

# Frekvencia-, idő és z-tartományban végzett sávszűrés összehasonlítása

MESKÓ ATTILA – SÜLYÓVSZKY IMRE

Összehasonlítjuk a szűrőtervezés és alkalmazás számítás-, illetve időigényeit. Frekvenciatartományban tervezésre tulajdonképpen nincs szükség, elegendő az áterezett sáv határainak megadása. Időtartományban először meg kell határozni az alkalmazandó súlyfüggvényt, majd ezt csonkítani kell a megengedhető legrövidebbre.

z-tartománybeli tervezés a pólusok és zérus helyek megfelelő elhelyezését jelenti.

A szűrő alkalmazása frekvenciatartományban szorzást, időtartományban konvolúcióképzést, z-tartományban rekurziós algoritmus alkalmazását igényli.

Tapasztalatok szerint a z-tartománybeli tervezés igényli a legtöbb időt. Szűk sáv esetén azonban a rekurziós szűrő alkalmazása a leggyorsabb. Ha a sáv nem szűk és a levágás meredeksége nem lényeges, az időtartománybeli tervezés és megvalósítás ajánlható.

Сопоставляются потребности планирования и применения фильтров в вычислении т.е. времени. Собственно говоря, в диапазоне частоты не требуется планирование, достаточно указать только пределы полосы пропускания.

В диапазоне времени необходимо сначала определить применяемую весовую функцию, затем усечь ее по возможности до минимальной длины.

Планирование в диапазоне  $z$  представляет собой соответствующее расположение полюсов и нулевых пунктов.

Применение фильтра требует в диапазоне частот умножения, в диапазоне времени операцию типа свертки, а в диапазоне  $z$  применения рекурзивного алгоритма.

По полученному опыту планирование в диапазоне  $z$  требует наибольшего времени. Однако, в случае узкой полосы применение рекурзивного фильтра обеспечивает самую большую скорость операции. Если полоса не является узкой, и крутизна среза не является существенной, то можно предлагать осуществление в диапазоне времени.

Es werden die Rechen-, bzw. Zeitbedarfe des Entwurfes und der Verwendung von Filtern verglichen. Im Frequenzbereich ist kein eigentlicher Entwurf nötig, es genügt die Angabe der Grenzen des durchgelassenen Bandes.

Im Zeitbereich wird zuerst die anzuwendende Gewichtsfunktion bestimmt, dann muss sie abgestumpft (truncated) werden im maximal erlaubten Masse.

Der Entwurf im  $z$ -Bereich bedeutet eine entsprechende Verteilung der Polen und Nullstellen.

Die Verwendung eines Filters bedeutet im Frequenzbereich Multiplikationen, im Zeitbereich Faltung, im  $z$ -Bereich die Verwendung eines Rekursions-Algorithmus.

Nach unseren Erfahrungen benötigt man die längste Zeit im  $z$ -Bereich zum Entwurf. Im Falle eines engen Bandes ist dagegen eben die Verwendung von Rekursionsfiltern am schnellsten. Falls das Band nicht eng und die Steilheit des Abschneidens unwesentlich ist, kann der Entwurf und die Realisation im Zeitbereich empfohlen werden.

## Bevezetés

A digitális szeizmikus adatfeldolgozásban többféle lehetőség van szűrés elvégzésére. Speciális változatoktól eltekintve három nagy csoportot különböztethetünk meg:

1. szűrés időtartományban (konvolúciós szűrés);
2. szűrés frekvencia tartományban;
3. rekurziós szűrés.

A megadott sorrend megfelel a módszerek kialakulása időrendjének, illetve jelenlegi alkalmazásuk gyakoriságának.

Az időtartományban a szűrést konvolúcióképzéssel végezzük el:

$$y_t = \sum_i c_i x_{t-i} \quad (1)$$

ahol  $x_t$  a bemenet,  $y_t$  a kimenet egy pontját,  
 $c_i$  a súlyfüggvény együtthatóit jelenti.

A frekvenciatartományban a szűrést három lépésben valósítjuk meg. Az első lépés a szűrendő csatorna Fourier-transzformáltjának számítása. Szimbolikusan:

$$X_k = F\{x_t\}. \quad (2a)$$

A második lépésben a szűrendő csatorna spektrumát szorozzuk az átviteli függvénnyel:

$$Y_k = C_k X_k, \quad (2b)$$

ahol  $Y_k$  a kimenet spektrumának  $k$ -adik mintája,  
 $X_k$  a bemenet spektrumának  $k$ -adik mintája,  
 $C_k$  az átviteli függvény  $k$ -adik mintája.

A harmadik lépés az  $Y_k$  inverz Fourier-transzformáltjának számítása:

$$y_t = F^{-1}\{Y_k\}. \quad (2c)$$

A rekurziós szűrés is konvolúcióképzést és összeadást igényel. Az egyik konvolúcióképzésben a bemeneti adatrendszer és a  $c_i$ -vel jelölt együtthatók, a másikban már előzetes szűréssel előállított kimeneti értékek és a  $d_k$  együtthatók szerepelnek:

$$y_t = \sum_{i=-n}^o c_i x_{t-i} + \sum_{k=1}^m d_k y_{t-k}. \quad (3)$$

A rekurziós szűrést kétszer kell alkalmaznunk, ha zérus fázistolású szűrést kívánunk megvalósítani. (Shanks, 1967.)

1. ábra. A három tárgyalt szűrési technika főbb jellemzői

<sup>1)</sup> Szűrés időtartományban

<sup>2)</sup> Szűrés frekvenciatartományban

<sup>3)</sup> Rekurziós szűrés

Фиг. 1. Основные характеристики трех обсужденных способов фильтрации

Szűrő adatai  $c_i(t)$

Bemenet  $x_i(t)$

Folyamat  $y_t = \sum_i c_i x_{t-i}$

$C(f)$

$x_i(t)$

$x_k = F\{x_i\}$

$Y_k = C_k x_k$

$y_t = F^{-1}\{Y_k\}$

$c_i(t)$

$d_k(t)$

$x_i(t)$

$y_t = \sum_{i=-n}^o c_i x_{t-i} + \sum_{k=1}^m d_k y_{t-k}$

[607254]

Fig. 1. Hauptcharakteristiken der behandelten drei Filtertechniken

Az egyes szűrési eljárások végrehajtásához a szűrők következő adataira van szükségünk:

- időtartományban: súlyfüggvény együtthatói;
- frekvenciatartományban: átviteli függvény értékei;
- rekurziós szűrés esetén:  $c_i$  és  $d_k$  együtthatók.

A három szűrési technika fontosabb jellemzőit az 1. ábra foglalja össze.

A továbbiakban a legegyszerűbb, de a digitális szeizmikus feldolgozásban gyakran alkalmazott szűrési feladattal, a sávszűréssel foglalkozunk.

### *Időtartománybeli (konvolúciós) szűrés*

A súlyfüggvény együtthatóit ideális sávszűrés esetén – mint ismeretes – a

$$c_i = 2f_0 \operatorname{sinc}(2f_0 i) \cos(2\pi F_i)$$

képlettel határozhatjuk meg, ahol  $F$  az áteresztett sáv középpontja,  $2f_0$  az áteresztett sáv szélessége.

A szűrés elvégzéséhez szükséges idő arányos a súlyfüggvény együtthatóinak számával, az alkalmazandó együtthatók számát pedig az szabja meg, milyen indexnél nagyobb indexre lesz  $c_i$  elegendő kicsiny. A műveletek száma csökken, ha a súlyfüggvény gyorsan tart zérushoz. A rövidítés módszere az ideális szűrő súlyfüggvényének szorzása egy ún. csonkítófüggvénnyel:

$$c_i^* = w_i c_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

ahol  $c_i^*$  a csonkított súlyfüggvény mintáit,

$w_i$  a csonkító függvény mintáit,

$c_i$  az eredeti súlyfüggvény mintáit jelenti.

A szűrő átviteli függvénye a csonkítás miatt módosul:

$$C^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f-f_1) W(f) df_1.$$

Ha  $W(f)$  a  $(-f_1, f_1)$  intervallumon kívül elhanyagolhatóan kicsiny és  $f_1 < f$ , a fenti összefüggés a

$$-F - f_0 + 2f_1 < f < -F + f_0 - 2f_1$$

$$F - f_0 + 2f_1 < f < F + f_0 - 2f_1$$

egyenlőtlenséget kielégítő frekvenciákra így alakul:

$$C^*(f) = \int_{-f_1}^{f_1} S(f-f_1) W(f_1) df_1 = S(f) \int_{-f_1}^{f_1} W(f_1) df_1 \approx S(f).$$

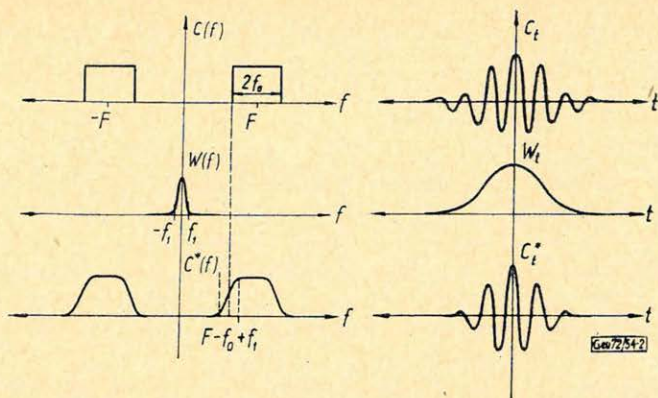
A csonkított és eredeti átviteli függvények az áteresztett sáv egy részén, illetve az eltávolított frekvenciatartomány egy részén jó közelítéssel azonosak. Az átmeneteket az áteresztett sáv és az eltávolított tartomány között a konvolúcióképzés lesimítja; ezzel a levágás meredekségét csökkenti.

Fenti gondolatmenetünk azonban csak akkor érvényes, ha  $f_1 \ll f_0$ , azaz a csonkítófüggvény spektruma is keskeny sávra koncentrálódik.

Az elmondottakat a 2. ábra illusztrálja.

A csonkítófüggvények megválasztásával az OKGT Geofizikai Kutatói Üzemében részletesen foglalkoztunk. (Ld. pl. Zelei, 1971.) Kedvező tulajdonságai miatt a Gauss-görbe alakú csonkítófüggvény alkalmazását javasoltuk.

A függvény mind az időtartományban, mind a frekvenciatartományban megfelelően rövid. A koncentrációra jellemző mennyiségek számítását és néhány csonkítófüggvény tulajdonságait a 3. ábrán mutatjuk be.



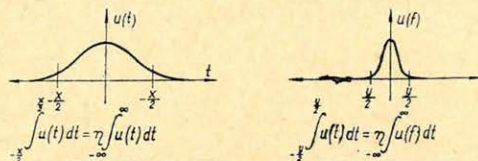
2. ábra. A sávszűrő csenkitésének hatása, ha a csenkitő függvény spektruma a  $-f_1, f_1$  intervallumon kívül jó közelítéssel zérus

Fig. 2. Эффект усежения полосового фильтра, если спектр усекающей функции вне интервала  $-f_1, f_1$  равен нулю при хорошем приближении.

Fig. 2. Die abstumpfende Effekt des Bandfilters, wenn das Spektrum der Abstumpfungsfunktion ausserhalb des Intervalls  $-f_1, f_1$  annähernd verschwindet

$$\frac{T}{2} (\Delta t = 2 \text{ ms})$$

$\frac{dB}{f_a(Hz)}$	20	30	40	50	60
5	170	223	267	306	334
10	70	111	133	152	168
15	56	74	89	102	114
20	42	55	66	76	85
25	34	44	53	61	69
30	28	37	44	50	57
35	24	32	38	43	53
40	21	28	33	38	42
45	19	24	29	34	37
50	17	22	26	30	33
55	15	20	24	27	31
60	14	18	22	25	28



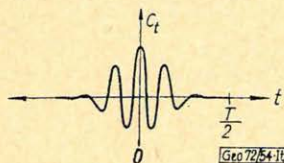
$u(t)$	$X_1$	$Y_1$	$X_2$	$Y_2$	$X_3$	$Y_3$	$X_4$ $\eta=0.01$	$Y_4$ $\eta=0.01$	$X_5$ $\eta=0.05$	$Y_5$ $\eta=0.05$
$e^{-\pi t^2}$	0,58	0,58	0,92	0,92	1,44	1,44	0,34	0,85	2,08	
$e^{- t }$	1,22	0,22	2,3	0,42	4,6	1,06	0,27	0,97	4,86	
$\frac{1}{10(0,5+ t )}$ $ t  < 0,5$ $ t  > 0,5$	0,6	0,86	0,76	1,34	0,88	3,76	0,52	1,02	3,31	
$\frac{1}{0}$ $ t  < 0,5$ $ t  > 0$	0,7	0,84	0,9	1,6	0,99	15,1	0,59	1,44	14,8	
$\frac{1-2 t }{0}$ $ t  < 0,5$ $ t  > 0,5$	0,34	1,11	0,54	1,68	0,78	2,60	0,38	0,91	2,04	
$e^{- t } \cos \frac{\pi t}{2}$	1,0	0,3	1,78	0,5	3,18	3,14	0,30	0,89	3,64	
$e^{- t } \cos \pi t$	1,32	1,1	2,14	1,3	4,3	1,9	1,45	2,79	8,15	
$\cos \pi t$ $ t  < 0,5$ $ t  > 0,5$	0,4	1,02	0,58	1,54	0,8	2,36	0,41	0,83	1,89	
$0,5+0,05 \cos \pi t$ $ t  < 1$ $ t  > 1$	0,62	0,80	0,93	1,28	1,36	5,64	0,50	1,20	7,65	
$0,54+0,46 \cos \pi t$ $ t  > 1$	0,66	0,86	1,00	1,35	1,52	7,21	0,57	1,35	10,8	

Geo 72/54-3

3. ábra. Néhány csenkitőfüggvény összehasonlítása

Fig. 3. Сопоставление некоторых усекающих функций

Fig. 3. Vergleich einiger Abstumpfungsfunktionen



I. táblázat Súlyfüggvény félhosszúsága az alsó levágási frekvencia ( $f_a$ ) és a levágási meredekség ( $dB/o$ ) függvényében (a hossz milliszekundumban mérve)

Таблица 1. Полуудина весовой функции в зависимости от частоты нижнего среза ( $f_a$ ) и крутизны среза ( $dB$  за октаву) (длина измеряется в миллисекундах).

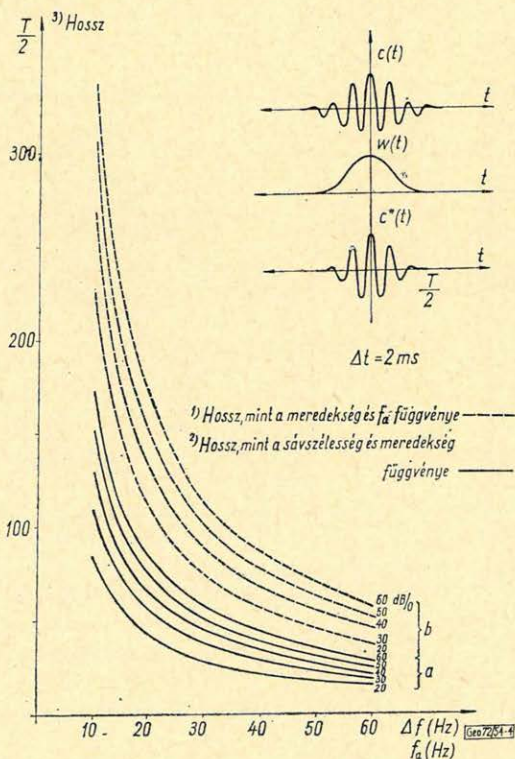
Tabelle 1. Halblänge der Gewichtsfunktion als Funktion der unteren Abschneidefrequenz ( $f_a$ ) und der Abschneidesteilheit ( $dB/o$ ) (die Länge gemessen in Millisekunden)

Az átviteli függvény két tulajdonsága befolyásolja a csenkitott súlyfüggvény hosszát:

1. vágási meredekség;
2. az áteresztett sáv szélessége.

A 2. ábra alapján világos, hogy nagy vágási meredekség, illetve keskeny áteresztett sáv hosszú súlyfüggvény alkalmazását kívánja meg. A vágási meredekséget a használatos dB/oktáv egységekben mérjük. Belátható, hogy elegendő az alsó határon biztosítani a kívánt meredekséget. Az alsó levágási frekvencia csökkenésével is egyre hosszabb súlyfüggvényre van szükség. A numerikus értékeket az I. táblázat tartalmazza. A táblázat alapján világos, hogy gyakorlati feladatokban (20–40 dB/oktáv meredekség, 15 Hz alsó határfrekvencia) 100–150 pontos szűrőre van szükség.

Ha  $f_1 = 1/4 f_0$  választással élünk és a súlyfüggvények hosszát úgy jelöljük ki, hogy az utolsó, még megtartott együttható a csenkitőfüggvénynek az a mintája legyen, mely a középponti érték századrésze, számíthatjuk a különböző szélességű sávokat áteresztő szűrő jó közelítéséhez szükséges csenkitott súlyfüggvény együtthatóinak számát. A vágási meredekségnek és az áteresztett sáv szélességének hatását a súlyfüggvény hosszára a 4. ábrán mutatjuk be.



4. ábra. A súlyfüggvény adatainak száma előírt vágási meredekség és alsó határfrekvencia esetén (a), illetve adott sáv szélesség esetén (b)

Фиг. 4. Число данных весовой функции при заданной крутизне среза и нижней граничной частоте (а), или при заданной ширине полосы (б)

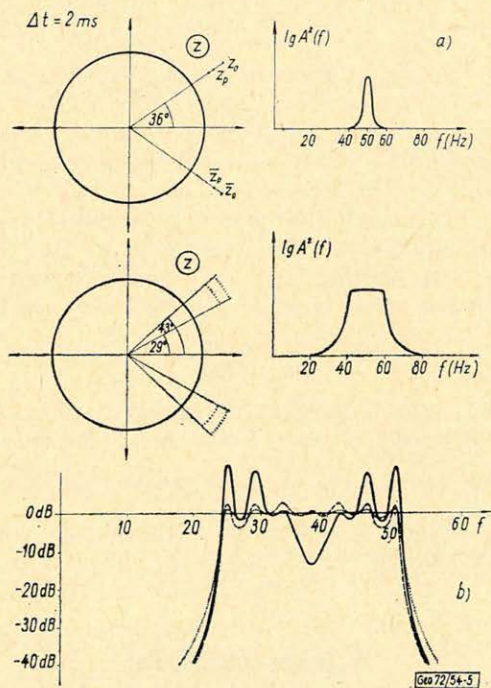
Fig. 4. Anzahl der Daten der Gewichtsfunktion im Falle einer vorgeschriebenen Abschneidesteilheit und gegebener unterer Grenzfrequenz (a) bzw. gegebener Bandbreite (b)

## Frekvenciatartománybeli szűrés

Alkalmazása csak akkor gazdaságos, ha gyors Fourier -transzformációs egységet (*FFT*) használhatunk. A bemeneti csatorna hossza ekkor rögzített és csak 2 egész kitevős hatványa lehet. (Gyakorlatban alkalmazott esetekben a kitevő: 10, 11 vagy 12.) A frekvenciatartományban végzett szűrés előtt az átviteli függvényt kell meghatározni. Az ideális szűrő átviteli függvényének simítására ekkor is szükség van (Meissner, 1969). Ez azonban a szűrés során végzendő műveletek számát természetesen nem befolyásolja.

### Rekurziós szűrés

A kívánt amplitúdókarakterisztikát a  $z$ -tartományban a zérus és pólus-helyek megfelelő elhelyezésével kell biztosítani (Shanks, 1967; Moonéy, 1968). A zérusok és pólusok elhelyezésének hatását az amplitúdókarakterisztikára az 5. ábrán mutatjuk be. Gyakorlati tapasztalatok szerint az  $R_0$  zérushelyek és



5. ábra. Rekurziós sávszűrő tervezése a  $z$ -síkon  
a) elvi vázlat;

- b) 25 – 50 Hz frekvenciatartományt átéresztő sávszűrő tervezése: folytonos vonal: első közelítés szaggatott vonal: második közelítés, pontozott vonal: harmadik (végleges) közelítés

Фиг. 5. Планирование рекурсивного полосового фильтра по плоскости  $z$ .

- a) Принципиальная схема  
б) Планирование полосового фильтра, пропускающего частотный диапазон от 25 до 50 гц; сплошная линия: первое приближение; штриховая линия: второе приближение; пунктир: третье (окончательное приближение)

Fig. 5. Planung eines Rekursions-Bandfilters in der  $z$ -Ebene

a) prinzipielle Skizze

- b) Planung eines Filters, welches den Frequenzbereich 25 – 50 Hz durchlässt; zusammenhängende Linie: erste Näherung; gebrochene Linie: zweite Näherung; punktierte Linie: dritte (endgültige) Näherung

$R_p$  pólushelyek megfelelő választása esetén elegendő  $2^\circ$  távolságonként elhelyezett zérus-pólus párokat alkalmazni. Ha a mintavételi távolság  $2\text{ ms}$ ,  $2^\circ$  megfelel  $2,88\text{ Hz}$ -nek. A sáv szélességének növelésével a szükséges párok száma lineárisan nő. A  $\Delta f$  hosszúságú sávot áteresztő szűrő megvalósításához  $n \approx 2 \left( \frac{\Delta f}{2,88} + 1 \right)$  zérus-pólus párra van szükség (beleértve a konjugált komplex párokat is).

A (3) képletben alkalmazandó együtthatók száma:  $m = 2n + 1$ . Mivel azonban a képletet kétszer kell alkalmazni, a kimeneti pontonként végzendő műveletek száma  $2^\circ$ -os elhelyezés esetén a

$$2m = \frac{8 \Delta f}{2,88} + 10$$

értékkel arányos.

### Következtetések

Az időtartománybeli sávszűrés csak akkor gyorsabb az FFT egységgel végzett sávszűrésnél, ha az áteresztett tartomány széles, a vágási meredekség csekély és emiatt az együtthatók száma  $50 - 80$  lehet. A rekurziós szűrés akkor gazdaságos, ha a zérus-pólus párok száma nem nagy, azaz az áteresztett sáv keskeny. A konvolúciós és rekurziós szűrés emiatt kiegészíti egymást. Az FFT elterjedése nem teszi feleslegessé más szűrési módszerek vizsgálatát és alkalmazását. (Hasonló megállapítást közöl Aguilera et al. 1970-ben.)

A feladat természete szabja meg, hogy milyen technikával dolgozzunk és a megfelelő technika kiválasztása a feldolgozásban időnyereséget jelenthet.

### IRODALOM

- Aguilera et al., 1970: Design of recursive filters Geophysics, Vol. 35, No. 2, p. 247 – 254.  
 Meissner, R. 1969: Az alkalmazott geofizika újabb eljárásai. Geofizikai Közlemények, XVIII. kötet, 4. szám 37 – 51. old.  
 Mooney, H. M., 1968: Pole and zero design of digital filters Geophysics, Vol. 33, No. 2, p. 354 – 360.  
 Shanks, I., 1967: Recursion filters for digital processing Geophysics, Vol. 32, No. 1, p. 33 – 51.  
 Zelei A., 1971: On the design of numerical filters (Megjelenőben).

## Lapszemle

*Bányászati és Kohászati Lapok, Kőolaj- és Földgáz, 5(105) évf. 4. 1972. április.*

*Szabó György:* Helyzetkép a világ legmélyebb fúrásairól, 117. old. Az Egyesült Államokban Texasban, a Pecos County nevű helyen lemélyített 1 – 17. University jelű fúrási ponton 8867 m világrekordot jelentő mélységet értek el. A fúrás összköltsége, mintegy 3,75 millió dollár volt. Igen mély fúrást végeztek a Csendes Óceánban, Tokiótól kb. 1500 km-re déli irányban, ahol is 6194 m-es tengervíz alatt 377 m mélyen fúrtak a fenék alá, vagyis a munkapad alá 6571 m-re. Európában azonban már valamivel mélyebb tengeri fúrások is vannak (Parchim-1 az NDK-ban 7025 méterrel és a francia Nassiet – 1 6689 méterrel).

*Árpási Miklós:* Befejeződött a Hódmezővásárhelyi (Hód – I.) jelű nagymélységű fúrás mélyítése, 127. old.

*Hidrológiai Közöny. 52. évf. 1 – 2. szám. 1972. január – február.*

*Vitális György:* Magyarország földalatti és vízföldtani tömbszelvénye, 1 – 5 old.

T. G.