

# Interpolációs operátor tervezése a hiba első abszolút momentuma alapján

GÖNCZ GÁBOR – KÉSMÁRKY ISTVÁN

*Az interpolációs hiba első abszolút momentuma alapján megvizsgáltunk néhány, az irodalomból ismeretes csonkító ablakot a bemenet frekvenciájának függvényében. További számításokat végeztünk a legkedvezőbbnek látszó Gauss-csonkítás optimális paramétereinek meghatározására.*

*Megállapítottuk, hogy a sinc  $(2f_h t) \exp(-2\pi^2 \sigma_f^2 t^2)$  alakú operátorral végzett interpoláció relatív hibája a gyakorlati szeizmikus feldolgozásban kisebb, mint  $-50$  dB.*

*По первому абсолютному моменту погрешности интерполяции были проанализированы некоторые окна усечения в зависимости от частоты входа. Проведены дополнительные вычисления для определения оптимальных параметров усечения типа Гаусса. Обнаружено, что относительноная погрешность интерполяции, проводимой с использованием оператора вида  $\sin c(2f_h t) \exp(-2\pi^2 \sigma_f^2 t^2)$  на практике обработки сейсмических данных меньше  $-50$  дБ.*

*Auf Grund des ersten absoluten Momentums des Interpolationsfehlers wurden einige aus der Literatur bekannten Abstumpfungsfenster in der Funktion der Eingangsfrequenz untersucht. Weiter wurden Berechnungen angestellt zur Bestimmung der optimalen Parameter der am günstigsten erscheinenden Gauss-Abstumpfung.*

*Es wird festgestellt, dass der relative Fehler der Interpolation, die durch einen Operator von der Form  $\sin c(2f_h t) \exp(-2\pi^2 \sigma_f^2 t^2)$  ausgeführt wurde, bei der praktischen seismischen Bearbeitung kleiner als  $-50$  dB ausfällt.*

## Bevezetés

A digitális feldolgozás során, például NMO korrekció, vagy finomabb reziduál korrekciók elvégzésekor előfordul, hogy meg kell határozni a szeizmikus csatorna értékét a mintavételi pontok közti helyeken is. A feladatot a csatorna interpolációjával oldják meg. Az interpoláció azonban a csatorna valódi értékének csak valamilyen közelítését adja. Emiatt a kimenetet interpolációs hiba is terheli. Célunk a feldolgozás során természetesen az, hogy olyan interpolációs módszert válasszunk, amely kevés számítási munkát igényel és ugyanakkor kis hibát okoz. Vizsgálni kell tehát az interpolációs hibára jellemző mennyiségeket a különböző módszereknél.

Mivel a szeizmikus csatorna trigonometrikus komponensekre bontható, az interpolációs módszereket rögzített frekvenciájú szinusz-függvényekre vizsgáltuk. Az interpolációs hiba egy adott időpillanatban bonyolultán függ az interpoláció argumentumától, az interpolálandó függvényről és a módszer paramétereitől is. Emiatt a hiba jellemzésére statisztikus mennyiségeket kell használni. Könnyen belátható, hogy a hiba várható értéke szinuszos jelek interpolálásakor zérus. Alkalmas jellemző lehet a hiba abszolút értékének, vagy a hiba négyzetének várható értéke. A továbbiakban az első mennyiséggel, azaz a hiba első abszolút momentumával foglalkozunk.

## Vizsgálati módszer

Legyen  $T$  egy tetszőleges mintavételi elem argumentuma valamilyen  $[0, T_0]$  intervallumban, legyen az interpolálandó függvény  $x(t)$  és a mintavételi távolság  $\tau$ .

Ha két mintavételi elem közé interpolálunk, az  $x(t)$  értékét a  $t = T + \lambda$  helyen kell meghatároznunk, ahol  $0 < \lambda < \tau$ .

Tegyük fel, hogy  $T$  és  $\lambda$  független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a  $[0, T_0]$  illetve  $[0, \tau]$  intervallumon. Az interpolált értéket  $x(t)_{\text{int}}$ -el jelölve, az interpolációs hiba abszolút első momentuma így írható (Bodoky, 1970):

$$E\{|h(f, \tau)|\} = \int_0^\tau \int_0^{T_0} |x(T + \lambda) - x(T + \lambda)_{\text{int}}| \frac{1}{T_0} \frac{1}{\tau} dT d\lambda.$$

Az interpolációs hiba a  $f$  frekvencia és a  $\tau$  mintavételi távolság függvénye. E mennyiséget normáljuk az interpolálandó függvény abszolút értékének átlagával. A vizsgált frekvenciákra a normáló tényező értéke  $2/\pi$ .

Vizsgálatainkban a  $T_0 = 500 \text{ ms}$  és  $\tau = 2 \text{ ms}$  értékeket használtuk. A normált abszolút hibát Monte-Carló módszerrel számítottuk kiadott frekvenciákon. Az integrandust sok  $T_k, \lambda_k$  argumentumra számítottuk ki, melyek egyenletes eloszlását véletlenszám-generátorral biztosítottuk. A várható értéket számtani átlaggal közelítettük. A használt munkaképlet:

$$E\{|h(f, \tau)|\} = H(f, \tau) \approx \frac{\pi}{2M} \sum_{k=1}^n |x(T_k + \lambda_k) - x(T_k + \lambda_k)_{\text{int}}|,$$

ahol  $x(T_k + \lambda_k)_{\text{int}}$  a módszertől függ.

### Eredmények

Az 1., 2. és 3. ábrán különböző  $N$  pontszámú operátorok mellett ábrázoltuk a  $H(f, \tau)$  mennyiséget a frekvencia függvényében,  $\tau = 2 \text{ ms}$  esetén, több módszerre. Valamennyi ábrán feltüntettük a lineáris interpoláció hibakarakterisztikáját összehasonlítás céljából, mely természetesen nem függ  $N$ -től.

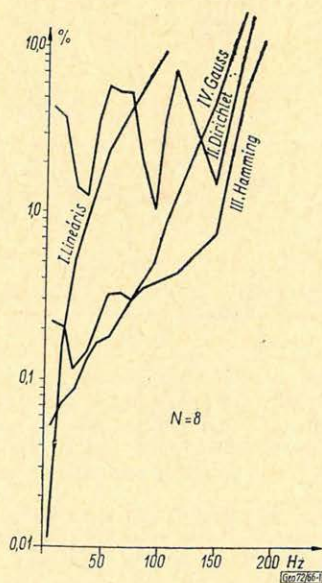
Látható, hogy a lineáris interpoláció hibája alacsony frekvenciákon ( $20 \text{ Hz}$  alatt) kisebb  $-60 \text{ dB}$ -nél.

A szeizmikus jeltartományban, azaz  $20 - 80 \text{ Hz}$  között azonban a hiba már  $1\%$  fölé emelkedik. Magasabb frekvenciákon a hiba gyorsan növekszik. Olyan műveleteknél tehát, melyek a nagyfrekvenciás hibákra érzékenyek, ez az interpolációs módszer a feldolgozás hatásosságát csökkentheti.

1. ábra. Az interpolációs relatív hiba abszolút értékének átlaga a frekvencia függvényében különböző módszerek esetén. Operátor pontszáma 8

Фиг. 1. Зависимость средней величины абсолютных значений относительной погрешности интерполяции от частоты при применении различных методов. Число пунктов оператора - 8

Fig. 1. Durchschnitt des Absolutwertes des relativen Interpolationsfehlers in der Funktion der Frequenz im Falle von verschiedenen Methoden. Punktzahl des Operators: 8



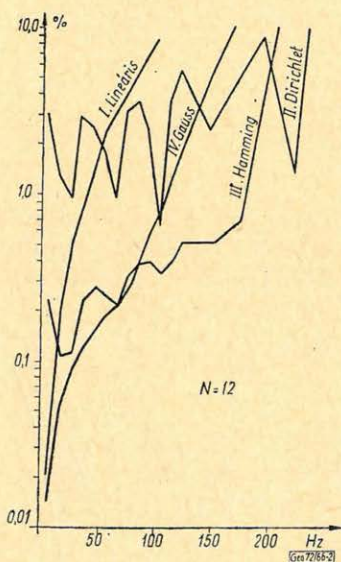
Ismeretes, hogy egy helyesen mintavételezett függvény végtelen hosszú sinc  $(2f_N t)$  operátorral ( $f_N$  a Nyquist frekvencia) tetszőleges argumentumnál pontosan visszaállítható. (Égzakt interpoláló képlet, Meskó, 1972)

Az interpolálás numerikus megvalósításakor azonban az operátort természetesen csak véges hosszúságban vehetjük figyelembe. Ekkor az  $x.(T_k + \lambda_k)_{int}$  értéke valamely  $C(t)$  csonkító függvény esetén általánosan így írható:

$$x.(T_k + \lambda_k)_{int} = \sum_{i=1}^N x \left\{ T_k - \left[ \left( i - \frac{N}{2} \right) \tau - \lambda_k \right] \right\} \cdot \sin c \left[ \left( i - \frac{N}{2} \right) \tau - \lambda_k \right] \cdot C \left[ \left( i - \frac{N}{2} \right) \tau - \lambda_k \right].$$

Az operátor széleinek egyszerű elhagyása négyszögcsonkításnak felel meg.

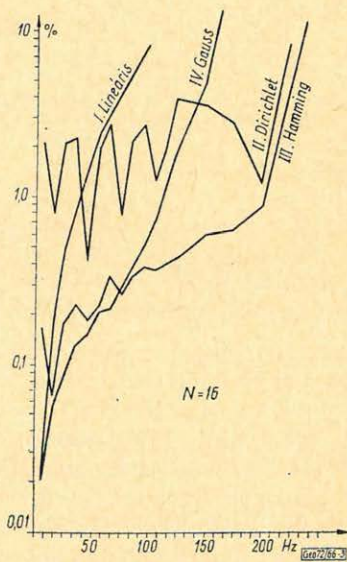
$$C(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \leq \frac{N \cdot \tau}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



2. ábra. Az interpolációs relatív hiba abszolút értékének átlaga a frekvencia függvényében különböző módszerek esetén. Operátor pontszáma 12

Фиг. 2. Зависимость средней величины абсолютных значений относительной погрешности интерполяции от частоты при применении различных методов. Число пунктов оператора - 12

Fig. 2. Durchschnitt des Absolutwertes des relativen Interpolationsfehlers in der Funktion der Frequenz im Falle verschiedener Methoden. Punktzahl des Operators: 12



3. ábra. Az interpolációs relatív hiba abszolút értékének átlaga a frekvencia függvényében különböző módszerek esetén. Operátor pontszáma 16

Фиг. 3. Зависимость средней величины абсолютных значений относительной погрешности интерполяции при применении различных методов. Число пунктов оператора - 16

Fig. 3. Durchschnitt des Absolutwertes des relativen Interpolationsfehlers in der Funktion der Frequenz im Falle verschiedener Methoden. Punktzahl des Operators: 16

Az 1., 2. és 3. ábrán a  $II$  görbék a  $\text{sinc}(2f_N t)$  különböző hosszúságú négy-zögcsonkításával kapott interpoláló operátorok hibakaraktisztikái.

Egyszerű négyszögcsonkítás esetén a hiba alacsony frekvencián is  $1-10\%$  között ingadozik, s az operátor pontszámát növelve csak kevésbé csökken. A karakterisztikákból kitűnik, hogy az ideális interpoláló operátor ilyen csonkításával nem kapunk kis pontszámú és egyben hatásos operátort.

Megvizsgáltuk a  $C_2(t) = C_1(t) \cdot 0,54 + 0,46 \cos(\pi t)$  függvénnyel – a Hamming ablakkal – csonkított  $\text{sinc}(2f_N t)$  operátorokat is. Az ábrák  $III$  görbéi mutatják a megfelelő karakterisztikákat. Az ilyen típusú operátor biztosítja, hogy széles sávon  $1\%$  alatt maradjon a hiba. A pontszám növelése nem eredményez jelentősebb javulást. A  $IV$  hibakaraktisztikák a  $C_3(t) = C_1(t) \cdot e^{-2\pi^2(56.6)^2 t^2}$  Gauss-féle csonkítással kapott operátorokra jellemzők. Az ábrákból kitűnik, hogy a szeizmikus jeltartományon ezek az operátorok okozzák a legkisebb interpolációs hibát. Vizsgáltuk a bemutatottakon kívül a koszinusz-ablak, háromszög-ablak, és Hanning-ablak (lásd Meskó 1972, 213. old.) hatását is, azonban ezek rosszabb eredményt adtak, mint a Gauss-féle csonkítás.

### Kétparaméteres interpoláló függvények vizsgálata

Az eddig tárgyalt esetekben az ideális jelvisszaállításhoz szükséges  $\text{sinc}(2f_N t)$  függvény csonkításával előállított operátorokat vizsgáltuk.

Elvileg elképzelhető, hogy az ideálistól eltérő  $\text{sinc}(2f_H t)$  csonkítása kedvezőbb eredményeket ad, ha  $f_H \leq f_N$ . Az ilyen operátor az adatrendszer simítását is elvégzi.

A Gauss görbével csonkított  $\text{sinc}(2f_H t)$  operátornak két paramétere van, a  $\text{sinc}(2f_H t)$  határfrekvenciája és a csonkító Gauss-görbe szórása. Ezt a két paramétert próbáltuk meghatározni úgy, hogy lehetőleg kicsiny pontszámra is az operátorral végzett interpoláció átlagos spektrumtorzítása a szeizmikus jeltartományon minimális legyen. Az operátor analitikus alakja:

$$\Theta(t) = \sin c(2f_H t) e^{-2\pi^2 \sigma_f^2 t^2},$$

ahol  $f_H$  az a frekvencia, ahol az operátor átvitele  $0,5$ ,  $\sigma_f$  a csonkító Gauss görbe szórása a frekvenciatartományban.

Az operátort  $f_H$  és  $\sigma_f$  egyértelműen meghatározzák. Az interpoláló operátornak a következő tulajdonságokkal kell rendelkeznie a fentiek értelmében:

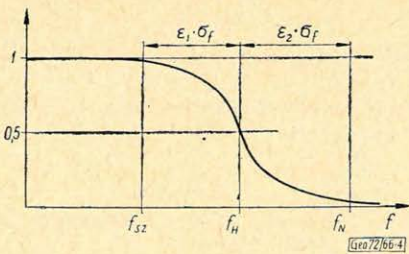
- a) A szeizmikus jeltartományon az átvitel lehetőleg  $1$  legyen.
- b) az időtartományban az operátor jól koncentrált legyen.

Ezek a tulajdonságok ellentmondóak, kompromisszumot az interpolálás okozta átlagos spektrumtorzítás minimalizálásával keresünk.

Legyen  $f_{sz}$  a szeizmikus felső határfrekvencia egy becsült értéke (pl.  $80 \text{ Hz}$ ) és  $f_N$  a Nyquist frekvencia. Definiáljuk  $\sigma_f$  és  $f_H$  helyett az  $\varepsilon_1$  és az  $\varepsilon_2$  paramétereiket a 4. ábra szerint.

$\varepsilon_1$  és  $\varepsilon_2$  szintén egyértelműen meghatározza az operátort. Az  $\varepsilon_1$ -t és  $\varepsilon_2$ -t variálva meghatároztuk az operátorok hibakaraktisztikáit.

A kapott hibakaraktisztikákkal kétféle spektrumot súlyozva számítottuk az operátorok átlagos relatív spektrumtorzítását. Ezt tekintettük az operátor jóságának mértékéül. Az átlagos relatív spektrumtorzításokat  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  függvényében ábrázolva olyan  $f_H$ ,  $\sigma_f$  értékpárokat próbáltunk meghatározni, melyekre a torzítás minimális.



4. ábra. Kétparaméteres interpoláló operátor átviteli függvénye

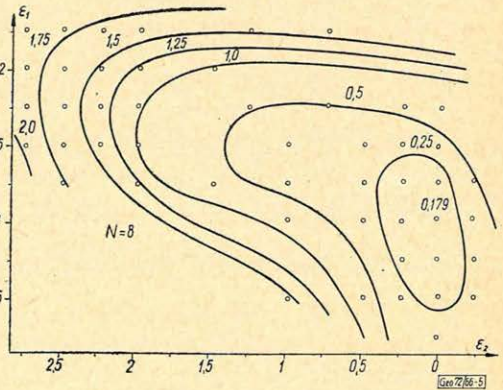
Fig. 4. Характеристика двухпараметрового оператора интерполяции

Fig. 4. Überföhrungsfunktion eines Zwei-parameter-Interpolations-Operators

5. ábra. Fehérspektrumra vonatkozó relatív spektrumtorzítás az operátor-paraméterek függvényében. Operátor pontszáma  $N = 8$

Fig. 5. Зависимость относительного искажения спектра для белого спектра от параметров оператора. Число пунктов оператора  $\Pi = 8$

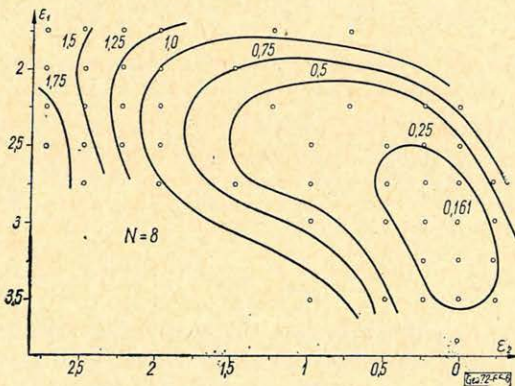
Fig. 5. Relative Spektrumverzerrung für ein weisses Spektrum in der Funktion der Operatorparameter. Punktzahl des Operators:  $N = 8$



6. ábra. Fehér- és Gauss-spektrum összegére vonatkozó relatív spektrumtorzítás az operátorparaméterek függvényében. Operátor pontszáma 8

Fig. 6. Завосимость относительного искажения спектра для суммы белого и Гауссоваспектров от параметров оператора. Число пунктов оператора - 8

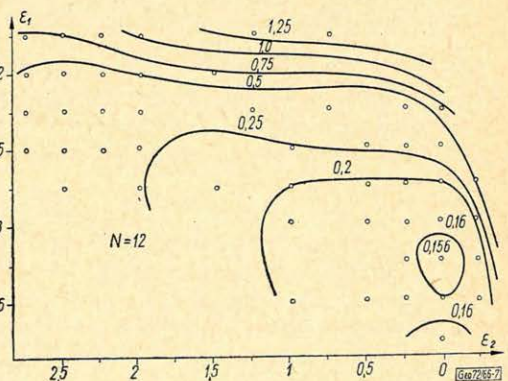
Fig. 6. Relative Spektrumverzerrung für die Summe eines weissen und Gaussischen Spektrums als Funktion der Operatorparameter. Punktzahl des Operators: 8



7. ábra. Fehér- és Gauss-spektrum összegére vonatkozó relatív spektrumtorzítás az operátorparaméterek függvényében. Operátor pontszáma 12

Fig. 7. Зависимость относительного искажения спектра для суммы белого и Гауссова спектров от параметров оператора. Число пунктов оператора - 12

Fig. 7. Relative Spektrumverzerrung für die Summe eines weissen und Gaussischen Spektrums als Funktion der Operatorparameter. Punktzahl des Operators: 12

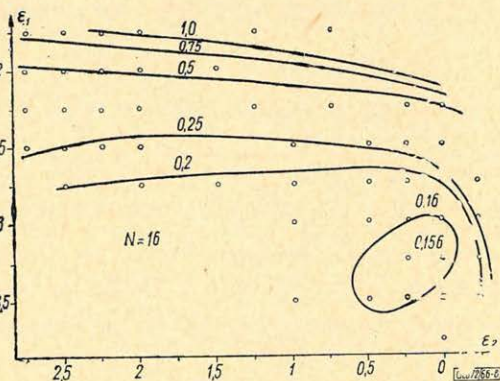


Az 5., 6., 7. és 8. ábrán a spektrumtorzítások százalékban felvitt értékeiből készített hiba-térképeket látjuk. Az 5. ábrán a 20 – 80 Hz-ig terjedő sávkorlátozott fehér spektrumra, a 6., 7. és 8. ábrákon pedig egy 20 – 80 Hz-ig terjedő fehér-spektrum és egy 40 Hz várható értékű és 10 Hz szórású Gauss-görbe alakú spektrum azonos súlyú összegére vonatkozó spektrumtorzításokat rajzoltuk fel.

8. ábra. Fehér- és Gauss-spektrum összegére vonatkozó relatív spektrumtorzítás az operátorparaméterek függvényében. Operátor pontszáma 16

Фиг. 8. Зависимость относительного искажения спектра для суммы белого и Гауссова спектров от параметров оператора. Число пунктов оператора — 16

Fig. 8. Relative Spektrumverzerrung für die Summe eines weissen und Gaussischen Spektrums als Funktion der Operatorparameter. Punktzahl des Operators: 16



### Következtetések

Látható, hogy  $N = 8$  esetére sikerült minimumot találni, azaz meghatározni az optimális Gauss-csonkítás paramétereit:  $\epsilon_2 = 3$ ,  $\epsilon_1 = 0$ , azaz  $\sigma = 56,6$  Hz, illetve  $f_H = 250$  Hz. Hosszabb operátorokkal további számításokat lehetne végezni; mivel azok minimumait nem határoltuk körül, léteznek további minimumok is.

Az  $N = 8$ -ra kapott 0,17% körüli hiba kielégítő és, mint az ábrákból kitűnik, hosszabb operátorral nem lehet gazdaságosan csökkenteni a hibát.

A továbbiakban a vizsgálatokat kiterjesztjük az interpolációs hiba szórásának meghatározására is különböző módszerek esetén. Vizsgálni kívánjuk a hiba-energiát modell csatornákon, valamint ezen hibák terjedését a feldolgozási fázisok során. Azonban már az eddigi számítások alapján is megállapíthattuk, hogy a gyakorlati feldolgozásban néhány adatot, Gauss-görbével csonkított sinc operátor elegendő pontosságot biztosít. Emiatt szeizmikus feldolgozó programjainkban az ilyen alakú operátorokat alkalmazzuk.

### IRODALOM

Bodoky Tamás: Investigation of Interpolation Processes. Geofizikai Közlemények 1971. XX. 1 – 2. szám.

Meskó Attila: A digitális szeizmikus feldolgozás alapjai. Tankönyvkiadó, 1972.

Srejjyer: Monte Carló módszerek. Műszaki Könyvkiadó, 1965.

## Lapszemle

Alföldi Olajbányász VIII. évf. 7. sz. 1972. július

Márhoffer József: Számítógép a mélyfúrás geofizikában, 2. oldal.

T. G.