Közelítő eljárás háromdimenziós testek gravitációs és mágneses hatásának kiszámítására

HAÁZ ISTVÁN

M. H. P. Bott még 1963-ban két eljárást közölt háromdimenziós testek hatásával értelmezhető földmágneses anomáliák számítógépre alkalmazható kiszámítására. Egyik eljárása az anomália horizontális komponense számára a függőleges koordináta és a térbeli távolság hányadosában harmadfokú eredményre vezetett. Az előadásban tárgyalandó eljárásunk ezzel szemben elsőfokú eredményre vezet. Bott eredménye mégsem hibás: elsőfokú kifejezésünk alkalmas átalakítással átmegy Bott harmadfokú eredményébe.

A földmágneses anomália vertikális konponensére kapott eredményünk megegyezik Bott eredményével.

Eljárásunk Bott tárgyalásán túlmenően a háromdimenziós hatótest tömegvonzása okozta gravitációs anomália kiszámítására is alkalmas és erre is jól kezelhető eredményre vezet.

Еще в 1963 году М. Х. П. Бот опубликовал два метода для вычисления геомагнитных аномалий на ЭВМ, которые могут быть приписаны эффекту трехмерных тел. Один из этих методов привел к результату третьей степени в частном вертикальной координаты и пространственного расстояния для горизонтальной компоненты аномалии. Наш способ, обсуждаемый в докладе, приводит, однако, к результату первой степени. Результат Бота все-таки не является ошибочным: наше выражение первой степени перейдет при соответствующем преобразовании в результат третьей степени Бота.

Результат, полученный нами для вертикальной компоненты геомагнитной аномалии, совпадает с результатом Бота.

Выходя за пределы изложения Бота, наш метод является пригодным для вычисления аномалии силы тяжести, вызванной тяготением трехмерного тела, и приводит к удобному в работе результату.

As early as 1963 M.H.P. Bott published two methods for calculating geomagnetic anomalies attributed to the effect of three-dimensional bodies by computers. One of his methods lead to a third-degree result in the quotient of the vertical coordinate and spatial distance for the horizontal component of the anomaly. Our method discussed in this paper leads to a first-degree result. Bott's result, nevertheless, is correct: our first-degree expression can be transformed into the third-degree result of Bott.

The result obtained by us for the vertical component of geomagnetic anomalies corresponds to Bott's result.

Exceeding the limits of Bott's discussion our method is also suitable to calculate the gravitational attraction of three-dimensional bodies and leads to a result which can be readily handled.

Ismeretes, hogy a *földi nehézség gyorsulásának* a V térfogatú, σ sűrűségű homogén hatótest tömegvonzása által a tér $P(x, y, z)$ pontjában előidézett Δg *anomáliája* a

$$\Delta g = f\sigma \iiint_V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (1)$$

képlettel fejezhető ki.

Ebben a képletben

f a tömegvonzás NEWTON-féle állandóját,

r a V ható test $Q(\xi, \eta, \zeta)$ pontja és a tér $P(x, y, z)$ pontja meghatározta távolság pozitív mérőszámát jelenti, és a

z és ζ koordináták tengelye függőlegesen lefelé irányul.

Az (1) képletben kijelölt integrálás megkönnyítésére és a további tárgyalás egyszerűsítésére vezessük be itt a V ható test $Q(\xi, \eta, \zeta)$ pontjainak a $P(x, y, z)$ pontra vonatkozó relatív koordinátáit és jelöljük ezeket a

$$\xi - x = a \quad \eta - y = b \quad \zeta - z = c \tag{2}$$

egyenlőségek szerint a, b, c-vel.

LANCASTER–JONES (1929) szintén háromdimenziós hatásszámításban: háromdimenziós testek EÖTVÖS-ingával kimutatható hatásainak kiszámítását tárgyaló közleményében alkalmazta ezt a jelölést.

Az a, b, c relatív koordináták bevezetésével a Δg *anomália* (1) képlete nyilván a

$$\Delta g = -f\sigma \iiint_V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \, da \, db \, dc \tag{3}$$

képletbe megy át.

Integráljunk itt először a c változó szerint. Az $\frac{1}{r}$ függvény c szerint képezett deriváltjának legegyszerűbb határozatlan integrálja e c változó szerint maga az $\frac{1}{r}$ függvény, az a és b változóktól függő $c_1(ab)$ alsó határtól a $c_2(ab)$ felső határig képezett határozott integrálja pedig a $\frac{1}{r}$ függvény e határhelyeken felvett értékeinek a különbsége.

Az integrálás határhelyein felvett értékek különbségét a szokásos szögletes zárójeles jelöléssel kifejezve és az a és b változók szerint még elvégzendő integrálás eredményét numerikus összegezéssel megközelítve arra az eredményre jutunk, hogy a földi nehézség gyorsulásának e V térfogatú, σ sűrűségű homogén hatótest tömegvonzása által a P pontban előidézett Δg anomáliája a

$$\Delta g \approx -f\sigma \sum_a \sum_b \left[\frac{1}{r}\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a \, \Delta b \tag{4}$$

közelítő képlettel számítható ki.

Minthogy a z és ζ koordinátákkal együtt a c relatív koordináták tengelye is függőlegesen lefelé irányul, a $c_1(a, b)$ alsó határ itt a V ható test felső, a $c_2(a, b)$ felső határ pedig a V ható test alsó határfelületének az (a, b) vízszintes koordinátáktól függő c koordinátáját, vagyis a P pont szintjétől számított mélységét jelenti, az (a, b) vízszintes koordinátájú függőleges ordinátavonal V felületi metszéspontjaiban.

A V hatótest alsó és felső határfelületének mélységi adatai e felületek szintvonalas térképével vagy más alkalmas módon adhatók meg.

Ugyancsak ismeretes, hogy a *földmágneses térerősség függőleges összetevőjének* a V térfogatú, I_x, I_y, I_z mágnesezésű homogén mágneses ható test mágneses hatása által a tér $P(x, y, z)$ pontjában előidézett ΔZ *anomáliája* a

$$\Delta Z = I_x u_{zx} + I_y u_{zy} + I_z u_{zz} \tag{5}$$

képlettel fejezhető ki.

Ebben a képletben az u_{zx}, u_{zy}, u_{zz} jelölések a V hatótest $Q(\xi, \eta, \zeta)$ pontja és a tér $P(x, y, z)$ pontja meghatározta r távolság reciprokából a zx, zy, zz változópárok szerint képezett második deriváltaknak a ható test V térfogatára kiterjesztett integráljait jelentik az

$$u_{zx} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial x} d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{6}$$

$$u_{zy} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \partial y} d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{7}$$

$$u_{zz} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{8}$$

képletek szerint; a z és ζ koordináták tengelye itt is függőlegesen lefelé irányul.

A (2) egyenlőségekkel értelmezett a, b, c relatív koordináták bevezetésével a (6), (7), (8) képletek az

$$u_{zx} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial c \partial a} da \, db \, dc \tag{9}$$

$$u_{zy} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial c \partial b} da \, db \, dc \tag{10}$$

$$u_{zz} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial c^2} da \, db \, dc \tag{11}$$

képletekbe,

ezek pedig az integrálandó függvényekben az a, b, c változók szerint kijelölt deriválások elvégzésével az

$$u_{zx} = -\iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{a}{r^3} \right) da \, db \, dc \tag{12}$$

$$u_{zy} = -\iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{b}{r^3} \right) da \, db \, dc \tag{13}$$

$$u_{zz} = -\iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{c}{r^3}\right) da\, db\, dc \qquad (14)$$

képletekbe mennek át.

Integráljunk itt is először a c változó szerint.

Az itt zárójelbe tett függvények c szerint képezett deriváltjainak legegyszerűbb határozatlan integráljai e c változó szerint maguk a zárójelbe tett függvények, az a és b változóktól függő $c_1(a, b)$ alsó határtól a $c_2(a, b)$ felső határig képezett határozott integráljuk pedig a zárójelbe tett függvények e határhelyeken felvett értékeinek különbségei.

Az integrálás határhelyein felvett értékek különbségeit a szokásos jelöléssel kifejezve és az a és b változók szerint még elvégzendő integrálások eredményét itt is numerikus összegezéssel megközelítve, az u_{zx}, u_{zy}, u_{zz} integrálok

$$u_{zx} \approx -\sum_a \sum_b \left[\frac{a}{r^3}\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a\, \Delta b \qquad (15)$$

$$u_{zy} \approx -\sum_a \sum_b \left[\frac{b}{r^3}\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a\, \Delta b \qquad (16)$$

$$u_{zz} \approx -\sum_a \sum_b \left[\frac{c}{r^3}\right]_{c_2(a,b)}^{c_1(a,b)} \Delta a\, \Delta b \qquad (17)$$

közelítő képleteihez,

és ezeket a ható test mágnesezettségének I_x, I_y, I_z összetevőivel rendre megszorozva és összeadva arra az eredményre jutunk, hogy a földmágnesség függőleges térerősségének a V térfogatú, I_x, I_y, I_z mágnesezettségű homogén mágneses ható test mágneses hatása által a P pontban előidézett ΔZ anomáliája a

$$\Delta Z \approx -I_x \sum_a \sum_b \left[\frac{a}{r^3}\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a\, \Delta b -$$

$$-I_y \sum_a \sum_b \left[\frac{b}{r^3}\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a\, \Delta b - I_z \sum_a \sum_b \left[\frac{b}{r^3}\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a\, \Delta b \qquad (18)$$

közelítő képlettel számítható ki.

Ismeretes továbbá, hogy a *földmágneses térerősség vízszintes összetevőjének* a V térfogatú, I_x, I_y, I_z mágnesezésű homogén mágneses ható test mágneses hatása által a tér $P(x, y, z)$ pontjában előidézett *ΔH anomáliája* a

$$\Delta H = I_x u_{xx} + I_y u_{xy} + I_z u_{xz} \qquad (19)$$

képlettel fejezhető ki.

Ebben a képletben u_{xx}, u_{xy}, u_{xz} a V hatótest $Q(\xi, \eta, \zeta)$ pontja és a tér $P(x, y, z)$ pontja meghatározta r távolság reciprokából az xx, xy, xz változópárok szerint képezett második deriváltaknak a ható test V térfogatára kiterjesztett integráljait jelentik az

$$u_{xx} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (20)$$

$$u_{xy} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{21}$$

$$u_{xz} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{22}$$

képletek szerint. Az x és ξ koordináták tengelye itt a földmágneses észak felé, a z és ζ, koordináták tengelye pedig itt is függőlegesen lefelé irányul.

A (2) egyenlőségekkel értelmezett a, b, c relatív koordináták bevezetésével e (20), (21), (22) képletek az

$$u_{xx} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2} da \, db \, dc \tag{23}$$

$$u_{xy} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a \partial b} da \, db \, dc \tag{24}$$

$$u_{xz} = \iiint\limits_V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a \partial c} da \, db \, dc \tag{25}$$

képletekbe mennek át.

A (23) és (24) képletekben kijelölt integrálok átalakítása jóval körülményesebb, mint a megfelelő (9) és (10) integráloké.

Ezt a körülményesebb átalakítást és a c változó szerint az integrálást elvégezve, az a és b változók szerint elvégezendő integrálás eredményét itt is numerikus összegezéssel megközelítve, az

$$a^2 + b^2 = \varrho^2 \tag{26}$$

jelölést alkalmazva, és figyelembe véve, hogy a (25) képlettel kifejezett u_{xz} integrál a (17) közelítő képlettel már kifejezett u_{zx} integrállal azonos, az u_{xx}, u_{xy}, u_{xz} integrálok

$$u_{xx} \approx \sum_a \sum_b \left[\frac{c}{\varrho^2 r} \left(\frac{2a^2}{\varrho^2} + \frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \tag{27}$$

$$u_{xy} \approx \sum_a \sum_b \left[\frac{a\,b\,c}{\varrho^2 r} \left(\frac{2}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2} \right) \right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \tag{28}$$

$$u_{xz} = u_{zx} \approx - \sum_a \sum_b \left[\frac{a}{r^3} \right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \tag{29}$$

közelítő képleteihez jutunk.

Ezeket a képletek pedig a ható test mágnesezettségének I_x, I_y, I_z összetevőivel rendre megszorozva és összeadva végül azt az eredményt kapjuk, hogy a földmágnesség vízszintes térerősségének a V térfogatú, I_x, I_y, I_z mágnesezettségű homogén mágneses ható test mágneses hatása által a P pontban előidézett ΔH anomáliája a

$$\Delta H \approx I_x \sum_a \sum_b \left[\frac{c}{\varrho^2 r}\left(\frac{2a^2}{\varrho^2}+\frac{a^2}{r^2}-1\right)\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a\, \Delta b +$$

$$+ I_y \sum_a \sum_b \left[\frac{abc}{\varrho^2 r}\left(\frac{2}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right)\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a\, \Delta b -$$

$$- I_z \sum_a \sum_b \left[\frac{a}{r^3}\right]_{c_1(a,b)}^{c_2(a,b)} \Delta a\, \Delta b \qquad (30)$$

közelítő képlettel számítható ki.

A légi mágneses mérésekkel mérhető ΔT anomália, amely közel áll a teljes földmágneses térerősség (totális intenzitás) anomáliájához, a vízszintes térerősség ΔH anomáliájából, a függőleges térerősség ΔZ anomáliájából és a teljes térerősség i inklinációjából az ismeretes

$$\Delta T = \Delta H \cos i + \Delta Z \sin i \qquad (31)$$

közelítő képlettel számítható ki.

Ehhez a számításhoz tehát a (18), illetve a (30) képlettel kiszámítható ΔZ és ΔH anomáliákon kívül az i inklináció ismerete is szükséges.

A Δg gravitációs anomália kiszámítására közölt (4) és a ΔZ, ΔH, ΔT mágneses anomáliák kiszámítására közölt (18), (30), (31) közelítő képletek gépesítésre is igen alkalmasak és a gravitációs és mágneses anomáliák értelmezésében hasznos szerepük lehet.

Tárgyalásunkban a Δg, ΔZ és ΔH anomáliák közelítő képleteinek kiszámítására azt az eljárást követtük, hogy az integrálást szabatosan csak a függőleges relatív koordinátát jelentő c változó szerint végeztük el, a vízszintes relatív koordinátákat jelentő a és b változók szerint elvégzendő integrálást pedig numerikus összegezéssel helyettesítettük.

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az alsó és felső határfelületeinek szintvonalas térképével vagy más alkalmas módon megadott V ható testet az alsó és felső határfelületei közé beillesztett $\Delta a \Delta b$ alapterületű, négyzet, vagy téglalap alapú függőlegesen álló homogén derékszögű hasábokra, oszlopokra bontjuk és a test által előidézett Δg, illetve ΔZ, ΔH és ΔT hatást vagy anomáliát e hasáb vagy oszlopok összetevődő hatásával igyekszünk megközelíteni.

Ha a V ható test nem teljesen homogén, de homogén részekből tehető össze, akkor homogén részenként kell az oszlopokra bontást és az oszlopok hatásának kiszámítását és összegezését elvégezni. Természetesen az egész test hatása e homogén résztestek hatásainak az összege.

Ha pedig a $\Delta a \cdot \Delta b$ részterületekre történő felbontás nem mindenütt egyenlő közű, hanem pl. a P pont közelében sűrűbb, távolabb ritkább közű, akkor természetesen egyenlő közű területrészenként kell a c változó szerint elvégzett integrálás eredményét a megfelelő $\Delta a \cdot \Delta b$ alapterületekkel szorozva összeadni.

A c változó szerint elvégzett integrálások és az a és b változók szerint elvégzett numerikus összegezések határait természetesen mindig arra a P pontra vonatkozó c, illetve a és b relatív koordinátákban kell megadni, amely P pontra vonatkozóan a Δg, illetve ΔZ, ΔH vagy ΔT hatást vagy anomáliát kiszámítani kívánjuk.

A tárgyalt képletekben a σ sűrűséggel, illetve az I_x, I_y, I_z mágnesezés-összetevőkkel a c változó szerint elvégzett integrálás és az a és b változók szerint elvégzett kettős összegezés eredményét kell megszorozni. Ezért a hatás kiszámítását több különböző felvett sűrűség-, illetve mágnesezettség-értékre is elvégezhetjük a sűrűséggel, illetve a mágnesezettség-összetevőkkel szorzandó képletrészek számításának megismétlése nélkül.

M. H. P. BOTT még 1963-ban két, számítógépre alkalmazható eljárást közölt háromdimenziós testek mágneses hatásának kiszámítására.

Második eljárásában BOTT is azt a közelítést alkalmazta, hogy a ható test térfogatára kiterjesztett integrálást csak a függőlegesen lefelé irányuló koordinátát jelentő, általa z-vel jelölt változó szerint végezte el és ennek az integrálásnak az eredményét numerikusan integrálta (illetve összegezte) az észak és kelet felé irányuló koordinátákat jelentő x, y változók szerint.

Ez az eljárása a földmágneses térerősség vízszintes összetevőjének ΔH anomáliájára a függőleges z relatív koordináta és a térbeli r távolság hányadosában harmadfokú eredményre vezetett, a megfelelő c relatív koordináta és az r távolság hányadosában általam a (30) képletben közölt elsőfokú eredmény helyett.

Igen érdekes azonban, hogy mindegyik eredmény helyes: BOTT $\frac{z}{r}$-ben harmadfokú eredménye alkalmas átalakítással átmegy az általam közölt, $\frac{c}{r}$-ben elsőfokú eredménybe.

A földmágnesség függőleges térerősségének ΔZ anomáliájára általam közölt (18) képlet csak a jelölésben különbözik a BOTT által közölt képlettől.

Láttuk, hogy az általam követett tárgyalás a háromdimenziós testek tömegvonzása által előidézett Δg nehézségi gyorsulás-anomália közelítő kifejezésére is alkalmas és erre 's egyszerű, jól kezelhető, gépesítésre is alkalmas képlethez vezet.

BOTT indézett közleménye nem foglakozott a Δg anomália kifejezésével.

IRODALOM

M.H.P. Bott: Two Methods Applicable to Computers for Evaluating Magnetic Anomalies Due to Finite Three Dimensional Bodies. Geoph. Prosp. Vol. XI. No 3, 1963 Sept.