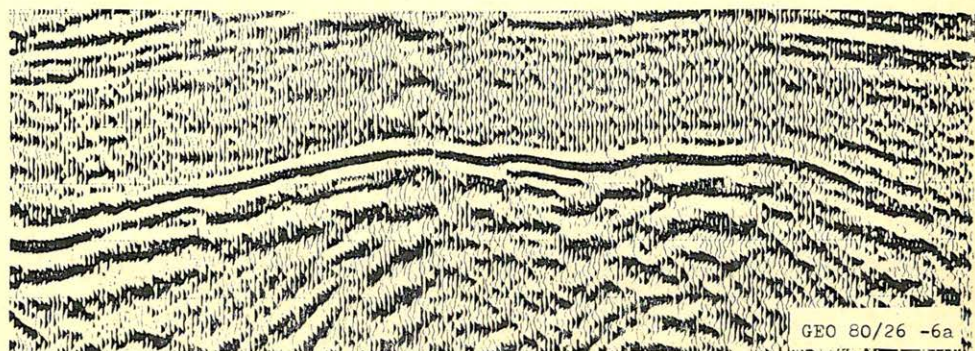
IV.

Vállalatunk fejlesztési osztályán kutatások folynak a szeizmikus mérési eredmények geológiai-litológiai értelmezésével kapcsolatban. E kutatások keretében a Zsana-Észak kutatási terület szeizmikus anyagának másodszori, kísérleti feldolgozása során megpróbálkoztunk az eredmények litológiai értelmezésével is.

Jelenlegi tapasztalataink szerint a dekonvolvált szelvényeken fellépő amplitúdó és fázisbeli változások tanulmányozása kedvező esetben módot ad a szénhidrogén tároló határainak megállapítására, illetve egyes esetekben a szénhidrogén tároló indikálására. Az elérhető eredményeket a Zsana - É - 2 mélyfúráson

áthaladó, egymást keresztező $\text{Öt}-2$ és $\text{Öt}-30$ szelvényeken mutatjuk be. A szelvények dekonvolvált változatai az osztályunkon kidolgozott egy- és két-csatornás autoadaptív dekonvolúcióval készültek. (6.a, 6.b, 6.c, 6.d ábrák)

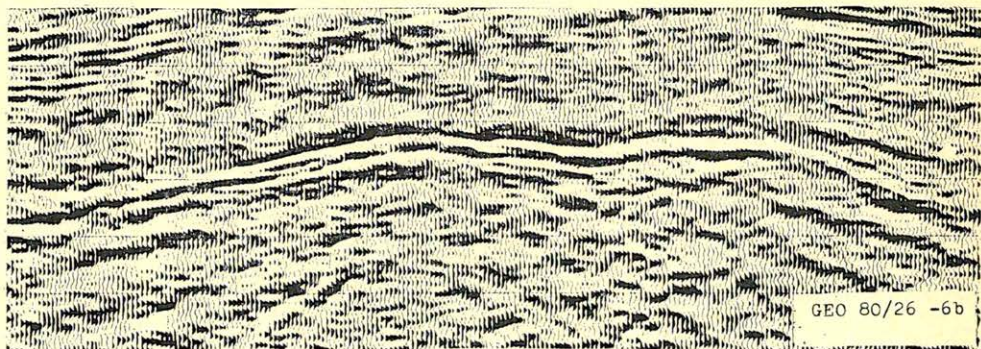
Az alsó-pannon miocén határ az összecszelvényeken erős, jól korrelálódó negatív fázissal jelentkezik 1500 és 1600 msec között. Ez a szint 20–30 msec-al mélyebbre esik a fúrási adatok alapján számított kétszeres futási időknél. A dekonvolvált szelvényeken az előbbi szint felett megjelenik egy pozitív fázisú hullám, melynek amplitúdója a gáztest felett feltűnően nagy. Az e szinthez tartozó futási idők jól egyeznek a fúrási adatokból számított időkkel. Különösen markánsan jelentkezik a gáztest vastagabb részének határa (az $\text{Öt}-2$ szelvényen baloldalon, az $\text{Öt}-30$ szelvényen jobboldalon).



6. a) ábra. $\text{Öt}-2$ stacking szelvény

Рис. 6. а) Временной разрез ОГТ $\text{Öт}-2$

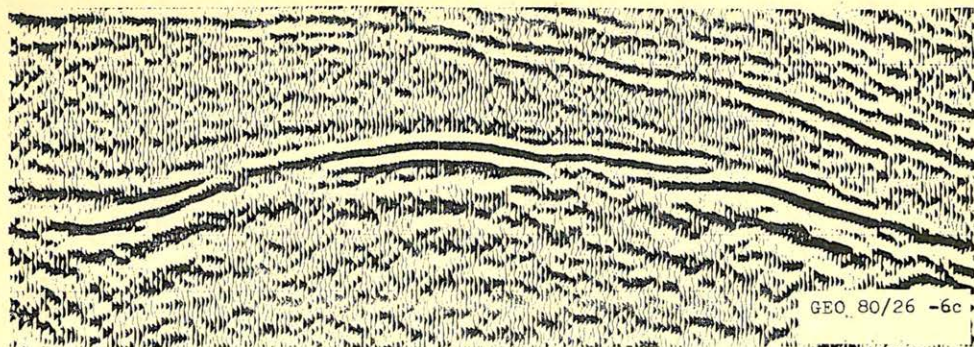
Fig. 6. а) $\text{Öт}-2$ stacking section



6. b) ábra. $\text{Öт}-2$ dekonvolvált szelvény

Рис. 6. б) Разрез $\text{Öт}-2$ после деконволюции

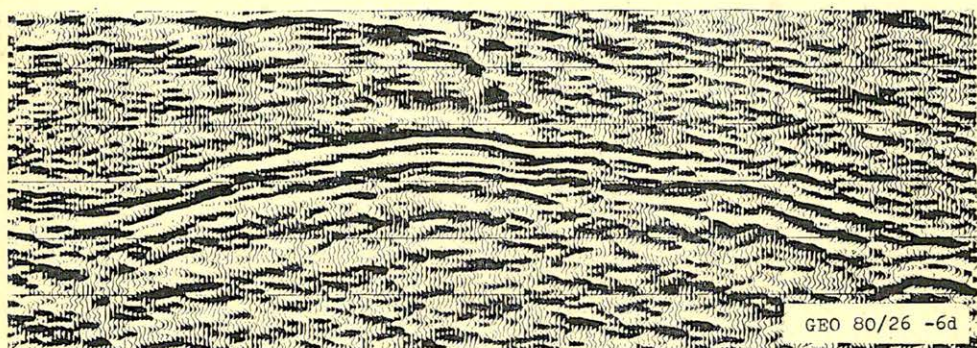
Fig. 6. б) $\text{Öт}-2$ deconvolved section



6. c) ábra. Öt-30 stacking szelvény

Рис. 6. c) Временной разрез ОГТ Öт-30

Fig. 6. c) Öt-30 stacking section



6. d) ábra. Öt-30 dekonvolált szelvény

Рис. 6. d) Разрез Öт-30 после деконволюции

Fig. 6. d) Öt-30 deconvolved section

1. A szeizmikus csatorna modelljei

A szeizmikus csatornák dekonvolúciójával foglalkozó elméleti munkákban általános gyakorlat a csatornák ún. konvolúciós modelljének alkalmazása. Mivel e dolgozatban a szokásostól eltérő utat követve a szeizmikus csatorna autoregresszív modelljéből indulunk ki, célszerűnek láttuk külön pontban foglalkozni az általunk használt modell egyes tulajdonságaival.

Jelölje a szeizmikus csatorna adatait y_t , t a diszkrét idő paraméter ($t=1,2,\dots$). A csatorna autoregresszív modellje:

$$y_t = \sum_{i=1}^n a_i y_{t-i} + v_t, \quad (1.1)$$

ahol a_i ($i=1,2,\dots,n$) az i -edik autoregressziós együttható, $\{v_i\}$ pedig független fehér zaj:

$$E\{v_i\} = 0, \quad E\{v_i v_k\} = \delta_{ik} R. \quad (1.2)$$

A prediktív dekonvolúciós módszerekben olyan f_i együtthatókból álló jósló operátort határozunk meg, amely minimalizálja a jóslási hiba átlagos energiáját:

$$y_t = \sum_{i=1}^n f_i y_{t-i} + e_t. \quad (1.3)$$

Az (1.3) egyenlet jobboldalának első tagja jelenti az y_t adat jóslt értékét (jósolható komponens), e_t pedig a jóslási hibát¹⁾ (jósolhatatlan komponens). Mint látni fogjuk, a számunkra értékes információt a modell jósolhatatlan komponense hordozza. Az (1.1) és (1.3) egyenletek hasonlósága alapján világos, hogy az elvileg legjobb jóslás az (a_1, a_2, \dots, a_n) operátorral valósítható meg, és a gyakorlatban előállítható f_i szűrőegyütthatók az a_i autoregressziós együtthatók becsléseinek, az e_t jóslási hiba pedig a v_t zaj becslésének tekinthetők.

Hasonlítsuk össze a csatorna (1.1) autoregressziós modelljét a szokásos konvolúciós modellel! Jelölje a gerjesztő jelalakot, azaz a waveletet h_t ($t = 0, 1, 2, \dots$), a reflexivitás függvényét pedig v_t . Ekkor a csatorna konvolúciós modellje:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i v_{t-1}. \quad (1.4)$$

Az (1.4) egyenlet z -transzformáltját véve:

$$Y(Z) = H(Z) V(Z). \quad (1.5)$$

Képezzük az (1.1) egyenlet z -transzformáltját:

$$Y(Z) = zA(Z) Y(Z) + V(Z). \quad (1.6)$$

Feltéve, hogy az $1 - zA(Z)$ polinom gyökei a komplex számsík zárt egységkörén kívül fekszenek, írhatjuk:

$$Y(Z) = [1 - zA(Z)]^{-1} V(Z). \quad (1.7)$$

Az (1.5) és (1.7) egyenletek összehasonlítása alapján a következőket mondhatjuk:

A konvolúciós modellben szereplő $\{h_t\}$ jelalak illetve a $\{v_t\}$ reflexivitás függvény megfelel az autoregressziós modellben fellépő $(1, -a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ sorozat konvolúciós inverzének illetve a modell jósolhatatlan komponensének. Az (1.6) után tett feltevés szerint az (1.4) konvolúciós modell akkor írható le autoregresszív folyamattal is, ha a jelalak minimumfázisú, vagyis ha a

$$H(Z) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^i \quad (1.8)$$

polinomnak a zárt egységkörön sem zérushelye, sem pólusa nincs. Az elmondottakból következik, hogy az autoregresszív modell használata a konvolúciós modellhez képest bizonyos korlátozást jelent. A prediktív dekonvolúció feladatának természetéből adódóan azonban a jelalak minimumfázisúságát kénytelenek vagyunk kikötni²⁾, így az említett korlátozás nem lényeges.

¹ Kimutatható, hogy az optimális jóslás e_t hibája szintén rendelkezik az (1.2)-nek megfelelő tulajdonságokkal.

² Az (1.3) egyenletből látható, hogy a jóslási hiba számításakor a szeizmikus csatornára „ráhúzzuk” az autoregresszív modellt, azaz úgy kezeljük, mintha (y_t) kielégítené (1.1)-et.

Fontos megértenünk, hogy az $\{y_t\}$ csatorna stabilitásának feltétele, hogy (1.1)-ben az $(I, -a_1, \dots, -a_n)$ sorozat minimumfázisú legyen. Vizsgáljuk e célból a

$$b_0 y_t + b_1 y_{t-1} + \dots + b_n y_{t-n} = g_t \quad b_0 \neq 0 \quad (1.9)$$

állandó együtthatós n -edrendű differenciaegyenlet megoldásait! Látható, hogy az (1.9) differenciaegyenletnek bármely y_1, y_2, \dots, y_n kezdeti feltétel mellett létezik egyértelmű megoldása:

$$y_t = (g_t - b_1 y_{t-1} - b_2 y_{t-2} - \dots - b_n y_{t-n}) / b_0 \quad (1.10)$$

$t > n$

Itt is érvényes az a differenciálegyenletek elméletében ismert tétel, mely szerint az inhomogén egyenlet általános megoldása a homogén egyenlet általános megoldásának, valamint az inhomogén egyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldásának összegeként kapható meg. Állítsuk elő az (1.9) egyenletnek megfelelő

$$\sum_{i=0}^n b_i y_{t-i} = 0 \quad (1.11)$$

homogén egyenlet általános megoldását! Keressük a megoldást

$$y_t = z^{-t} \quad (1.12)$$

alakban! (1.12)-t (1.11)-be helyettesítve:

$$z^{-t} \sum_{i=0}^n b_i z^i = 0 \quad (1.13)$$

A keresett általános megoldás:

$$C_1 z_1^{-t} + C_2 z_2^{-t} + \dots + C_n z_n^{-t}, \quad (1.14)$$

ahol z_1, z_2, \dots, z_n a $B(Z) = 0$ egyenlet gyökei (az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden gyök egyszeres), a C_1, C_2, \dots, C_n állandók pedig a kezdeti feltételekből határozhatók meg. Látható, hogy az (1.11) homogén egyenlet akkor és csak akkor stabil tetszőleges y_1, y_2, \dots, y_n kezdeti érték mellett, ha

$$|z_i| > 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

azaz, ha a $\{b_t\}$ sorozat minimumfázisú. Ekkor a homogén egyenlet megoldásaira teljesül a

$$\sum_{t=1}^{\infty} y_t^2 < K_1 \quad \text{és} \quad \sum_{t=1}^{\infty} |y_t| < K_2$$

egyenlőtlenség, és az inhomogén egyenlet megoldásában a kezdeti értékek megváltozásának hatása $t \rightarrow \infty$ esetén nullához tart. Ezért az (1.1) és (1.9) egyenletek együtthatóinak összevetéséből láthatjuk, hogy stabil folyamat esetén az $(I, -a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ sorozat minimumfázisú.

Az autoregressziós folyamat modellje jól illeszkedik a jóslási hiba dekonvolúció feladatához, a modell fő előnye azonban az, hogy könnyen általánosítható nemstacionárius folyamatokra is. Az egyik legegyszerűbb lehetőség:

$$a_t^i = a_t^{i-1} + w_t^i y_t = \sum_{i=1}^n a_t^i y_{t-i} + v_t, \quad (1.15)$$

ahol a_i^t az i -edik autoregressziós együttható értéke a t időpontban. Az (1.15) által definiált modellben az autoregressziós együtthatók³⁾ függenek az időtől. A 2. fejezetben a w_i^t mennyiséget független fehér zajnak fogjuk tekinteni. A szeizmikus csatorna e dolgozatban használt modelljei közül (1.15) a legáltalánosabb.

2. Rekurzív legkisebb négyzetes becslés

Ebben a fejezetben a szeizmikus csatorna autoregresszív modelljéből kiindulva levezetünk egy algoritmust, amely segítségével rekurzív úton becsülhetjük az autoregressziós együtthatókat. E becslések sorozata jelenti az időben változó jósló szűrőt. Az algoritmus a dekonvolúció kimenetét képező jóslási hibát is szolgáltatója. Egy egyszerű numerikus példa vizsgálatával illusztráljuk a rekurzív konvergencia tulajdonságait és a becslés pontosságát.

A rekurzív algoritmus

Legyen $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ egy m dimenziós stacionárius autoregresszív folyamat 4)

$$y_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{k-i} + v_k, \quad (2.1)$$

ahol α_i az i -edik autoregressziós együttható, v_k független zajfolyamat. A zaj statisztikus jellemzői:

$$E\{v_k\} = 0, \quad E\{v_k v_i^T\} = \delta_{ik} R. \quad (2.2)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$M_k = (y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_{k-n}), \\ \bar{\alpha}^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Ezek felhasználásával:

$$y_k = M_k \bar{\alpha} + v_k. \quad (2.3)$$

Megjegyzendő, hogy M_k sormátrixot jelöl, ezt a későbbiekben külön nem jelöljük.

A feladat az α_i együtthatók becslése, jelöljük e becsléseket a_i -vel, és az előzőekhez hasonlóan alkalmazzuk az $\bar{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ jelölést. Az y_1, y_2, \dots, y_k mérési adatokon alapuló becslést a következő veszteségfüggvény minimalizálásával állítjuk elő:

$$J_k(\bar{a}) = (\bar{a} - \bar{a}_0)^T P_0^{-1} (\bar{a} - \bar{a}_0) + \sum_{i=1}^k (y_i - M_i \bar{a})^T R^{-1} (y_i - M_i \bar{a}), \quad (2.4)$$

³ A szakirodalomban csak az (1.1) egyenlettel definiált sorozatot nevezik autoregresszív folyamatnak. Az a_i^t együtthatók a Kalman-szűrő elméletében szereplő állapotváltozóknak felelnek meg.

⁴ A most következő levezetésben alkalmazott mátrixos írásmód lehetővé teszi, hogy $\{y_k\}$ -t többdimenziós folyamatnak értelmezzük, a képletek áttekinthetősége érdekében azonban az m dimenziószámot nem jelöljük. Így pl. $m = 1$ esetén R a zaj szórásnégyzete – skalár mennyiség, $m > 1$ esetén a R zaj $(m \times m)$ -es kovariancia mátrixa.

ahol a_0 az \bar{a} vektor apriori becslése, P_0 az apriori becslés kovariancia mátrixa (pozitív definit). A $J_k(\bar{a})$ függvény minimumát biztosító \bar{a} vektort jelöljük \bar{a}_k -val:

$$\bar{a}_k = \arg\{\min J_k(\bar{a})\}.$$

Képezzük a $\partial J_k / \partial a_i$ parciális deriváltakat, és tegyük ezeket egyenlővé nullával:

$$P_0^{-1}(\bar{a}_k - \bar{a}_0) - \sum_{i=1}^k M_i^T R^{-1}(y_i - M_i \bar{a}_k) = 0. \quad (2.5)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$S_k = \sum_{i=1}^k M_i^T R^{-1} M_i, \quad (2.6)$$

(S_k az apriori információ nélküli információs mátrixot jelenti) valamint

$$H_k = \sum_{i=1}^k M_i^T R^{-1} y_i. \quad (2.7)$$

E jelölések felhasználásával (2.5) megoldása az alábbi egyszerű alakba írható:

$$\bar{a}_k = [P_0^{-1} + S_k]^{-1} [H_k + P_0^{-1} \bar{a}_0]. \quad (2.8)$$

(A $P_0^{-1} + S_k$ mennyiség az információs mátrix.) Írjuk fel a (2.6), (2.7), (2.8) összefüggéseket a $k+1$ időre:

$$S_{k+1} = S_k + M_{k+1}^T R^{-1} M_{k+1}, \quad (2.9)$$

$$H_{k+1} = H_k + M_{k+1}^T R^{-1} y_{k+1}, \quad (2.10)$$

bevezetve a

$$P_k^{-1} = P_0^{-1} + S_k \quad (2.11)$$

jelölést (P_k az \bar{a}_k becslés kovariancia mátrixa):

$$\bar{a}_{k+1} = [P_k^{-1} + M_{k+1}^T R^{-1} M_{k+1}]^{-1} [P_k^{-1} \bar{a}_k + M_{k+1}^T R^{-1} y_{k+1}], \quad (2.12)$$

továbbá

$$P_{k+1}^{-1} = P_k^{-1} + M_{k+1}^T R^{-1} M_{k+1}. \quad (2.13)$$

A (2.12) és (2.13) egyenletek rekurzív összefüggést adnak meg az \bar{a}_k becslésre illetve a P_k mátrixra. Megjegyezzük, hogy bár többször utaltunk rá, ebből a levezetésből nem tisztázódik a P_k mátrix jelentése. A későbbiekben megmutatjuk (lásd a függelék B pontját), hogy P_k valóban az \bar{a}_k becslés kovarianciája. Hogy egyenleteinket a megszokott, egyben a gyakorlati alkalmazás szempontjából kedvezőbb alakra hozzuk, vezessük be az ún. *Kalman-gain* vektort:

$$K_{k+1} = P_k M_{k+1}^T [M_{k+1} P_k M_{k+1}^T + R]^{-1}, \quad (2.14)$$

és alkalmazzuk a (2.12) és (2.13) egyenletekben a C függelék 6. és 5. képletét! Ezekkel:

$$\bar{a}_{k+1} = \bar{a}_k + K_{k+1}(y_{k+1} - M_{k+1} \bar{a}_k), \quad (2.15)$$

$$P_{k+1} = P_k - K_{k+1} M_{k+1} P_k. \quad (2.16)$$

A (2.14), (2.15), (2.16) egyenletek előnye (2.12) és (2.13)-mal szemben, hogy numerikus kizámításuk nem igényel mátrix inverziót (feltéve e, hogy $\{y_k\}$ egydi-

menziós folyamat). A (2.14), (2.15), (2.16) egyenletek formailag azonosak a diszk-rét Kalman szűrő egyenleteivel. Vegyük észre, hogy a (2.15)-ben szereplő $y_{k+1} - M_{k+1} \cdot \bar{a}_k$ mennyiség nem más, mint a jóslási hiba, és amennyiben a K_{k+1} vektorban szereplő P_k és $M_{k+1} P_k M_{k+1}^T + R$ mátrixokat skalár állandókkal helyettesítjük, (2.15) megegyezik a bevezetésben leírt adaptív algoritmussal.

Az algoritmus konvergencia tulajdonságairól a következőket mondhatjuk: Feltéve, hogy az $\{y_t\}$ folyamat ergodikus, és így $k \rightarrow \infty$ esetén S_k/k a folyamat pozitív definit autokorrelációs mátrixához, H_k/k a folyamat autokorrelációs vektorához tart I valószínűséggel, (2.8)-ból látható, hogy a becslések sorozata konvergens, és a határérték kielégíti a *Yule - Walker egyenleteket*.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = [E\{M_t^T M_t\}]^{-1} E\{y_t M_t\}, \quad (2.17)$$

ahol a stacionaritás feltételezése miatt a jobboldalon szereplő várható értékek az időtől függetlenek. Ezért az \bar{a}_k becslések sorozata konvergál az autoregressziós együtthatók vektorához, azaz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{\alpha}. \quad (2.18)$$

Eddigi eredményeink alapján *stacionárius* folyamatok real time szűrését tudjuk megvalósítani, egyenleteink azonban könnyen módosíthatók általánosabb esetre is. Tekintsük a következő folyamatot:

$$\bar{\alpha}_t = \bar{\alpha}_{t-1} + \bar{w}_t, \quad (2.19)$$

$$y_t = \sum_{i=1}^n y_{t-i} \alpha_i + v_t,$$

ahol \bar{w}_t egy valószínűségi vektorváltozó az alábbi statisztikai jellemzőkkel:

$$\begin{aligned} E\{\bar{w}_t\} &= \bar{o}, & E\{\bar{w}_i \bar{w}_k^T\} &= \delta_{ik} Q \\ E\{\bar{w}_t \bar{\alpha}_{t-i}^T\} &= 0, & E\{\bar{w}_t y_{t-i}\} &= \bar{o}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

($i = 1, 2, \dots$)

A (2.19) modell csak abban különbözik a korábbi modellünktől, hogy az $\bar{\alpha}$ vektor az idő (sztochasztikus) függvénye. Az időben változó autoregressziós együtthatók becslése a korábbi módon végezhető, egyedül a becslések kovarianciájára vonatkozó (2.16) egyenletet kell módosítanunk. Jelölje $\bar{\alpha}'_{t+1}$ az $\bar{\alpha}_{t+1}$ vektor becslését az y_1, y_2, \dots, y_t adatok alapján, és jelölje P'_{t+1} e becslés kovariancia mátrixát. Ekkor nyilván

$$\bar{\alpha}'_{t+1} = \bar{\alpha}_t, \quad (2.21)$$

és mivel független valószínűségi változók szórásnégyzete összeadódik

$$P'_{t+1} = P_t + Q. \quad (2.22)$$

Ezek figyelembevételével a (2.14), (2.15), (2.16) egyenletek az alábbiak szerint módosulnak:

$$\bar{a}_{t+1} = \bar{a}'_{t+1} + K_{t+1}(y_{t+1} - M_{t+1} \bar{a}'_{t+1}), \quad (2.23)$$

$$P_{t+1} = P'_{t+1} - K_{t+1} M_{t+1} P'_{t+1}, \quad (2.24)$$

$$K_{t+1} = P'_{t+1} M_{t+1}^T [M_{t+1} P'_{t+1} M_{t+1}^T + R]^{-1}. \quad (2.25)$$

Bár a (2.21)–(2.25) egyenletekkel megadott algoritmus egydimenziós folyamat esetén nem tartalmaz mátrix inverziót, az $M_{t+1}P_tM_{t+1}^T$ kvadratikus alak és a többi mátrix szorzás kiszámítása igen sok műveletet igényel. Az algoritmust úgy egyszerűsíthetjük, hogy a P_t és Q mátrixokban csak a főátló elemeit vesszük figyelembe. Ha a Q mátrix az alábbi alakú:

$$Q = \sigma_w^2 I, \quad (2.26)$$

ahol I az egységmátrix, akkor a $\sigma_w^2 = 0$ választással stacionárius, $\sigma_w^2 > 0$ választással pedig nemstacionárius folyamat szűrését végezhetjük. A σ_w^2 paraméter nagysága meghatározza az algoritmus adaptációs képességét, azaz a jósló szűrő időbeli változásának gyorsaságát.

Numerikus példa

Egy egyszerű numerikus példa segítségével szemléltetni fogjuk az előző részben ismertetett algoritmus működését, egyben kísérletileg vizsgáljuk a rekurzív becslés pontosságát. Az elvégzendő számításokat egy rövid FORTRAN nyelvű programrészlet illusztrálja.

Legyen $\{y_t\}$ egy elsőrendű autoregresszív folyamat:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + v_t, \quad (2.27)$$

ahol α az autoregressziós együttható ($|\alpha| < 1$), v_t normális eloszlású fehér zaj. A v_t zaj statisztikus jellemzői:

$$E\{v_t\} = 0, \quad E\{v_t v_k\} = \delta_{tk}. \quad (2.28)$$

Vizsgáljuk meg az autoregressziós együttható becsléseit! Az ismert *Cramer–Rao formula* alapján α minden $\hat{\alpha}$ torzítatlan ($E\{\hat{\alpha}\} = \alpha$) becslésének szórásnégyzetére felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$D^2\{\hat{\alpha}\} \geq [-NE\{\partial^2 \ln[\text{prd}(y|\alpha)]/\partial \alpha^2\}]^{-1}, \quad (2.29)$$

ahol a $\text{prd}(y|\alpha)$ feltételes valószínűség sűrűség a likelihood függvény, N a független mérések száma. Határozzuk meg a $\text{prd}(y|\alpha)$ likelihood függvényt. A folyamatot definiáló (2.27) egyenletből:

$$v_t = y_t - \alpha y_{t-1},$$

ezenkívül

$$\text{prd}(v_t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-v_t^2/2\}. \quad (2.30)$$

(2.30) felhasználásával:

$$\text{prd}(y|\alpha) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-(y_t - \alpha y_{t-1})^2/2\}. \quad (2.31)$$

(2.31) logaritmusát véve, elvégezve a deriválásokat, majd az eredményt (2.29)-be helyettesítve kapjuk:

$$D^2\{\hat{\alpha}\} \geq (1 - \alpha^2)/N. \quad (2.32)$$

A (2.32) képlet elvi határt ad meg a keresett autoregressziós együttható torzítatlan becsléseinek szórásnégyzetére. (2.32) jelentése szavakban összefoglalva: Tegyük fel, hogy a (2.27) által megadott autoregresszív folyamat egy realizációjából ismerünk N egymást követő mintát, és e mintákból becsülni kívánjuk

az α paramétert. (2.32) szerint akármilyen torzítatlan becslést választunk (pl. a maximum likelihood becslést), a becslés pontossága nem lépheti túl a (2.32)-vel adott határt.

A továbbiakban megvizsgáljuk az előző részben levezetett rekurzív algoritmussal előállítható becslés pontosságát, illetve hogy a becslés szórása hogyan viszonyul a (2.32) elvi határhoz. A vizsgálat céljából az α autoregressziós együttható néhány értékére elkészítettük a (2.27) folyamat 100–100 független realizációját. Az egyes realizációk első 50, 100, 200, 400 mintáját felhasználva ($N = 50, 100, 200, 400$) becslültük az α együtthatót, majd a becslésekből tapasztalati várható értéket és szórásnégyzetet számítottunk az alábbi képletek alapján:

$$E\{\hat{\alpha}\} = \sum_{i=1}^{100} \hat{\alpha}_i / 100, \quad (2.33)$$

$$D^2\{\hat{\alpha}\} = \sum_{i=1}^{100} [E\{\hat{\alpha}\} - \hat{\alpha}_i]^2 / 100. \quad (2.34)$$

A becslést végző program egy részlete a következő volt:

```

ALFA = 0.
P = 1.
DO 10 I = 2, N
GAIN = P*Y(I-1)/(Y(I-1)*P*Y(I-1)+1.)
ALFA = ALFA + GAIN*(Y(I) - ALFA*Y(I-1))
10 P = P - GAIN*Y(I-1)*P

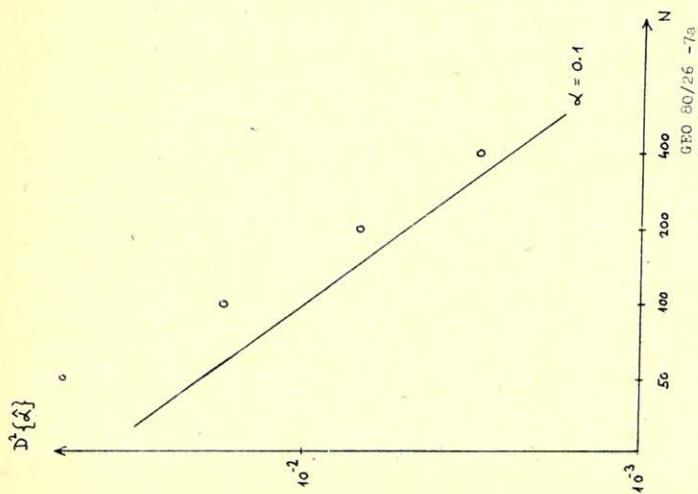
```

Az eredményeket az 1. táblázat és a 7. ábra szemlélteti.

1. táblázat — таблица 1. — Table 1.

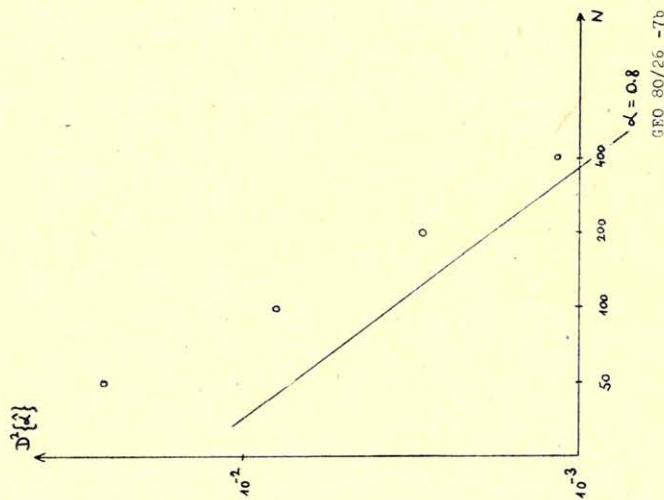
α valódi értéke	A becslés átlagértéke N adat felhasználásával			
	N = 50	N = 100	N = 200	N = 400
$\alpha = 0,1$	0,0986	0,107	0,108	0,103
$\alpha = -0,5$	-0,459	-0,488	-0,497	-0,499
$\alpha = 0,8$	0,742	0,779	0,792	0,797

Az ábrákon a becslések szórásnégyzetét tüntettük fel a minták számának függvényében, mindkét irányban logaritmikus léptéket alkalmazva. A folytonos vonallal húzott egyenes jelzi a (2.32)-vel adott elvi határt, körrel jelöltük a szórásnégyzetek tapasztalati értékeit.



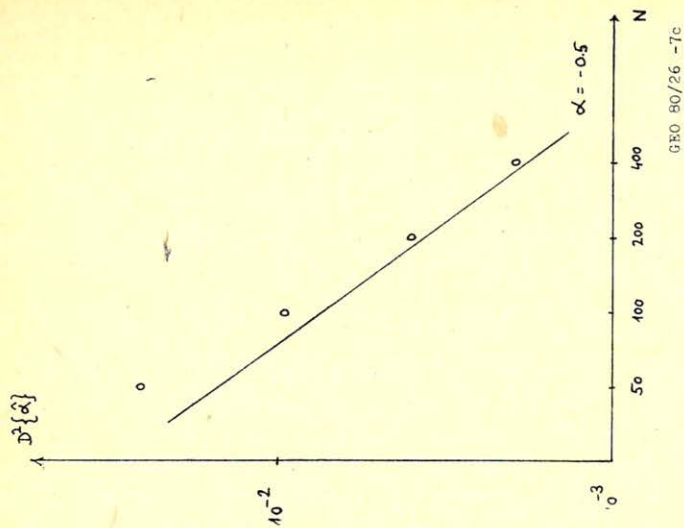
7. a) ábra.
 Puc. 7. a)
 Fig. 7. a)

GEO 80/26 - 7a



7. b) ábra.
 Puc. 7. b)
 Fig. 7. b)

GEO 80/26 - 7b



7. c) ábra.
 Puc. 7. c)
 Fig. 7. c)

GEO 80/26 - 7c

Ebben a pontban a bevezetés III. szakaszában ismertetett szuboptimális adaptív jósló algoritmus tulajdonságaival kívánunk foglalkozni. Ez az algoritmus a 2. fejezetben levezetett rekurzív legkisebb négyzetes szűréshez képest kevésbé pontos jóslást ad. Figyelembe véve azonban a szuboptimális algoritmus egyszerűségét és gyorsaságát, valamint azt a bevezetésben már említett körülményt, hogy a dekonvolvált szelvény minőségét döntően nem a jóslás pontossága illetve pontatlansága befolyásolja megállapítjuk, hogy a szuboptimális algoritmus a gyakorlati alkalmazás számára igen előnyös.

Legyen $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ diszkrét idő paraméterű, nulla várható értékű, véges második momentumú véletlen sorozat. Keressük az $\{y_t\}$ folyamat legkisebb négyzetes, lineáris becslését az $\{x_t\}$ folyamat realizációi alapján. ($\{x_t\}$ a bemenet, $\{y_t\}$ a kívánt kimenet.) y_t becslését jelölje \hat{y}_t és legyen a becslés a következő alakú:

$$\hat{y}_t = \sum_{i=0}^n f_i x_{t-i}. \quad (\text{A.1})$$

Bevezetve az

$$\bar{f}^T = (f_0, f_1, \dots, f_n), \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{x}_t^T = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-n})$$

jelöléseket:

$$\hat{y}_t = \bar{f}^T \bar{x}_t. \quad (\text{A.3})$$

A szűrési hiba:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t. \quad (\text{A.4})$$

Követve a bevezetés III. pontjának gondolatmenetét az optimumszűrő közelítéseit az alábbi egyenlet révén számíthatjuk:

$$\bar{f}_{t+1} = \bar{f}_t + 2k e_t \bar{x}_t. \quad (\text{A.5})$$

A bevezetésben tett – nagyrészt intuitív – megfontolásaink semmit sem mondanak a k állandó választásáról, továbbá az (A.5) által meghatározott algoritmus stabilitásáról és konvergencia tulajdonságairól. Ezekkel a kérdésekkel foglalkozunk a továbbiakban.

Tegyük fel, hogy az $\{x_t\}$ és $\{y_t\}$ folyamat stacionárius; ekkor az $E\{\bar{x}_t \bar{x}_t^T\}$ és $E\{y_t \bar{x}_t\}$ mennyiség független az időtől, továbbá legyen $\bar{x}_t \bar{x}_t^T$ és \bar{f}_t statisztikailag független. Az utóbbi feltétel például teljesül, ha az \bar{f} szűrő minden módosítását az $\{x_t\}$ és $\{y_t\}$ folyamatok különböző, egymástól statisztikailag független realizációjából számítjuk.

$$\begin{aligned} \bar{f}_{t+1} &= \bar{f}_t + 2k(y_t - \bar{f}_t^T \bar{x}_t) \bar{x}_t \\ \bar{f}_{t+1} &= (I - 2k \bar{x}_t \bar{x}_t^T) \bar{f}_t + 2k y_t \bar{x}_t. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

(A.6) egyenletben várható értéket képezve, és kihasználva előző feltevéseinket:

$$E\{\bar{f}_{t+1}\} = [I - 2kE\{\bar{x} \bar{x}^T\}] E\{\bar{f}_t\} + 2kE\{y \bar{x}\}. \quad (\text{A.7})$$

Az (A.7) egyenlet rekurzív összefüggést ad meg a szűrő várható értékére. Feltevése, hogy a szűrő nulladik közelítése $\bar{f}_0 = E\{\bar{f}_0\}$, ismert determinisztikus vektor:

$$E\{\bar{f}_{t+1}\} = [I - 2kE\{\bar{x}\bar{x}^T\}]^{t+1}\bar{f}_0 + 2k \sum_{i=0}^t [I - 2kE\{\bar{x}\bar{x}^T\}]^i E\{y\bar{x}\}. \quad (\text{A.8})$$

Mivel $E\{\bar{x}\bar{x}^T\}$ valós szimmetrikus mátrix, előállítható

$$E\{\bar{x}\bar{x}^T\} = T^{-1}DT \quad (\text{A.9})$$

alakban, ahol a hasonlósági transzformáció T mátrixa ortogonális, azaz $T^T = T^{-1}$, D pedig diagonális mátrix. D főátlójában az $E\{\bar{x}\bar{x}^T\}$ mátrix sajátértékei állnak, és mivel feltehető, hogy $E\{\bar{x}\bar{x}^T\}$ pozitív definit, a sajátértékek pozitívak. Alkalmazzuk az (A.9) előállítását az (A.8) egyenletben! Mivel

$$[I - 2kT^{-1}DT] = T^{-1}[I - 2kD]T,$$

és

$$T^{-1}[I - 2kD]TT^{-1}[I - 2kD]TT^{-1} \dots = T^{-1}[I - 2kD] \dots [I - 2kD]T,$$

$$E\{\bar{f}_{t+1}\} = T^{-1}[I - 2kD]^{t+1}T\bar{f}_0 + 2kT^{-1} \sum_{i=0}^t [I - 2kD]^i TE\{y\bar{x}\}. \quad (\text{A.10})$$

Az $(I - 2kD)$ mátrix diagonális, így az $(I - 2kD)^{t+1}$ mátrix szintén diagonális. $(I - 2kD)^{t+1}$ főátlójában az $(I - 2k\lambda_i)^{t+1}$ elemek állnak, ahol λ_i az $E\{\bar{x}\bar{x}^T\}$ mátrix i -edik sajátértéke. Legyen λ_{\max} a maximális sajátérték, és válasszuk k -t úgy, hogy teljesüljön az $|I - 2k\lambda_i| < 1$ egyenlőtlenség minden $i = 0, 1, \dots, n$ -re. Nyilván

$$0 < k < 1/\lambda_{\max}. \quad (\text{A.11})$$

Ekkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [I - 2kD]^{t+1} = 0, \quad (\text{A.12})$$

és

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^t [1 - 2k\lambda_j]^i = 1 + [1 - 2k\lambda_j] + [1 - 2k\lambda_j]^2 + \dots = 1/(2k\lambda_j). \quad (\text{A.13})$$

Felhasználva az (A.13) egyenletet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^t [I - 2kD]^i = 1/(2k) D^{-1}. \quad (\text{A.14})$$

(A.12)-t és (A.14)-et helyettesítsük be (A.10)-be, majd képezzük a $t \rightarrow \infty$ határátmenetet:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E\{\bar{f}_{t+1}\} &= T^{-1} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} [I - 2kD]^{t+1} \right] T\bar{f}_0 + 2kT^{-1} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^t [I - 2kD]^i \right] TE\{y\bar{x}\} = \\ &= T^{-1} D^{-1} TE\{y\bar{x}\}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Az (A.15) egyenletből:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\bar{f}_t\} = [E\{\bar{x}\bar{x}^T\}]^{-1} E\{y\bar{x}\}. \quad (\text{A.16})$$

(A.16) szerint a szűrő közelítéseinek várható értéke konvergál a Wiener egyenletből kapható optimumszűrőhöz. Megjegyezzük, hogy bár a szűrő közelítéseinek várható értéke konvergens, maguk a közelítések általában semmilyen értelemben

sem alkotnak konvergens (sztochasztikus) sorozatot. Az \bar{f}_t sorozat például nem konvergálhat átlag négyzetes értelemben, mivel a gyakorlatilag érdekes esetekben $\|\bar{x}_t\| \cong c_1 > 0$ és $\|e_t\| \cong c_2 > 0$, így nem teljesül a Cauchy kritérium.

B. Az információs mátrix

Ebben a függelékben foglalkozunk a 2. fejezet levezetésében nyitva maradt kérdéssel, nevezetesen a P_k és S_k mátrixok jelentésével. Megmutatjuk, hogy P_k valóban az autoregressziós együtthatók kovariancia mátrixa.

Legyen a feladat az $\bar{\alpha}$ vektor $\bar{\alpha}$ becslésének előállítására az

$$y_t = M_t \bar{\alpha} + v_t \quad t = 1, \dots, k \quad (\text{B.1})$$

mérési adatok alapján, ahol M_t valamilyen ismert sormátrix (az idő függvénye), $\{v_t\}$ fehér, de nem feltétlenül Gauss eloszlású zaj,

$$E\{v_t\} = 0, \quad E\{v_t v_k\} = \delta_{tk} R. \quad (\text{B.2})$$

Lineáris, torzítatlan, minimális szórásnégyzetű becslést keresünk, azaz

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^k A_i y_i, \quad (\text{B.3})$$

$$E\{\bar{\alpha}\} = \bar{\alpha}, \quad (\text{B.4})$$

$$\text{tr } E\{(\bar{\alpha} - \bar{\alpha})(\bar{\alpha} - \bar{\alpha})^T\} = \min, \quad (\text{B.5})$$

ahol A_1, A_2, \dots, A_k konstans vektorok, tr a mátrix nyomát jelöli. Bebizonyítjuk a következőket:

A keresett $\bar{\alpha}$ becslés az

$$\bar{\alpha} = S_k^{-1} \sum_{i=1}^k M_i^T R^{-1} y_i \quad (\text{B.6})$$

alakban áll elő, ahol

$$S_k = \sum_{i=1}^k M_i^T R^{-1} M_i \quad (\text{B.7})$$

a feltevés szerint pozitív definit információs mátrix. Megmutatjuk továbbá, hogy az $\bar{\alpha}$ becslés P_k kovarianciája megegyezik az információs mátrix inverzével.

Legyen $\bar{\alpha}'$ egy tetszőleges lineáris, torzítatlan becslés, azaz

$$\bar{\alpha}' = \sum_{i=1}^k A_i y_i, \quad (\text{B.8})$$

$$E\{\bar{\alpha}'\} = E\left\{\sum_{i=1}^k A_i (M_i \bar{\alpha} + v_i)\right\} = \sum_{i=1}^k A_i M_i \bar{\alpha} = \bar{\alpha}. \quad (\text{B.9})$$

Ekkor a becslés kovarianciája:

$$\begin{aligned} P_k(\bar{\alpha}') &= E\{(\bar{\alpha}' - \bar{\alpha})(\bar{\alpha}' - \bar{\alpha})^T\} = E\left\{\left(\sum_{i=1}^k A_i v_i\right)\left(\sum_{i=1}^k A_i v_i\right)^T\right\} = \sum_{i=1}^k A_i R A_i^T = \\ &= \sum_{i=1}^k [S_k^{-1} L_i + (A_i - S_k^{-1} L_i)] R \cdot [S_k^{-1} L_i + (A_i - S_k^{-1} L_i)]^T, \quad (\text{B.10}) \end{aligned}$$

ahol

$$L_i = M_i^T R^{-1}. \quad (\text{B.11})$$

Némi számolás után belátható az alábbi egyenlőség:

$$\sum_{i=1}^k (A_i - S_k^{-1} L_i) R L_i^T S_k^{-1} = \left[\sum_{i=1}^k A_i M_i - I \right] S_k^{-1} = 0. \quad (\text{B.12})$$

A második egyenlőség (B.9)-ből következik, mivel az \bar{a}' becslés torzítatlan, és így

$$E\{\bar{a}'\} - \bar{\alpha} = \left[\sum_{i=1}^k A_i M_i - I \right] \bar{\alpha} = 0 \quad (\text{B.13})$$

minden $\bar{\alpha}$ -ra. (B.10)-ből ezért adódik, hogy

$$P_k(\bar{a}') = \sum_{i=1}^k S_k^{-1} L_i R L_i^T S_k^{-1} + (A_i - S_k^{-1} L_i) R (A_i - S_k^{-1} L_i)^T. \quad (\text{B.14})$$

Mivel $R > 0$, a $P_k(\bar{a}')$ mátrix nyoma akkor minimális, ha $A_i = S_k^{-1} L_i$, azaz ha $\bar{a} = \bar{a}'$. ((B.14)-ből következik, hogy

$$P_k = S_k^{-1}. \quad (\text{B.15})$$

Levezetésünkben az $\bar{\alpha}$ vektor becslésére vonatkozóan semmilyen apriori információt nem vettünk figyelembe. Láthatjuk, hogy $P_0^{-1} = 0$ esetén a (2.11) és (B.15) egyenletek azonosak.

C. A 2. pontban felhasznált mátrix egyenletek

Tekintsük a $P(n \times n)$, $R(m \times m)$, $M(m \times n)$ mátrixokat, és tegyük fel, hogy P és R pozitív definit. Ekkor közvetlen ellenőrzéssel beláthatjuk az alábbi egyenlőséget:

$$(I + P M^T R^{-1} M)^{-1} = I - P M^T (M P M^T + R)^{-1} M. \quad (\text{C.1})$$

P -vel jobbról szorozva:

$$(I + P M^T R^{-1} M)^{-1} P = P - P M^T (M P M^T + R)^{-1} M P. \quad (\text{C.2})$$

Jobbról szorozva $M^T R^{-1}$ -val:

$$\begin{aligned} (I + P M^T R^{-1} M)^{-1} P M^T R^{-1} &= P M^T R^{-1} - P M^T (M P M^T + R)^{-1} M P M^T R^{-1} + \\ &+ P M^T (M P M^T + R)^{-1} - P M^T (M P M^T + R)^{-1} R R^{-1} = P M^T (M P M^T + R)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Használjuk fel az

$$(I + P M^T R^{-1} M)^{-1} P = (P^{-1} + M^T R^{-1} M)^{-1} \quad (\text{C.4})$$

egyenlőséget (C.2)-ben és (C.3)-ban, kapjuk:

$$(P^{-1} + M^T R^{-1} M)^{-1} = P - P M^T (M P M^T + R)^{-1} M P, \quad (\text{C.5})$$

$$(P^{-1} + M^T R^{-1} M)^{-1} M^T R^{-1} = P M^T (M P M^T + R)^{-1}. \quad (\text{C.6})$$

- Berkhout, A. J., and Zaenen, P. R.*, 1976, A Comparison between Wiener Filtering, Kalman Filtering, and Deterministic Least Squares Estimation, *Geophysical Prospecting* 24, 141 – 197.
- Claerbout, J.*, 1976, *Fundamentals of Geophysical Data Processing*, McGraw-Hill, New York, N. Y.
- Griffiths, L. J., Smolka, F. R., and Trembly, L. D.*, 1977, Adaptive Deconvolution: a New Technique for Processing Time Varying Seismic Data, *Geophysics* 42, 742 – 759.
- Jazwinski, A. H.*, 1970, *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, Inc., New York.
- Kalman, R. E.*, 1960, New Methods and Results in Linear Filtering Theory, *Trans. ASME*, 83D, 33 – 45.
- Kashyap, R. L.*, 1974, Estimation of Parameters in a Partially Whitenened Representation of Stochastic Process, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-19, 13 – 21.
- Peacock, K. L., and Treitel, S.*, 1969, Predictive Deconvolution: Theory and Practice, *Geophysics* 34, 155 – 169.
- Ristow, D., and Kosbahn, B.*, 1979, Time Varying Prediction Filtering by Means of Updating, *Geophysical Prospecting* 27, 40 – 61.
- Wang, R. J., Treitel, S.*, 1971, Adaptive Signal Processing through Stochastic Approximation, *Geophysical Prospecting* 19, 718 – 728.

Egyesületi hírek

Beszámoló az Ifjú Szakemberek Ankétjáról

Az ankétot az Egyesület március 26 – 27-én rendezte meg az ELTE visegrádi üdülőjében. Összesen 19 előadás hangzott el, a programban szereplő 21 helyett, két előadó ugyanis lemondta részvételét.

Az előadások tárgyak tekintetében a geofizika teljes választékát átölelték, bizonyítva azt a tényt, hogy milyen szerteágazó munkakörökben helyezkedtek a szakma fiataljai. Írdomes röviden átfutni az elhangzott előadások témáin. Földtani tárgyú volt egy előadás. A földtan és geofizika kapcsolatát matematikai megfogalmazásban tárgyalta egy előadó. Két elméleti jellegű dolgozat foglalkozott szeizmikus témával, egy felszíni radioaktív mérésekkel, három pedig felszíni geoelektromos módszerekkel. (De még ez a három is jelentősen eltérő célból vizsgálta a kérdést: egy korrózióval, egy üregkutatással, egy pedig potenciáltérképezéssel foglalkozott). Két bányabeli geofizikai kutatással kapcsolatos kérdéseket tárgyaló előadást hallhattunk, az egyik szeizmikus, a másik gravitációs témájú volt. Az egy perforáláshoz csatlakozó témájú előadás mellett hétnek volt a tárgya a mélyfúrás geofizika, de ugyancsak sok tárgykörben. Kettőnek volt témája a szelvények gépi értelmezése, majd egy-egy foglalkozott neutronaktiválással, termelésgeofizikával, mérnökgeofizikai kérdésekkel (duzzasztómű építésével), közetmechanikával és vízbetörések kimutatásával.

A dolgozatok nagy többségükben bizonyították, milyen magas színvonalú munkával foglalkoztatják fiataljainkat. Éppen ezért nehéz volt az első előadói díj odaítélése is. Első előadóként szerepelt a fiatalok között összesen tizenhárom tagtársunk. A bíráló bizottság (melynek tagjai Hursán László, Szabadvári László és Ráner Géza voltak rajtam kívül) az előadások minősítésénél figyelembe vette a téma kidolgozását és jelentőségét is, az előadás előkészítését, (pl. ábrák és demonstrációs anyag szempontjából), végül magának az előadásnak a megtartását, összbnyomását is. Ugyancsak számításba vettük az esetleges időtúllépést is.

Hosszabb tanácskozás után a bizottság úgy döntött, hogy két első díj kiadását javasolja egy második és ugyancsak két harmadik díjon kívül. A díjazásra javasoltak a következők:

- I. díj: Molnár Gábor és Tóth Sándor
- II. díj: Kovács András
- III. díj: Dianiska László és szerzőtársai, valamint Szilasi György.

Összefoglalva az ankét igen sikeres volt, nemcsak a fiatalok számára, hanem a geofizikusok munkájának áttekintése szempontjából is.

A bíráló bizottság éppen a sok jó előadásra való tekintettel javaslatot tesz az Országos Elnökségnek, illetve a Magyar Geofizika szerkesztő bizottságának néhány előadás leközlésére, a díjazástól, illetve az első előadói minőségtől függetlenül. A javasolt előadások a következők: (az előadók neveit adjuk meg): Vermes Mátyás, Szarka László és társai, Fülöp József, Horváth József és társai.

Budapest, 1981. április 8.

Jesch Aladár
a bíráló bizottság elnöke