

# A hullámegyenletes migrációval kapcsolatos vizsgálatok és tapasztalati eredmények

G Ö N C Z G Á B O R \*

A dolgozatban először ismertetjük a J. F. Claerbout és mások által javasolt, a lefelé folytatás elvégzésére alkalmas, parciális differenciálegyenlet levezetésekor alkalmazott fontosabb fizikai közelítéseket.

További, matematikai jellegű közelítést jelent a parciális differenciálegyenletnek véges differencia módszerrel történő megoldása. A közelítéseknek a megoldásra való együttes hatását az eljárás kétváltozós átviteli függvényének vizsgálatával végezzük el, D. Loewenthal és mások által ismertetett módon. Ezzel a módszerrel kvantitatíven jellemezhető a közelítések, a mintavételezés hatása. A vizsgálatokat a Geofizikai Kutatási Üzemben megvalósított hullámegyenletes-migrációs program algoritmusára végeztük el.

A dolgozat második részében röviden ismertetjük a program működését. Ezután először egyszerű modellszelvényeken, majd valódi szelvényeken is illusztráljuk az eljárás hatásosságát. Az eredményeket összehasonlítjuk a hagyományos, összegezéses módszerrel kapott eredményekkel.

В докладе сначала рассматриваются основные физические приближения, применяемые при выводе уравнений в частных производных, используемых при аналитическом продолжении поля в нижнее пространство, как это предложено Й. Ф. Клербу и другими.

Дополнительное приближение математического характера представляет собой решение уравнений в частных производных методом конечной разности. Комплексное воздействие приближений на решение изучается путем анализа передаточной функции с двумя переменными по методу, описанному Д. Лэвенталом и др. Этот метод позволяет количественно оценить влияние приближений, выборки. Исследования были проведены для алгоритма программы миграции по волновому уравнению, разработанной Предприятием геофизической разведки.

Во второй части доклада коротко описывается работы программы. Сначала на простых моделях, а затем на фактических разрезах иллюстрируется эффективность предлагаемого метода. Результаты сопоставляются с результатами, полученными стандартным методом накопления.

The first part of the paper reviews the most important physical approximation used for the derivation of the partial differential equations governing the downward continuation — as suggested by J. F. Claerbout and others.

The solution of the resulting partial differential equations by finite difference methods involves further approximations of mathematical type. The joint effect of these approximations is investigated by examining the twodimensional transfer function of the method, as suggested by Loewenthal and others. By this method the effects of the approximations and of sampling can be quantitatively analyzed. The investigations were performed for the wave equation migration program developed at the Geophysical Research Enterprise of the Hungarian Oil and Gas Trust.

The second part of the paper briefly describes the operation of the program. The effectiveness of the method will be illustrated on simple model sections and field materials. The results obtained will be compared with those obtained by traditional linear migration methods.

J. F. Claerbout és mások a 70-es évek elejétől kezdődően több cikkben foglalkoztak a hullámegyenlet közelítő megoldásainak a szeizmikus adatfeldolgozásban való alkalmazásával. Munkájuk nyomán terjedt el a lefelé folytatás, vagy hullámegyenletes migráció néven ismert eljárás. A módszer alapja a Claerbout által megfogalmazott leképezési elv. Az elv szerint a reflektáló réteghatárok ott helyezkednek el, ahol a lefelé haladó hullám és az általa keltett felfelé haladó hullám azonos időpillanatban léteznek. Az adatfeldolgozás egyik célja hogy ezeket a réteghatárokat megtaláljuk. Az elv igen egyszerűnek tűnik. Hogyan sikerült hasznossá tenni az adatfeldolgozásban?

\*OKGT Geofizikai Kutatási Üzem





Ismeretes, hogy a hullámegyenlet megfelelő közelítéssel leírja a szeizmikus hullámterjedést. Teljes megoldása egyaránt tartalmazza a le- és felfelé haladó hullámokat. Ha ezeket sikerül szétválasztani, akkor meg tudjuk adni a hullámter azon helyeit, ahol az időkoincidencia teljesült. A hullámegyenlet teljes megoldása azonban igen nagy matematikai problémát jelent. Claerbout, az időkoordináta transzformációját alkalmazva, olyan egyenleteket vezetett le, melyek külön-külön leírják a le- és felfelé haladó hullámok terjedését.

A dolgozatban először a levezetés során alkalmazott közelítésekkel foglalkozom, amelyek miatt az egyenlet csak kis dőlésszögekig használható. Ezután az egyenlet numerikus megoldásakor tett közelítéseket ismertetem. Az alkalmazott véges differencia módszer is olyan közelítéseket használ, melyek erősen befolyásolják az eredményt. A közelítések együttes hatása jelentkezik a lefelé folytatást megvalósító konkrét műveletben, amely speciális szűrésnek fogható fel. E szűrés átviteli függvényével jellemezni lehet a módszer hibáit. A hibák a hullámok fáztorzításában jelentkeznek. Megvizsgáltuk hogy a fáztorzítás hogyan függ a mintavételi távolságtól és a  $\Delta z$  lépések számától. A fáztorzítás hatását modelleken is bemutatom. A vizsgálatok ismertetése után végül néhány gyakorlati példával illusztrálom a módszer eredményeit.

Milyen közelítéseket teszünk az egyenlet levezetésekor és alkalmazásakor?

*Első feltevés*, mely lehetővé teszi az időkoordináta transzformációját az, hogy a sebesség csak a mélységtől függ és közelítőleg ismerjük. Enélkül nem tudnánk megadni a hullámter azon pontjait, ahol az időkoincidencia megvalósul.

*Második feltevés*, hogy a hullámok csillapodásától eltekintünk. Ezt jogossá teszi az, hogy a bemeneti időszelvényen a hullámok csillapodását valamilyen módon kompenzáltuk.

*A következő feltevés*, mely az egyenlet használhatóságát csak kis dőlésszögekre korlátozza az, hogy az  $X$  változóban fellépő másodiknál magasabbrendű parciális deriváltakat elhagyjuk. Ez akkor jogos, ha a le- és felfelé haladó hullámok iránya közel vertikális. Az egyenlet, mint látni fogjuk, csak a pontosan vertikálisan haladó hullámokat extrapolálja helyesen. A nem vertikális terjedési irányú hullámok a lefelé folytatás során torzulni fognak.

Közelítő feltevéseket teszünk a peremfeltételként szereplő hullámokra is. A felszínről induló lefelé haladó hullámtererről feltesszük, hogy síkhullám gerjesztésnek felel meg. Ezt a hullámteret, a jelalakváltozásokat elhanyagolva, nem is extrapoláljuk numerikusan, hanem csak a menetidő-felületét számítjuk ki analitikusan. A felszínen mért, felfelé haladó hullámokat eddig a menetidő-felületig folytatjuk lefelé, hogy az időkoincidenciát megvalósítsuk.

További feltevés az, hogy a bemeneti időszelvény jó közelítése a lefelé induló síkhullámgerjesztéskor észlelhető felfelé haladó hullámternek. Feltesszük, hogy közel vertikálisan felfelé haladó egyszeres beérkezésekből áll.

Ezt az adatrendszert aztán  $\Delta z$  lépésenként haladva extrapoláljuk egyre nagyobb mélységbe és elérve a lefelé haladó hullám menetidőfelületét, megkapjuk a migrált szelvényt.

Áttekintjük, hogy milyen közelítéseket jelent az egyenlet megoldásakor alkalmazott véges differencia módszer. Jelöljük  $u$ -val a felfelé haladó hullámteret,  $v$ -vel a sebességet és alsó indexszel a parciális differenciálhányadosokat. Az elő-



ző közelítésekkel a hullámegyenletről a lefelé folytatás végrehajtásához az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\partial u_{tz} = -\frac{v}{4} \partial_{xx} u \quad (1)$$

Az egyenletet véges differencia módszerrel oldjuk meg. Az alábbi jelöléseket használva az egyes változókat diszkrétté tesszük.

$$t = n\Delta t, \quad z = k\Delta z, \quad x = j\Delta x$$

$$u_{j,k}^n = u(n\Delta t, k\Delta z, j\Delta x)$$

Az egyenletben szereplő parciális differenciálhányadosokat centrális, véges differenciákkal közelítjük. A  $t$  és  $z$  változóban *Crank-Nicholson* sémát használunk, az  $x$  változóban centrális második differencia operátort. A differenciák közelítő jellegét frekvenciatartományban fejezhetjük ki egyszerűen a (2a), (2b) és (2c) egyenletekkel.

$$x\text{-ben: } S = \exp(-i k_x \Delta x)$$

Tolás operátor

$$z\text{-ben: } W = \exp(-i k_z \Delta z)$$

$$t\text{-ben: } Z = \exp(-i \omega \Delta t)$$

$$F\{\partial_t\} = -i\omega = \frac{1}{\Delta t} \ln Z \cong \frac{2}{\Delta t} \frac{1-Z}{1+Z} \quad (2a)$$

$$F\{\partial_z\} = -ik_z = \frac{1}{\Delta z} \ln W \cong \frac{2}{\Delta z} \frac{1-W}{1+W} \quad (2b)$$

$$F\{\partial_{xx}\} = k_x^2 \cong F\{S, -2, S^{-1}\} = \frac{2}{\Delta x^2} (1 - \cos k_x \Delta x) \quad (2c)$$

$$k_x \cong \frac{2}{\Delta x} \sin k_x \frac{\Delta x}{2}$$

A  $t$  és  $z$  változóban a differenciaképzés pontossága eszerint megfelel az  $\ln Z$  és  $\ln W$  elsőfokú közelítése pontosságának. Ez a közelítés  $Z = 1$  és  $W = 1$  környezetében jó, vagyis  $\omega \Delta t$  illetve  $k_z \Delta z$  kis értékei mellett.

Az  $x$  változó szerint második differencia közelítés, (2c) szerint, megfelel a  $\sin x/x$  1-hez való közelítésének. Ez csak  $x = 0$  környezetében, azaz  $k_x \Delta x$  kicsiny értékei mellett teljesül.

A differencia közelítéseket az (1) egyenletre alkalmazva az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$[I + aT] u_{k+1}^n = [I - aT] (u_{k+1}^n + u_k^{n-1}) - [I + aT] u_k^n \quad (3)$$

Itt az  $u_k^n$  értékek  $j$  index szerinti vektorok,  $I$  egységmátrix,  $T$  pedig a második differencia képzésnek megfelelő tridiagonális mátrix. Ennek az egyenletrendszernek a megoldására a Claerbout által javasolt gyors módszeret használtuk.

A differencia közelítések pontosságára tett észrevételek csupán azt jelentik, hogy az eredmény annál pontosabb lesz, minél inkább teljesül, hogy  $\omega \Delta t$ ,  $k_x \Delta x$  és  $k_z \Delta z$  kicsiny értékek. A konkrét időszelvényen  $\omega$ ,  $k_x$  és  $k_z$  adottak. Kérdés az,

hogy az egyenlet közelítő jellege miatt és  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  és  $\Delta z$  konkrét értékei mellett milyen eredményt kaphatunk.

Megvizsgáljuk, hogy a lefelé folytatás milyen fázistorzítást okoz.

A (3) differencia egyenletet rögzített időértéknél, frekvenciatartományban felírva az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$U_{k+1}^{n-1} = \frac{[1 - aT] - Z[1 + aT]}{[1 + aT] - Z[1 - aT]} U_k^{n-1}; \quad (4)$$

rögzített  $n$  mellett:

$$U_{k+1} = F(Z) U_k$$

ahol belátható hogy:

$$|F(Z)| = 1, \quad F(Z) = \exp(i\Phi)$$

és

$$\Phi = 0 \quad \text{ha} \quad k_x = 0.$$

Itt az  $U$  értékek a megfelelő  $Z$  transzformáltakat jelentik. Az egyenletek szerint a  $k\Delta z$  mélységben levő adatokból a  $(k+1)\Delta z$  mélységben levő adatokat az  $F(Z)$  szűrő alkalmazásával kapjuk meg. Egy  $\Delta z$  vastagságú rétegen való extrapoláció során  $F(Z)$  átviteli függvénnyel rendelkező szűrést végzünk az adaton. Könnyen belátható, hogy a szűrő stabilis és  $|F(Z)| = 1$ . Az extrapoláció a hullámok  $\Phi$  fázistolásával valósul meg.

Az extrapoláció akkor nem okoz fázistolást, ha  $k_x = 0$ , azaz pontosan vertikális irányú hullámokat folytatunk lefelé. Az  $F(Z)$  szűrő fázistolásának hatását a nem vertikális irányú hullámokra a Loewenthal és mások által leírt módon vizsgáltuk.

Legyen  $u$  egy  $c$  sebességű közegben a vertikálissal  $\Theta$  szöget bezáró irányban felfelé haladó síkhullám:

$$u = \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x \sin \Theta}{c} + \frac{z \cos \Theta}{c} \right) \right] = \exp(i\Gamma) \quad (5)$$

Ha ezt a hullámot a terjedési irányában visszafelé extrapoláljuk a  $z=0$  helyről a  $z=\Delta z$  helyre és a megfelelő,  $-\Delta t_1$  időtolást alkalmazzuk, akkor a hullámfront fázisa nem változik meg.

$$-\Delta t_1 = \frac{\Delta z \cos \Theta}{c} \quad \text{és} \quad \Delta \Gamma = 0 \quad (6)$$

Tegyük fel, hogy nem tudjuk, hogy a hullám iránya  $\Theta$  szöget zár be a vertikálissal és szintén  $z = \Delta z$  mélységbe akarjuk extrapolálni. Ekkor a  $-\Delta t_2$  időtolást alkalmazzuk, ami azonban a vertikális haladásnak felel meg. Emiatt a hullámfront fázisa az alábbi képlet szerint megváltozik.

$$-\Delta t_2 = \frac{\Delta z}{c} \quad \text{és} \quad \Delta \Gamma = \frac{\omega \Delta z}{c} (\cos \Theta - 1). \quad (7)$$

A  $\Delta z$  mélységben már nem  $u$ , hanem  $u^*$  hullámunk lesz:

$$u^* = \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{x \sin \gamma}{v} + \frac{z \cos \gamma}{v} \right) \right] = \exp[i(\Gamma + \Delta \Gamma)]. \quad (8)$$



Feltesszük, hogy  $u^*$  továbbra is síkhullám maradt, csak szöge  $\Theta$ -ról  $\gamma$ -ra, terjedési sebessége pedig  $c$ -ről  $v$ -re változott a fázistorzítás miatt. A lefelé folytatás egyenletét alkalmazva, a  $\Delta t_2$ -nek megfelelő időtranszformáció miatt, koordináta-rendszerünk mintegy vertikális irányban mozog, függetlenül a felfelé haladó hullám tényleges irányától. Fellép a (7) képlettel megadott fázistolás, ez az amit az  $F(Z)$ -vel való szűrés okoz. Megadva a terjedési sebességet, valamint rögzítve  $\Delta t$ ,  $\Delta z$  és  $\Delta x$  értékeit az alábbi egyenletek segítségével kiszámíthatjuk, hogy a módszer mekkora szög- és sebességeltérést okoz különböző irányú és frekvenciájú síkhullámok esetén.

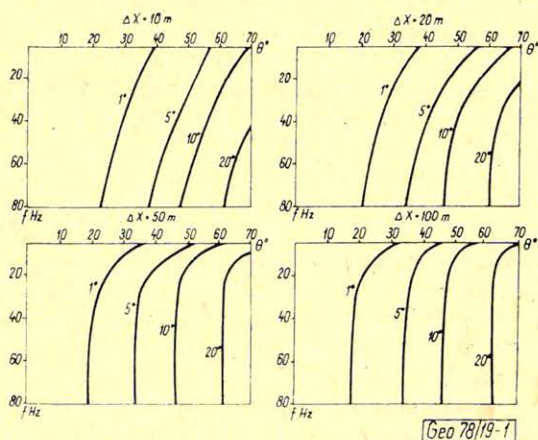
$$\frac{\sin \Theta}{c} = \frac{\sin \gamma}{v} \quad (9)$$

$$\Delta \Gamma = \Phi \quad (10)$$

Megvizsgáltuk, hogy a  $\Delta x$  és  $\Delta z$  nagysága hogyan hat a szöghibákra.

A hibaszámítások során a *terjedési sebesség* 2000 m/sec, a *mintavételi távolság* pedig 4 msec volt. A szögeltéréseket szintvonalasan ábrázoltuk a síkhullámok frekvenciájának és kezdeti dőlésszögének függvényében. Az ábrákon a vízszintes tengelyen a dőlésszög, a függőleges tengelyen a frekvencia változik. A szintvonalakon feltüntettük a kapott szögeltérések nagyságát.

Az 1. ábrán a  $\Delta x$  távolság hatását mutatom be.  $\Delta z = 20$  m volt,  $\Delta x$  pedig 10, 20, 50 és 100 m. Az ábrákon jól látható, hogy zérus dőlésszög esetén, azaz vertikálisan haladó hullámoknál a módszer pontos. A dőlésszög és a frekvencia növekedésével azonban egyre nőnek a szögeltérések. A szögeltéréseket erősen befolyásolja  $\Delta x$  nagysága is. 50 m-es  $\Delta x$  esetén, már  $15^\circ$ -os dőlésszögnél is, a szeizmikus jelfrekvenciákon  $1^\circ$  körüli szögeltérések adódnak egyetlen  $\Delta z$  lépést téve.

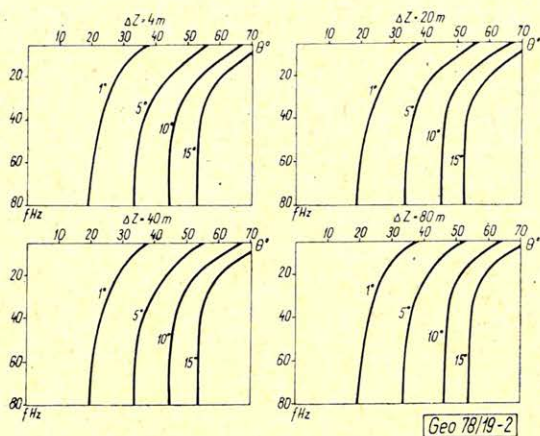


1. ábra. A  $\Delta x$  mintavételi távolság hatása a síkhullámok extrapolációjánál fellépő szögeltérésekre  
 Рис. 1. Влияние шага экстраполяции  $\Delta x$  на угловые отклонения, возникающие при экстраполяции поверхностных волн

Fig. 1. Influence of the  $\Delta x$  sample-taking distance on the angle deviations experienced with extrapolation of plane waves

Az ábrákból látható az is, hogy miért nevezik az irodalomban az egyenletet  $15^\circ$ -os közelítésű egyenletnek. A  $15^\circ$ -nál kisebb dőlésszögére a szöghiba  $1^\circ$  alatt marad a  $\Delta x$  nagyságától eléggé függetlenül. A  $\Delta x$  csökkentésével azonban nagyobb dőlésszögű hullámokat is még kis szögeltéréssel extrapolálhatunk.

A 2. ábrán a  $\Delta z$  távolság hatását illusztrálom. Itt  $\Delta x$  mindenütt 30 m volt,  $\Delta z$  pedig 4, 20, 40 és 80 m. A szögeltérések szintvonalait az előző koordinátarendszerben ábrázoltuk. Azt állapíthatjuk meg, hogy  $\Delta z$  növelésével a hibák nem nőnek jelentősen, azaz  $\Delta z$ -t nagyinak vehetjük az átlagos 2000 m/sec sebesség mellett.



2. ábra. A  $\Delta z$  mintavételi távolság hatása a síkhullámok extrapolációjánál fellépő szögeltérésekre

Рис. 2. Влияние шага экстраполяции  $\Delta z$  на угловые отклонения, возникающие при экстраполяции поверхностных волн

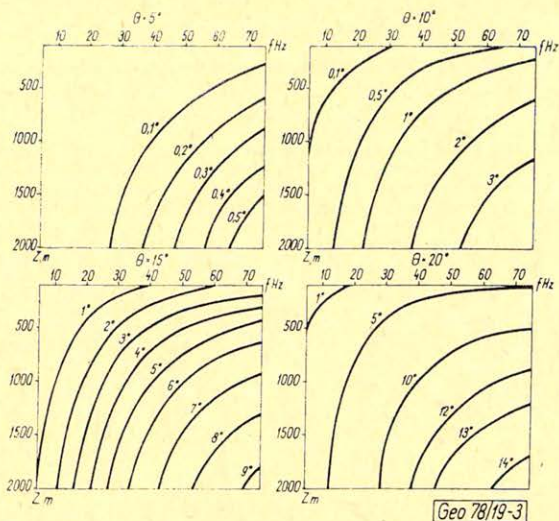
Fig. 2. Influence of the  $\Delta z$  sample-taking distance on the angle deviations experienced with extrapolation of plane waves

A vizsgálatokból az látszik, hogy a szöghiba nem a mintavételi távolságoktól függ legerősebben, hanem a dőlésszögtől. Ez azt jelenti, hogy a módszer hatását döntően a levezetéskor alkalmazott közelítés okozza.

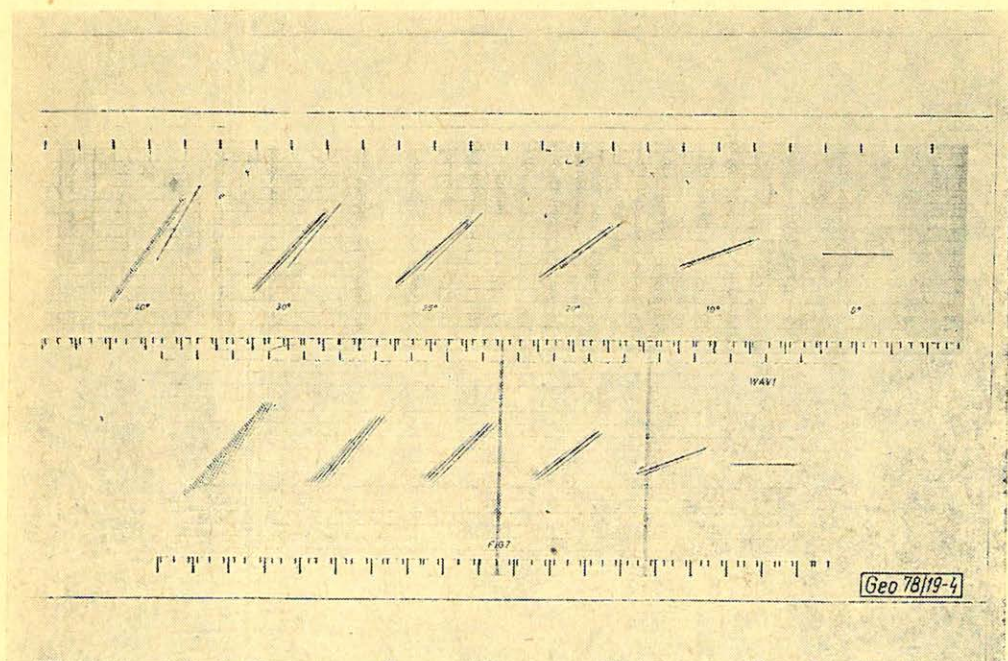
Megvizsgáltuk, hogy az egyetlen extrapolációs lépésnél adódó szöghiba hogyan halmozódik a lépések számával.

A 3. ábrán a szögeltérések szintvonalait látjuk, azonban itt a vízszintes tengelyen a frekvencia, a függőleges tengelyen a lépések száma, vagyis a mélység változik. A vizsgálat során  $\Delta x$  30 m,  $\Delta z$  20 m,  $\Delta t$  4 msec, a sebesség 2000 m/sec volt. Az ábrákon az  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$  és  $20^\circ$  dőlésszögű hullámoknál adódó szögeltéréseket látjuk. Megállapítható, hogy még  $10^\circ$  dőlésszögű hullámokat is kb.  $1^\circ$  szöghibával extrapolálhatunk 2000 m mélyséig. A  $20^\circ$ -os hullámoknál azonban már 1000 m körül  $5-10^\circ$  szöghiba adódik a szeizmikus jelfrekvenciákon.





3. ábra. Különböző kezdeti irányú síkhullámok szögeltérései a mélység függvényében  
 Рис. 3. Угловые отклонения первоначально по-разному направленных поверхностных волн в зависимости от глубины  
 Fig. 3. Angle deviations of plane waves with different initial directions as functions of depth



4. ábra. Különböző dőlésű réteghatárokról származó reflexiók beérkezései (felül) és ezek migrációja a 15°-os egyenlettel (alul)  
 Рис. 4. Прибытие волн, отраженных от поверхностей разного наклона (сверху) и их миграция с уравнением 15° (снизу)  
 Fig. 4. Reflection arrivals coming from horizons with various dips (above) and their migration with the 15°-equation (below)

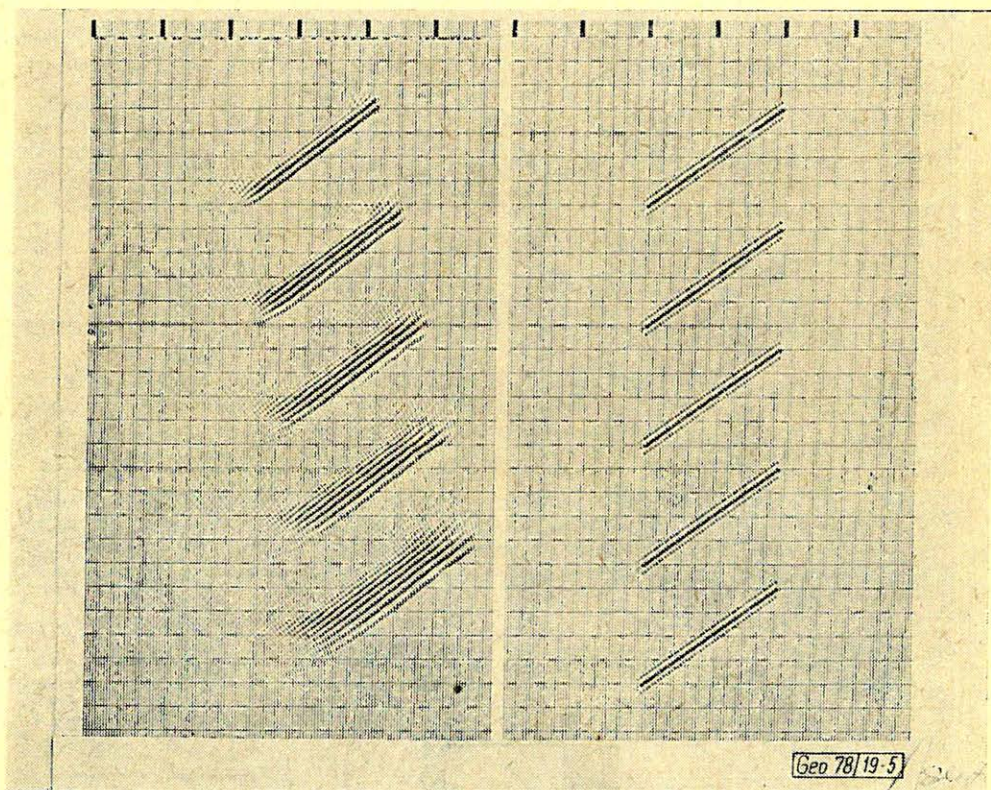


Azonos dőlésszögű hullámok esetén a hiba erősen függ a frekvenciától. A sávkorlátozott szeizmikus hullámfront emiatt a lefelé folytatás során úgy módosul, mintha diszperziós közegben haladna.

A 4. ábrán egy modellszelvényt és migrált változatát mutatom be. Szemléletesen mutatja az ábra, hogyan romlik el az eredmény a nagyobb dőlésszögeknél.

Az 5. ábrán  $20^\circ$  dőlésnek megfelelő, de különböző mélységből származó beérkezéseket és azok migrációját látjuk. A  $\Delta z$  lépések számától függően a fellépő diszperzió miatt komoly jelalaktorzulások keletkeznek.

A módszer hibáinak ilyenfajta vizsgálatai rámutattak egyrészt a hibák okaira, másrészt segítenek megválasztani a helyes mintavételi távolságokat. Az egész eljárás további lényeges javítását az egyenlet közelítő jellegének csökkentésétől várhatjuk. Végül néhány feldolgozási eredményt mutatok be, amelyek a hibák ismeretében és azok ellenére is a módszer használhatóságát támasztják alá.

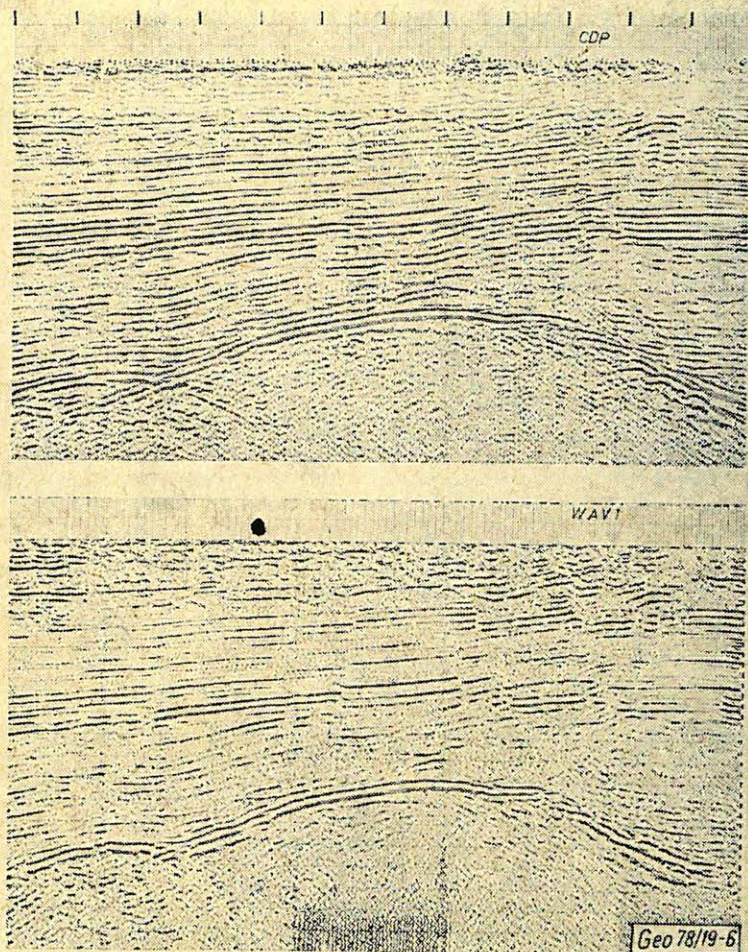


5. ábra. Különböző mélységben elhelyezkedő,  $20^\circ$ -os dőlésű réteghatárokról származó reflexiós beérkezések (jobb oldalon) és ezek migrációja a  $15^\circ$ -os egyenlettel (bal oldalon)

Рис. 5. Приходы волн, отраженных от слоев разной глубины с наклоном  $20^\circ$  (справа) и их миграция с уравнением  $15^\circ$  (слева)

Fig. 5. Reflection arrivals coming from horizons with  $20^\circ$  dip lying at various depths (right) and their migration with the  $15^\circ$ -equation (left)





6. ábra. Stacking időszelvény részlet (felül) és a 15°-os egyenlettel migrált változata (alul)

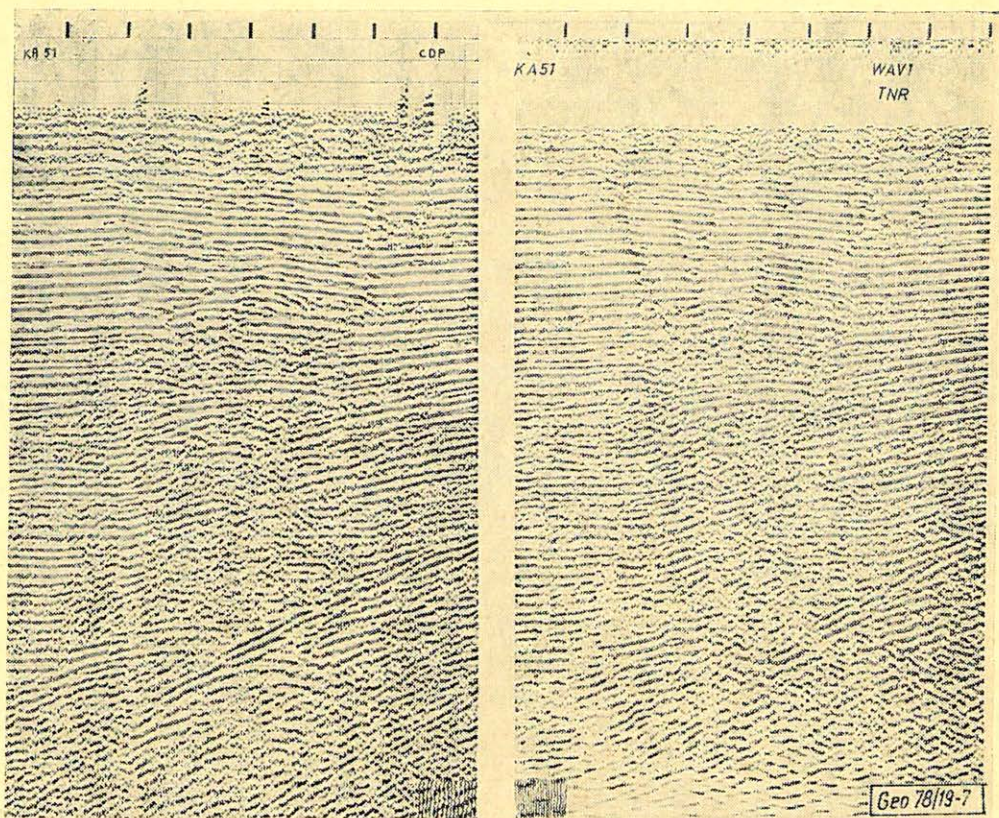
Рис. 6. Часть временного профиля стэкинг (сверху) и вариант его миграции с уравнением 15° (снизу)

Fig. 6. Part of a stacking time profile (above) and its variant migrated by the 15°-equation (below)

A 6. ábra felső részén egy időszelvény részletet látunk. Alatta a hullámegyenletes migráció eredménye látható. A módszer előnyét mutatja a jó felbontóképesség és a vetődések jó kimutathatósága a migrált szelvényen.

A 7. ábrán baloldalon egy másik időszelvény részletet, a jobboldalon annak hullámegyenletes migrációval feldolgozott változatát látjuk. A migrált szelvényen kis időknél ismét a vetődések tisztázódtak, nagyobb mélységben pedig egy eltemetett fókusz probléma megoldása látszik.





7. ábra. Stacking időszelvény részlet (bal oldalon) és a  $15^\circ$ -os egyenlettel migrált változata (jobb oldalon)

Рис. 7. Часть временного профиля стэкинг (слева) и вариант его миграции с уравнением  $15^\circ$  (справа)

Fig. 7. Part of a stacking time profile (left) and its variant migrated with the  $15^\circ$ -equation (right)

#### IRODALOM

- J. F. Claerbout*, 1976. Fundamentals of geophysical data processing. New York, McGraw Hill Book Co.
- Loewenthal, D., Lee, L., Robinson, R., and Sherwood, J.*, 1974. The wave equation applied to migration and water bottom multiples: Presented at 44th International SEG meeting, Dallas.