Dekonvolúciós szűrők tervezése és alkalmazása

*REMETE LAJOS**

Ennek a cikknek a célja, hogy magyar nyelven összefoglalja és illusztrálja a szeizmikus feldolgozás egyik elméletileg legjobban kidolgozott, a gyakorlati alkalmazásokban mégis oly kritikus lépését. A bemutatott illusztrációk az OKGT Geofizikai Kutatási Üzemében készültek.

Настоящая работа имеет целью обобщить на венгерском языке и проиллюстрировать фильтрацию обратной свертки, представляющую собой один из теоретически лучше всего изученных, но все же критических по практическому применению шагов обработки сейсмических данных. Дредставленные рисунки составлены на Предприятии геофизической разведки Треста нефтяной и газовой промышленности.

Es wird hier eine ungarische Zusammenfassung und Darstellung einer Phase der seismischen Bearbeitung gegeben, die zwar zu den theoretisch am besten ausgearbeiteten gehört, aber in den Anwendungen manchmal kritisch ausfällt. Die gezeigten graphischen Darstellungen sind im Geophysikalischen Forschungsbetrieb des Landes Erdöl- und Gasindustrie – Trusts ausgearbeitet.

Determinisztikus modell:

A szeizmikus csatornák matematikai modelljéül elsőként Ricker javasolta 1942-ben a szeizmogramok wavelet-elméletét. Ez azt jelenti, hogy a szeizmikus csatornát (illetve annak egy részét) egy változatlan alakú hullámcsomagból, különböző amplitúdókkal és eltolásokkal összetettnek képzeljük el. Azaz ha $x(t)$ a csatorna:

$$x(t) = \sum_i r_i w(t-\tau_i) \tag{1}$$

Ez a modell feltételezi a szeizmogram energiájának időbeli kiegyenlítettségét és valamennyi frekvenciaszelektív jelenség elhanyagolását jelenti.

Ezekkel a közelítésekkel az r_i és τ_i mennyiségek a geológiai információk hordozói, ezt kívánjuk a bemeneti $x(t)$ függvényből meghatározni.

Az (1) felírható konvolució formájában

$$x(t) = w(t) * \sum r_i \delta(t-\tau_i); \tag{2}$$

általánosabban:

$$x(t) = w(t) * r(t); \tag{3}$$

a (3) digitális megfelelője:

$$x_t = \sum_i w_i r_{t-i}\,. \tag{4}$$

Meg kívánjuk határozni w inverzét, vagyis azt a f lineáris operátort, amely x-ből r-et visszaállítja.

$$f * x = f * (w * r) = (f * w) * r = r \tag{5}$$

ami a következő egyenletre vezet:

$$f * w = \delta \tag{6}$$

* OKGT GKÜ Fejlesztési Osztály

A δ egységelem folytonos esetben a Dirac delta, digitális esetben pedig a (..., *0,1,0,.....*) sorozat.
Ezek szerint a dekonvolúció az alakszűrés egy speciális esetének tekinthető.

Alkalmas transzformációkkal (6) a következő egyszerű alakra hozható:

$$F(\omega)\cdot W(\omega) = 1, \tag{7}$$

$$F(z)\cdot W(z) = 1, \tag{8}$$

ahol $F(\omega)$ és $W(\omega)$ Fourier-; $f(Z)$ és $W(Z)$ pedig Z-transzformált.

Ebből $f(z) = \dfrac{1}{W(z)}$. Az f_j-k az $\dfrac{1}{W(z)}$ függvény McLaurent sorának együtthatói egy az egységkört magában foglaló körgyűrűben.

Ennek létezéséhez szükséges és elégséges feltétel, hogy

$$W(z) \neq 0 \text{ ha } (z) = 1\,|z| = 1.$$

Legyen a kauzális $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots .w_n)$ minimumfázisú.
Ez azt jelenti, hogy $W(z) = w_0 + w_1 z_2 + w_2 z^2 + \ldots . w_n z^n$-nek sem pólusa, sem zérusa nincs az egységkörön belül.
Ebből következően
$F(z) = \dfrac{1}{W(z)}$-nek sincsen sem pólusa, sem gyöke az egységkörön vagy ezen belül, így megfordítva $f = (f_0, f_1, \ldots .)$ is kauzális és minimumfázisú.

Ennek számunkra igen lényeges következménye, hogy mivel az invert operátor csak a múltbeli értékekre hat, az idősor valamely t időig észlelt....x_{t-2} x_{t-1}, x_t értékeinek ismerete ekvivalens az ....r_{t-2}, r_{t-1}, r_t ismeretével. A továbbiakban tehát fenntartva a minimumfázis feltevését, (amely fizikailag a tökéletes rugalmasság feltevését rejti magában) a kauzális inverz operátorokra szorítkozunk.

Egy ilyen operátor n hosszúságú közelítése direkt módon is meghatározható a Z-transzformáció elvégzése nélkül.

A

$$\left\| \sum_{\tau} f_\tau w_{t-\tau} - \delta \right\|^2 = \min \tag{9}$$

feltételi egyenlet az

$$\begin{pmatrix} \varphi_0\,\varphi_1 \cdots \varphi_n \\ \varphi_1\,\varphi_0 \cdots \varphi_{n-1} \\ \vdots \\ \varphi_n\,\varphi_{n-1} \cdots \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

egyenletrendszerre vezet, amelynek megoldására Levinson javasolt egy gyors rekurzív algoritmust. $\left(\varphi_\tau = \sum_i w_i w_{i+\tau}\right.$ a jel autokorrelációja$\left.\right)$. Ebből látható, hogy a minimumfázisú jel közelítő inverzének meghatározásához csak a φ

autokorrelációs függvényre és a w_0 értékre van szükség. w_0 azonban csak egy konstans szorzó. Ennek számunkra igen nagy a jelentősége, mert a csatornából csak φ becsülhető, w_0 nem. Ehhez azonban további feltevések és vizsgálatok szükségesek.

Sztochasztikus modell:

Az eddigiekben az r-ről semmit sem tettünk fel. Az, hogy egy t időpontig beérkezett reflexiókból semmilyen következtetést sem tudunk levonni a jövőben beérkező reflexiókra, matematikailag az r reflexiós együttható sorozat korrelálatlanságát jelenti. Az általánosság csökkentése nélkül feltehetjük, hogy r várható értéke nulla.

Formulákban

$$E\{r_t\} = 0 \tag{11}$$

$$E\{r_t r_{t+\tau}\} = \begin{cases} 1 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \tag{12}$$

(E a várható értékoperátor).

A (3) egyenlet változatlan formájában új tartalmat kapott a valószínűség fogalmának bevezetésével. r nem determinisztikus függvény, hanem stochasztikus folyamat, feltevésünk szerint korrelálatlan, úgynevezett fehér spektrumú. Ebben az értelmezésben $x(t)$ úgynvezett lineáris stochasztikus folyamat. Könnyen belátható, hogy $x(t)$ autokorrelációs függvénye azonos a w jel autokorrelációjával:

$$\varphi_\tau = E\{x_t x_{t+\tau}\} = E\left\{\left(\sum_i w_i r_{t-i}\right)\left(\sum_i w_j r_{t+\tau-j}\right)\right\} = \sum_i \sum_j w_i w_j E\{r_{t-i} r_{t+\tau-j}\}.$$

(12) figyelembevételével adódik, hogy a második szummázásból csak a $j = i+\tau$ indexű tagok maradnak.

Tehát

$$\varphi_\tau = \sum_i w_i w_{i+\tau}\,. \tag{13}$$

amint állítottuk.

Ezek alapján egy szeizmikus csatorna dekonvolúciója a következő lépésekből áll:

az autokorrelációs függvény becslése,
a minimumfázisú inverz számítása,
szűrés az így kapott operátorral.

Eddigi megfontolásaink alapján, melyekben a dekonvolúciót speciális alakszűrésnek tekintettük, módszert nyertünk az úgynevezett spike-dekonvolúció elvégzésére, azaz valamely n hosszúságú minimumfázisú jel egységnyi hosszúságúra való összehúzásához, zajmentes esetben.

Általánosabb esetre vonatkozó megfontolásainkhoz, – amelyek eddigi eredményeink megerősítését fogják hozni – újabb szemlélet és eszközök szükségesek.

Dekonvolúció, mint optimumszűrés:

Legyen $x(t)$ egy zajos csatorna

$$x = s + n = w * r + n\,, \tag{14}$$

tegyük fel, hogy a jel- és zajfolyamat korrelálatlan

$$E\{r_t n_{t+\tau}\} = 0\,. \tag{15}$$

Meg kívánjuk határozni azt az f lineáris kauzális operátort, amelyet az x-re alkalmazva az $y = f^* x$ kimenet átlag négyzetes értelemben legkevesebbet tér el r-től, azaz

$$I = E\{(y_t - r_t)^2\} = \min\,. \tag{16}$$

Az ilyen típusú egyenletek a Wiener egyenletre vezetnek, amelynek általános alakja

$$\Phi f = \underline{g}\,; \tag{17}$$

esetünkben

$$\begin{pmatrix} \varphi_0\, \varphi_1 \cdots \varphi_n \\ \varphi_1\, \varphi_0 \cdots \varphi_{n-1} \\ \vdots \\ \varphi_n\, \varphi_{n-1} \cdots \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}, \tag{18}$$

ahol $\varphi_\tau = E\{x_t x_{t+\tau}\}$ az x folyamat autokorrelációja,

$g_k = E\{x_t r_{t+k}\}$ a bemenet és a kívánt kimenet keresztkorrelációja.

A jel- és zajfolyamat korrelálatlanságából

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_s,$$

w kauzalitásából pedig $g_k = 0$ ha $k > 0$ következik.

$$g_k = E\{(s_t + n_t)\, r_{t+k}\} = E\{s_t \cdot r_{t+k}\} + E\{n_t r_{t+k}\} = E\{s_t r_{t+k}\} = E\{(\sum w_i r_{t-i}) r_{t+k}\} =$$
$$= \sum w_i E\{r_{t-i}\, r_{t+k}\} = \begin{cases} w_{-k} & k \le 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases}, \tag{19}$$

Ezt behelyettesítve (18)-ba a (10) egyenletre jutunk, itt azonban φ a jel és a zaj autokorrelációjának összege.

Zaj figyelembevétele nem módosítja tehát eljárásunkat, mivel annak legjobb figyelembevétele megtörtént azáltal, hogy a zajos csatornákból becsültük az autokorrelációs függvényt.

A továbbiakban tehát eltekinthetünk a zajtól, az egyszerűbb:

$$x_t = \sum_{i=0}^{n} w_i r_{t-i}$$

modellre szorítkozunk.

A dekonvolúció és a predikció kapcsolata:

Tegyük fel, hogy ismerjük az x idősort a t időig.

Mint láttuk, ez ekvivalens az r ismeretével ugyanezen az intervallumon. Becslést kívánunk adni az $x_{t+\tau}$-ra.

Írjuk át a (4) szummázást a következő alakba:

$$x_{t+\tau} = \sum_{i=0}^{\tau-1} w_i r_{t+\tau-i} + \sum_{i=\tau}^{\infty} w_i r_{t+\tau-i} \tag{20}$$

Az első szumma tartalmazza az r idősor $t+1, t+2.\dots.t+\tau$ indexű tagjait, amelyek a t időpontban ismeretlenek. A második szumma a t időben ismert mennyiségeket tartalmazza. Figyelembe véve (12)-t, elemi valószínűségszámítási megfontolásokból adódik $x_{t+\tau}$ legjobb becslése.

$$\hat{x}_{t+\tau} = \sum_{i=\tau}^{\infty} w_i r_{t+\tau-i}. \tag{21}$$

Számunkra érdekesebb az az idősor, amely a jósláshibából áll elő:

$$y_t = x_t - \hat{x}_t = \sum_{i=0}^{\tau-1} w_i r_{t-i} \tag{22}$$

Ez formálisan ugyanaz, mint a (4), lineáris stochasztikus folyamat, azonban a konvolváló jelalak $i \geq \tau$ indexekre nulla.

Speciálisan $\tau = 1$ esetén $y_t = w_0 r_t$, tehát a spike-dekonvolúció ezen általánosabb prediktív dekonvolúciónak nevezett eljárás speciális esetének tekinthető.

Ezzel az eljárással a w jelalakot módunkban áll tetszőleges τ hosszúságúra összehúzni, a felbontás mértékét oly módon korlátozni, hogy az a szeizmikus csatorna valódi információtartalmának megfeleljen.

Az y_t idősor elvileg két lépésben áll elő. Az első az x_t-ből az r_t idősor kiszámítása, a második az r idősor újraszűrése a $w = (w_0, w_1 \dots . w_{\tau-1})$ wavelettel. Ugyanezt megtehetjük azonban a w és r kiszámítása nélkül is, egy megfelelő Wiener szűrőt tervezve és alkalmazva:

$$I = E\{(x_{t+\tau} - \hat{x}_{t+\tau})^2\} = \min, \tag{23}$$

ahol

$$\hat{x}_{t+\tau} = \sum_{i=0}^{n} a_i x_{t-i},$$

Ez a következő Wiener egyenletre vezet:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \, \varphi_1 \cdots \varphi_n \\ \varphi_1 \, \varphi_0 \cdots \varphi_{n-1} \\ \vdots \\ \varphi_n \, \varphi_{n-1} \cdots \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_\tau \\ \varphi_{\tau+1} \\ \vdots \\ \varphi_{\tau+n} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

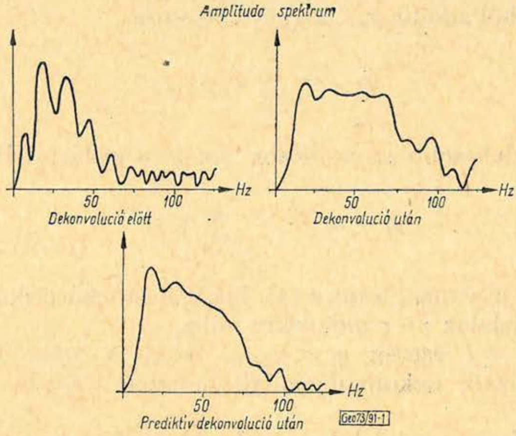
Ennek megoldásával megkapjuk az a jóslásoperátort.

Az f jósláshiba-operátort igen egyszerű átalakítással kaphatjuk:

$$f = (\underset{0}{1}, \underset{1}{0} \ldots \underset{\tau-1}{0}, -a_0, -a_1 \ldots \underset{\tau+n}{-a_n})$$

Ezek alapján a prediktív dekonvolúció is három lépésből áll:

az autókorrelációs függvény becslése,
a jósláshiba operátor elkészítése,
szűrés az így kapott operátorral.



1. ábra. Szeizmikus csatornából kivágott időablak amplitúdóspektruma dekonvolúció előtt, spike- és predictiv-dekonvolúció után

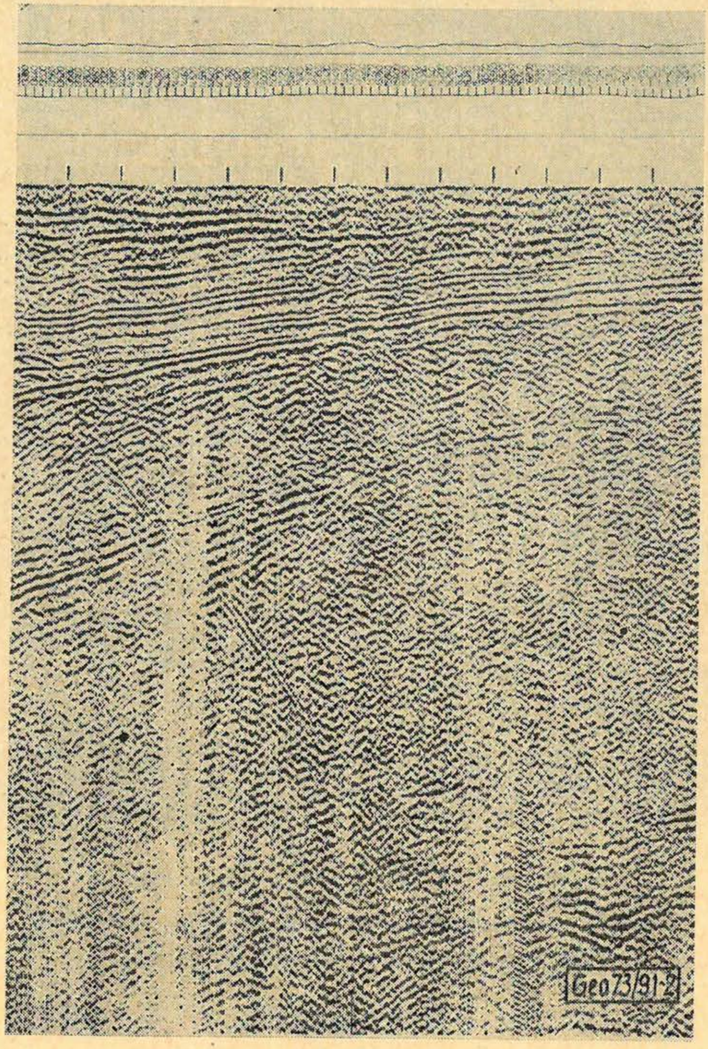
Рис. 1. Спектр амплитуд временного окна, выделенного из сейсмического канала до деконволюции, после пиковой и предсказывающей деконволюции

Abb. 1. Amplitudenspektrum eines aus einem seismischen Kanal ausgeschnitteten Zeitfensters vor der Dekonvolution, sowie nach Spike- und einer prediktiven- Dekonvolution

A következő három ábrán egy szeizmikus csatornából kivágott időablak amplitúdóspektruma látható szűrés előtt, *4 msec*-os spike-dekonvolúció és *8 msec* jóslástávolságú prediktív dekonvolúció után.

Végül egy időszelvényen is illusztráljuk a predektív dekonvolúció hatását. *(1., 2., 3. ábrák)*.

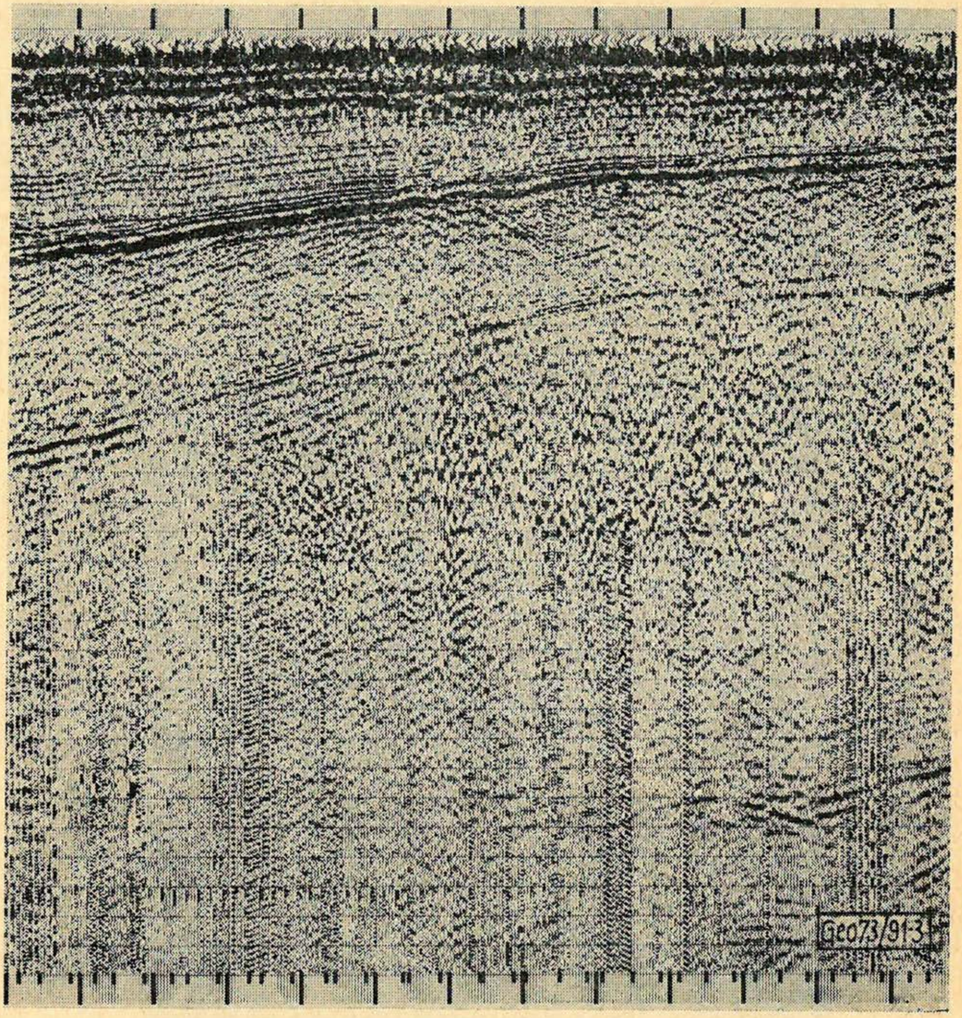
Ebben a cikkben csak az időtartománybeli szűréssel foglalkoztunk. Az alkalmazott matematikai apparátus fejlődése, a nagyobb teljesítőképességű számítógépek és a gyors Fourier transzformációs egységek megteremtik a lehetőségét a nagyobb számításigényű, teljesítőképesebb feldolgozási módszerek – például frekvenciatartománybeli, vagy homomorfikus szűrők – alkalmazásának.



2. ábra. Időszelvény dekonvolució nélkül

Рис. 2. Временной разрез без деконволюции

Abb. 2. Zeitprofil ohne Dekonvolution



3. ábra. Stacking előtti prediktív-dekonvolúció

Рис. 3. Предсказывающая деконволюция до накапливания

Abb. 3. Prediktive Dekonvolution vor Stacking

IRODALOM

Fodor: Lineáris rendszerek analízise (1967).
Robinson: Predictive decomposition of time series. Geophysics (1967).
Wiener: Smoothing and filtering. . . . (1947).
Peacock-Treitel: Predictive deconcolution: theory and practice. Geophysics (1969).
Rice: Inverse convolution filters. Geophysics (1962).
Ford – Hearne: Least squares inverse filtering. Geophysics (1962).
Robinson: Principles of digital filters. Geophysical Prospecting (1967).