

Csonkítófüggvények alkalmazása az ideális felülvágó, alulvágó, sáváteresztő és sávágó szűrők átviteli tulajdonságainak javításában

MESKÓ ATTILA-SZULYOVSKY IMRE-VÉGES ISTVÁN-ZELEI ANDRÁS

Ebben a cikkben a felül-, aluláteresztő, sáváteresztő, ill. sávszűrők tervezésének problémáit tárgyaljuk.

Mint ismeretes, a frekvenciaszűrés hatása ideális, ha az amplitúdóspektrum egységnyi az áteresztési sávban és zérus másutt, illetve a fázisspektrum zérus mindenütt.

Hogy a fenti kikötések teljesüljenek, végtelen hosszú súlyfüggvényt kellene alkalmaznunk. Egyéb szempontok miatt azonban arra törekszünk, hogy minél rövidebb súlyfüggvényeket alkalmazunk.

Emiatt a tényleges átviteli függvények különbözni fognak az elméletiektől. Az operátor véges hossza miatti változások csökkenthetők megfelelő csonkítófüggvények alkalmazásával. Beszámolunk a lehetséges csonkítófüggvényekre vagy ablakokra vonatkozó vizsgálatokról.

Kimutatjuk, hogy bár nincs optimális időablak általános értelemben, de bizonyos feltételek (az origó körüli maximális energiakoncentráció, zéró-fázistolás) a Gauss-féle függvényt jelölik ki legjobbnak.

Bemutatunk néhány, 70–90 msec hosszúságú, Gauss-ablakkal csonkított súlyfüggvényhez tartozó átviteli függvényt.

В данной работе разбираются проблемы конструирования фильтров верхних и нижних частот, полосовых и режекторных.

Как известно, эффективность частотной фильтрации идеальна, если амплитудный спектр в полосе пропускания равен единице, вне её равен нулю, а фазовый спектр на всех частотах равен нулю.

Для удовлетворения этих условий требовались бы бесконечно длинные весовые функции. Однако, согласно прочим соображениям, стремимся применять как можно более короткие весовые функции.

Поэтому действительные функции передачи будут отличаться от теоретических. Изменения, вызванные конечной длиной оператора, могут быть уменьшены применением режущих функций. Подведём итоги результатов исследований возможных режущих функций или окон. Хотя, в общем смысле, оптимальное временное окно не существует, при выполнении некоторых условий (максимальная концентрация энергии у начала координат, нулевой фазовый сдвиг) наилучшей функцией является функция Гаусса.

Покажем несколько функций передач, относящихся к весовой функции длиной 70–90 msec, срезанных окном Гаусса.

Es werden die Probleme der Planung der Hochpass- und Tiefpass-Filter sowie der Bandpass- und Bandfilter besprochen.

Um eine ideale Frequenzfilterung zu erreichen, sollte man eine Gewichtsfunktion von unendlicher Länge anwenden. Aus praktischen Gründen muss man aber danach trachten, je kürzere Gewichtsfunktionen zu gebrauchen. Die Folgen der Verkürzung der Operatoren können durch die Anwendung von geeigneten Abstumpfungsfunktionen teils eliminiert werden. Es werden hier solche Untersuchungen mitgeteilt und erwiesen, dass – obwohl es keine optimale Zeitfenster im allgemeinen Sinne existieren – jedoch die Gaussfunktion den besten Dienst leisten kann. Einige Übertragungsfunktionen werden vorgeführt, die zu einer mittels eines Gauss-Fensters von 70–90 ms Länge abgestumpften Gewichtsfunktion gehören.

Bevezetés

Az egycsatornás felülvágó, alulvágó, sáváteresztő és sávszűrők tervezése ismeretes, alkalmazásuk folytonos időfüggvényekre a szűrő súlyfüggvényének felhasználásával végzett konvolúcióval írható le:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot s(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

ahol $y(t)$ a kimenet
 $x(t)$ a bemenet
 $s(t)$ a szűrő súlyfüggvénye.

A felsorolt szűrési műveletek bármelyikét – mint az (1)-ből látható – a megfelelő végtelen hosszú súlyfüggvény alkalmazásával valósíthatjuk meg. Az (1) egyetlennek frekvenciatartományban

$$Y(f) = X(f)S(f) \quad (2)$$

felel meg, ahol az $Y(f)$, $X(f)$ és $S(f)$ függvények az $y(t)$, $x(t)$ és $s(t)$ Fourier-transzformáltjai. Az $S(f)$ átviteli függvény ideális, ha értéke az áteresztési sávban egységnyi, másutt zérus.

A gyakorlatban azonban csak véges hosszúságú digitális adatrendszerekkel tudunk gépi műveleteket végezni. Ezért a súlyfüggvényt mintavételezni és csonkítani kell. A mintavételezés további problémát nem jelent, ha mintavételi törvénynek megfelelően végezzük, azaz τ_0 mintavételi távolság és az f_h felső határfrekvencia között fennáll a $\tau_0 \leq \frac{1}{2f_h}$ reláció.

A csonkítás műveletével és hatásaival kívánunk bővebben foglalkozni. A véges hosszúságúvá csonkított súlyfüggvényt Fourier-transzformálva meggyőződhetünk arról, hogy a hozzá tartozó átviteli függvény eltér az ideálistól. Az eltérés annál jelentősebb, minél rövidebb súlyfüggvényt használunk. Ugyanakkor gazdaságossági szempontok miatt ez áll érdekünkben.

Célunk kettős volt. A súlyfüggvény rövidítése és ugyanakkor kedvező átviteli tulajdonságú szűrők tervezése.

Csonkítás az átlagnégyzetes kritérium szerint

Foglalkozunk először a különböző csonkításokkal teljesen általánosan. Legyen adott egy $g(t)$ egyváltozós függvény, melynek értelmezési tartománya a $(-\infty, +\infty)$ intervallum. Tegyük fel, hogy Fourier-transzformálható és Fourier-transzformáltját jelöljük $\bar{G}(f) = F\{g(t)\}$ -el, ahol F a Fourier-transzformáció szimbóluma. Szeretnénk találni egy olyan $\bar{g}(t)$ függvényt, mely a $\left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right)$ intervallumon kívül azonosan zérus, az intervallumon belül pedig olyan, hogy információtartalom szempontjából legjobban közelíti a $g(t)$ függvényt.

A $\bar{g}(t)$ és $g(t)$ közötti kapcsolat megfogalmazható úgy, hogy a $\bar{g}(t)$ az eredeti $g(t)$ és egy $u(t)$ csonkítófüggvény szorzata. Az $u(t)$ -ről tudjuk, hogy a $\left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right)$ intervallumon kívül azonosan zérus. Megállapítandó azonban az $u(t)$ alakja a $\left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right)$ intervallumon belül. Támpontot ad a csonkítófüggvény meghatározásához az a követelmény, hogy a $\bar{g}(t)$ függvény $\bar{G}(f)$ spektruma valamilyen értelemben kevésbé térjen el $\bar{G}(f)$ -től. Akkor már meghatározhatjuk a csonkítás módját, azaz a kritérium szerinti legalkalmasabb csonkítófüggvényt.

Kiköthetjük például azt, hogy $G(f)$ és $\bar{G}(f)$ átlagnégyzetes értelemben a legkevésbé térjen el egymástól, azaz:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f) - \bar{G}(f)|^2 df = \min \quad (3)$$

legyen. Milyen csonkítófüggvényt kell ekkor alkalmaznunk? A Rayleigh-tétel felhasználásával válaszolhatunk a feltett kérdésre. Ismert, hogy ha $g(t)$ és $G(f)$ Fourier-transzformált párok, akkor:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt \quad (4)$$

Ezért írhatjuk, hogy:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f) - \bar{G}(f)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t) - \bar{g}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{-\frac{T}{2}} g^2(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t) - \bar{g}(t)|^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\infty} g^2(t) dt \quad (5)$$

A jobb oldali összeg egyik tagja sem lehet negatív, de csak a középső függ $g(t)$ választásától. Az I_T akkor lesz minimális, ha:

$$\bar{g}(t) = g(t), \text{ ha } |t| \leq \frac{T}{2} \quad (6)$$

Másrészt előírtuk, hogy:

$$\bar{g}(t) = 0, \text{ ha } |t| > \frac{T}{2}.$$

Átlagnégyzetes értelemben tehát a legjobb $\bar{g}(t)$ függvény $g(t)$ -nak a $\left(-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right)$ intervallumba eső darabja. Ez négyszög alakú csonkítófüggvény alkalmazását írja elő:

$$g(t) = g(t) \cdot u(t), \text{ ahol } u(t) = 1 \text{ ha } (t) \leq \frac{T}{2} \\ \text{ha } (t) > \frac{T}{2}. \quad (7)$$

Ha egy adatrendszer végeiről egyszerűen elhagyunk tagokat, átlagnégyzetes értelemben a leghelyesebben járunk el. De csak ebben az értelemben.

(6)-ból látjuk, hogy:

$$I_{T_1} < I_{T_2}, \text{ ha } T_1 > T_2 \quad (8)$$

Azaz a minimum értéke csökken, ha a $g(t)$ függvénynek hosszabb szakaszát hagyjuk meg, azaz ha egyre szélesebb négyyszögfüggvénnyel csonkítunk. A csonkítás hatása ugyanis a frekvenciatartományban a következő képlettel írható le:

$$\bar{G}(f) = G(f) * \frac{\sin \pi T f}{\pi f} \quad (9)$$

Ismeretes, hogy

$$G(f) * \delta(f) = G(f) \quad (10)$$

azaz a Dirac- δ -val képzett konvolúció változatlanul hagyja a függvényt.

Belátható, hogy:

$$\delta(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi T f}{\pi f}$$

Növelve tehát a négyyszög csonkítófüggvény szélességét az időtartományban, spektrumának alakja tart a Dirac- δ -hoz és konvolválódva az eredeti spektrummal egyre kevésbé torzítja azt.

Csonkítófüggvények kiválasztása az energiakoncentráció alapján

A Dirac- δ -t szokás a következő módon definiálni:

$$\delta(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_n(f), \quad (11/a)$$

ha fennáll, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(f) df = 1 \quad (11/b)$$

és
$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f) = 0, \text{ ha } f \neq 0. \quad (11/c)$$

Ilyen az $F_n = n \frac{\sin \pi n f}{\pi n f}$ függvény. Hasonlóan viselkedik a négyyszögfüggvény is, ha szélességét egyre csökkentve magasságát növeljük úgy, hogy területe állandó maradjon.

Több ilyen függvénysorozat van: hogy ezek közül csonkítás céljára melyeket választjuk ki, az a jósági kritériumtól függ, tehát attól, hogy milyen értelemben kívánjuk a csonkított függvény spektrumával legjobban megközelíteni az eredeti végtelen hosszú függvény spektrumát. Mint láttuk, az átlagnégyzetes kritérium szerint a négyyszögfüggvényt kell alkalmaznunk. Ismeretes azonban, hogy ha a dolgozat elején felsorolt bármelyik szűrő súlyfüggvényét csonkítjuk, ily módon nemkívánatos hatásokat tapasztalunk. Elromlik a sima átvitel, a levágási frekvencia közelében pedig az átviteli sávban pozitív, a kizárási sávban negatív „túllövés” tapasztalunk. Az utóbbi a Gibbs-féle jelenségként közismert (Bracewell, 1965). A pozitív túllövés bizonyos frekvenciák 9%-os kiemelését, a negatív ezenfelül bizonyos frekvenciájú jelek fázisfordítását is eredményezi.

Felvetődik a gondolat, hogy célszerű más kritérium szerint megvizsgálni azokat a függvényeket, melyeknek Fourier-transzformáltjai közelítőleg rendelkeznek a (11/b)–(11/c)-ben megjelölt tulajdonságokkal. Nem igényünk az egyenlőségek egzakt teljesülése, az időtartománybeli véges szélesség miatt a

Fourier-transzformált-pár frekvenciatartománybeli „szélessége” úgysem csökkenhet minden határon túl. Célunk csak az lehet, hogy a függvény és Fourier-transzformált párja egyszerre jól koncentrálódjanak az idő-, ill. frekvenciaorigó köré és $t \rightarrow \infty$ és $f \rightarrow \infty$ esetén igen gyorsan tartsanak 0-hoz.

Az energiakoncentrációt a következő módon jellemezhetjük (Fodor, 1967).

Legyenek $g(t)$ és $g(f)$ Fourier-transzformált párok. Írjuk fel a következő egyenlőséget:

$$\int_{-\frac{x}{2}}^{+\frac{x}{2}} g^2(t) dt = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t) dt, \text{ ahol } 0 \leq \eta \leq 1 \quad (12/a)$$

Az $x = x(\eta)$ értéket a $g(t)$ függvény η -szinten mért sáv szélességének nevezzük. (12/a) jelentése szemléletes. Azt jelenti, hogy a $g(t)$ függvény összenergiájának $\eta \cdot 100$ %-a koncentrálódik a $\left[-\frac{x}{2}, +\frac{x}{2}\right]$ intervallumba.

Hasonlóan mérhetjük az energiakoncentrációt a frekvenciatartományban is:

$$\int_{-\frac{Y}{2}}^{+\frac{Y}{2}} G^2(f) df = \eta \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(f) df \quad (12/b)$$

A továbbiakban csak szimmetrikus $g(t)$ függvényeket vizsgálunk. Szimmetrikus függvények Fourier-transzformáltja valós értékű, és a négyzetre-emelés miatt pozitív, így az abszolút érték jelét nem szükséges kitenni.

Az xy szorzatot a $g(t)$ függvény jósági tényezőjének nevezzük. Minél kisebb ez a szorzat, annál erősebb az energiakoncentráció mindkét tartományban, és annál alkalmasabb a függvény csonkításra.

A következő függvényeket vizsgáltuk meg:

Időtartomány:	Frekvenciatartomány:
$g_1(t) = e^{-\pi t^2}$	$G_1(f) = e^{-\pi f^2}$
$g_2(t) = e^{- t }$	$G_2(f) = \frac{2}{1 + (2\pi f)^2}$
1 ha $ t \leq 0,4$	
$g_3(t) = 10(0,5 - t)$ ha $0,4 < t \leq 0,5$	$G_3(f) = \sin c(0,2f) \sin c(0,9f)$
0 ha $ t > 0,5$	
$g_4(t) = 1$ ha $ t \leq 0,5$	$G_4(f) = \sin cf$
0 ha $ t > 0,5$	
$g_5(t) = 1 - 2(t)$ ha $ t \leq 0,5$	$G_5(f) = \frac{f}{2}$
0 ha $ t > 0,5$	

$$g_6(t) = e^{-|t|} \frac{\sin \cdot t}{t}$$

$$g_7(t) = e^{-|t|} \cos \pi t$$

$$g_8(t) = \begin{cases} \cos \pi t & \text{ha } |t| \leq 0,5 \\ 0 & \text{ha } |t| > 0,5 \end{cases}$$

$$g_9(t) = \begin{cases} 0,5 + 0,5 \cos \pi t & \text{ha } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{ha } |t| > 1 \end{cases}$$

$$g_{10}(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \pi t & \text{ha } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{ha } |t| > 1 \end{cases}$$

$$G_6(f) = \text{arc tg } \frac{1}{2(\pi f)^2}$$

$$G_7(f) = \frac{1}{1 + 4\pi^2(f + 0,5)^2} + \frac{1}{1 + 4\pi^2(f - 0,5)^2}$$

$$G_8(f) = \sin c(f + 0,5) + \sin c(f - 0,5)$$

$$G_9(f) = 0,5 \sin c f + 0,25 \sin c \left(f - \frac{1}{2} \right) + 0,25 \sin c \left(f + \frac{1}{2} \right)$$

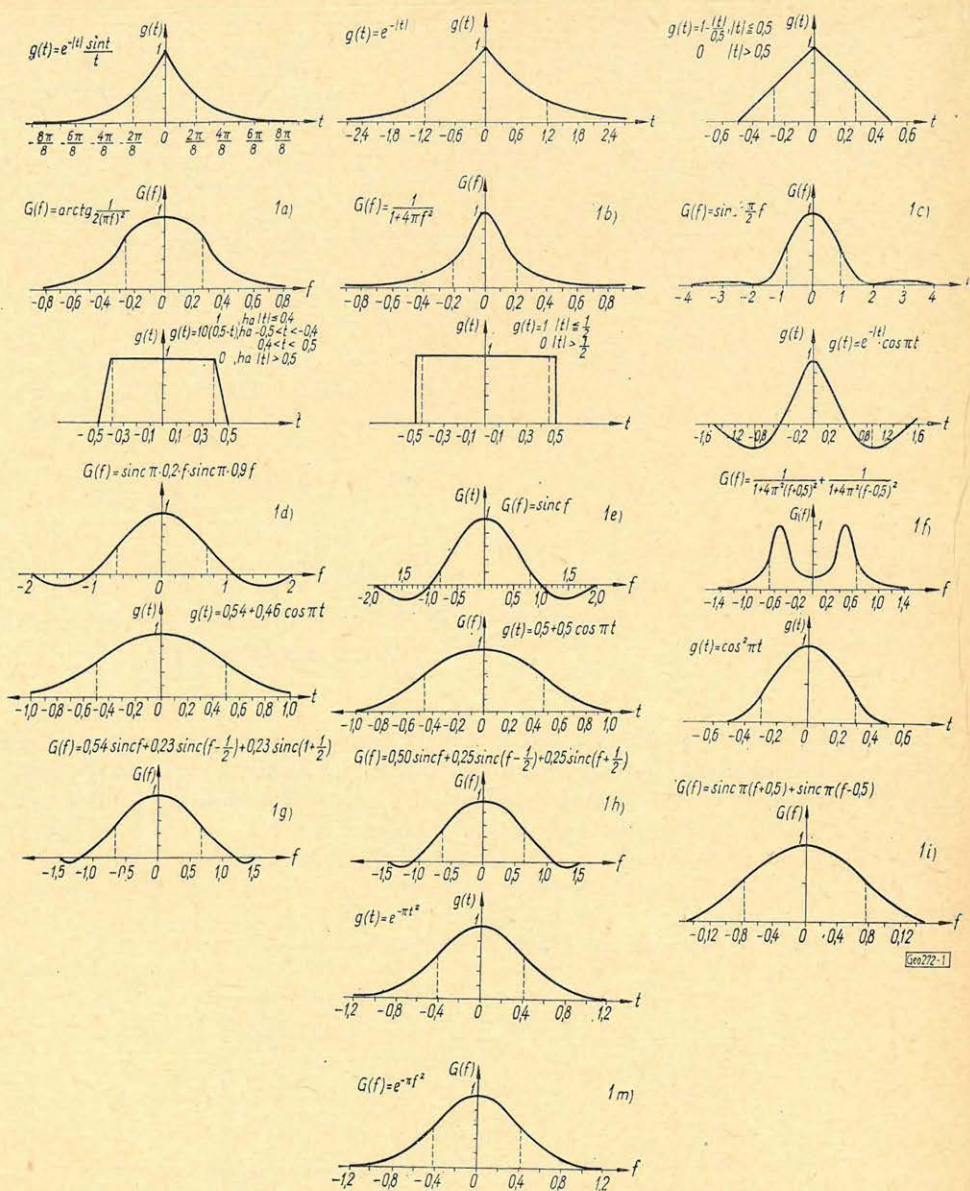
$$G_{10}(f) = 0,54 \sin c + 0,23 \sin c \left(f - \frac{1}{2} \right) + 0,23 \sin c \left(f + \frac{1}{2} \right)$$

A fenti $g_2(t)$ és $G_2(f)$ függvények-konstans szorzótól eltekintve, melyeknek az x és y sáv szélességek definíciója miatt nincs szerepük – egymás Fourier-transzformáltjai. A vizsgált ablakok között sok az irodalomban igen jól ismert. A $g_8(t)$ -t hanning, a $g_{10}(t)$ -t hamming-féle ablaknak is nevezik (Blackman-Tukey, 1958). A következő ábrákon (1. ábra) a fenti ablakokat mutatjuk be Fourier-transzformáltjaikkal. Szaggatott vonal jelzi a 90%-os szinten vett sáv szélességeket.

A vizsgálat eredményét az 1. táblázat mutatja.

	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	$x_1 y_1$ $\pi=0,71$	$x_2 y_2$ $\pi=0,9$	$x_3 y_3$ $\pi=0,99$
$e^{-\pi t^2}$	0,58	0,58	0,92	0,92	1,44	1,44	0,34	0,85	2,08
$e^{- t } \frac{\sin t}{t}$	1,0	0,3	1,78	0,5	3,18	1,14	0,30	0,89	3,64
$\cos \pi t, \text{ha } t < 0,5$ 0, ha $ t > 0,5$	0,4	1,02	0,58	1,54	0,8	2,36	0,41	0,83	1,89
$1-2 t , \text{ha } t < 0,5$ 0, ha $ t > 0,5$	0,34	1,11	0,54	1,68	0,78	2,60	0,38	0,91	2,04
$e^{- t }$	1,22	0,22	2,3	0,42	4,6	1,06	0,27	0,97	4,86
$\frac{1}{10(5+ t)}, \text{ha } 0 < t < 0,5$ 0, ha $ t > 0,5$	0,6	0,86	0,76	1,34	0,88	3,76	0,52	1,02	3,31
$\frac{1}{0}, \text{ha } t < 0,5$ 0, ha $ t > 0,5$	0,7	0,84	0,9	1,6	0,99	15,1	0,59	1,44	14,8
$e^{- t } \cos \pi t$	1,32	1,1	2,14	1,3	4,3	1,9	1,45	2,79	8,15
$0,5+0,5 \cos \pi t, \text{ha } t \leq 1$ 0, ha $ t > 1$	0,62	0,80	0,93	1,28	1,36	5,64	0,50	1,20	7,65
$0,54+0,46 \cos \pi t, \text{ha } t \leq 1$ 0, ha $ t > 1$	0,66	0,86	1,00	1,35	1,52	7,21	0,57	1,35	10,8

Gto 272-17



1 ábra. A megvizsgált csönkítőfüggvények és Fourier-transzformáltjaik. A szaggatott vonal jelöli az idő- és frekvenciatartománybeli sávszélességet 90%-os energiaszinten

Fig. 1. Графики исследованных режущих функций и их преобразования Фурье. Пунктирная линия показывает ширину полосы функции в области времён и частот на уровне энергии 90%

Fig. 1. Die untersuchten Abstumpfungsfunktionen und ihre Fourier-Transformierten. Die gebrochene Linie bezeichnet die Bandbreite im Zeit- bzw. Frequenzbereich im Falle eines 90%-igen Energieniveaus

Három különböző η értéket választottunk, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 0,9; 0,99. Látható,

hogy különböző η értékekhez különböző sorrend tartozik, az osztályozás nem egyértelmű. Két észrevételt tehetünk. A kritérium szerint a négyszögimpulzus nem tartozik a javasolt csonkítófüggvények közé, másrészt a táblázat ráírnyítja a figyelmet más függvényekre, melyeknek jósági tényezője mind a három szinten a legjobbak közé tartozik.

Ha úgy tesszük fel a kérdést, hogy adott hosszúságúra milyen függvénnyel csonkítsunk egy másik függvényt vagy adatrendszer, a következőt válaszolhatjuk. Ha a csonkítandó függvény az adott intervallumon belül jól lecseng, majdnem közömbös, hogy a felsoroltak közül mivel csonkítunk, ha nem, célszerű nem egyforma súlyokkal figyelembe venni a középponttól távolabb eső függvényértékeket, hanem valamilyen – például háromszög, Gauss-féle vagy cosinus-csonkítófüggvényt alkalmazni.

Csonkítófüggvények alkalmazása

Numerikus első derivált számítása

Bemutatunk egy igen gyorsan csökkenő együtthatókkal rendelkező operátort, melynél nem játszik fontos szerepet a csonkítás módja. Az operátor működését egy egyszerű példával lineáris függvény adatrendszerének deriválásával szemléltetjük. Ismeretes [Meskó, 1969], hogy az első deriváltat előállító antiszimmetrikus operátor általános tagja:

$$C_{l-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi\tau} \frac{(-1)^l}{(2l-1)} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

A differenciálható lineáris függvényt leíró digitális adatrendszer

$$Y_i = m i \tau + b \quad i = -\infty \dots -1, 0, +1, \dots +\infty \quad (14)$$

Ha az i indexet úgy választjuk, hogy $i = l - \frac{1}{2}$ legyen, ahol $l = 1, \pm 2, \dots$, akkor:

$$Y_{l-\frac{1}{2}} = m \left(l - \frac{1}{2} \right) \tau + b.$$

A kimenő adatrendszer:

$$z_{k-\frac{1}{2}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} C_{l-\frac{1}{2}} \cdot Y_{\left(k-\frac{1}{2}\right) - \left(l-\frac{1}{2}\right)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (15)$$

(15)-be beírva (13)-at és (14)-et:

$$\begin{aligned} z_{k-\frac{1}{2}} &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\pi\tau} \frac{(-1)^l}{(2l-1)^2} \left\{ m\tau \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) - \left(l - \frac{1}{2} \right) \right] + b \right\} \\ &= \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{4m}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{(2l-1)^2} + \frac{4b}{\pi\tau} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{(2l-1)^2} + \\ &\quad + \frac{4m}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{(2l-1)^2} \left(l - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

A jobb oldal első szummája zérus. Ez azt jelenti, hogy a derivált értéke k -tól független, azaz az operátort akárhová „helyezhetjük” az egyenes mentén, a derivált értéke nem változik. A második szumma szinten zérus. Ez azt jelenti, hogy konstans deriváltja nulla. Nullát kapunk véges hosszúságú operátor alkalmazása esetén is, az operátor antiszimmetrikus tulajdonsága miatt, feltéve, hogy egyenlő számú pozitív és negatív indexű együtthatót alkalmazunk. Az egyenes deriváltjának értékét a harmadik tag adja meg.

Írjuk át ezt a következőképpen:

$$\begin{aligned} \frac{4m}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{(2l-1)^2} \left(l - \frac{1}{2} \right) &= m \frac{2}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{(2l-1)} (2l-1) = \\ &= m \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{2l-1} \right\} = m \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] = m \end{aligned} \quad (17)$$

Az egyenes deriváltja tehát m , függetlenül a mintavételezési távolságtól, amint az várható volt.

Véges hosszúságú operátor az m -nek csak jó közelítését adja. Az operátor igen gyorsan cseng le:

$$\begin{aligned} C_{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{9} \\ C_{-\frac{1}{2}} &= -1 \\ C_{\frac{1}{2}} &= 1 \\ C_{\frac{3}{2}} &= -\frac{1}{9} \\ C_{\frac{5}{2}} &= \frac{1}{25} \end{aligned} \quad (18)$$

Emiatt igen rövid operátorral pontos deriválást hajthatunk végre, függetlenül attól, hogy milyen függvénnyel csonkítottunk. Például, ha az operátor 20 adat hosszúságú, a derivált értéke m helyett $0,968 m$. Lényegesebb szerepet kap a csonkítás módja a következő alkalmazásban.

Egysatornás frekvenciaszűrők tervezése

A különböző sávszűrők átviteli tulajdonságainak megfelelő csonkítófüggvény választásával történő javítását fogjuk tárgyalni.

Röviden idézzük az egyes ideális és csonkított szűrők súlyfüggvényeinek és átviteli függvényeinek képleteit.

Felülvágó szűrő:

ideális:

$$\text{átviteli függvény: } N_f(f) = 1 \text{ ha } (f) \leq \frac{F}{2}$$

$$0 \text{ ha } (f) > \frac{E}{2} \quad (19)$$

$$\text{súlyfüggvény: } n_f(t) = F \text{ sinc } Ft$$

csenkített:

$$\text{átviteli függvény: } N_{fcs}(f) = N_f(f) * G(f) \quad (20)$$

$$\text{súlyfüggvény: } n_{f, cs}(t) = n_f(t) \cdot g(t)$$

Az addíciós tétel kimondja, hogy ha:

$$\begin{aligned} F[h_1(t)] &= H_1(f) \\ F[h_2(t)] &= H_2(f) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{akkor: } F[h_1(t) \pm h_2(t)] = H_1(f) \pm H_2(f)$$

Ennek felhasználásával előállíthatjuk a megfelelő alulvágó szűrő átviteli függvényeit és súlyfüggvényeit.

Alulvágó szűrő:

ideális:

$$\text{átviteli függvény: } N_a(f) = 1 - N_f(f) \quad (22)$$

$$\text{súlyfüggvény: } n_a(t) = \delta(t) - n_f(t)$$

csenkített:

$$\text{átviteli függvény: } N_{a, cs}(f) = [1 - N_f(f)] * G(f) \quad (23)$$

$$\text{súlyfüggvény: } n_{a, cs}(t) = [\delta(t) - n_f(t)]g(t)$$

Ismeretes az eltolási tétel, mely szerint, ha

$$F[h(t)] = H(f) \quad (24)$$

$$\text{akkor } F[h(t \pm \tau)] = H(f)e^{\pm j\omega\tau}$$

A tétel segítségével és (19) felhasználásával tervezhető a sáváteresztő szűrő.

Sáváteresztő szűrő:

ideális:

$$\text{átviteli függvény: } N_s(f) = N_f(f - F_0) + N_f(f + F_0)$$

$$\text{súlyfüggvény: } n_s(t) = n_f(t)e^{-j\omega F_0} + n_f(t)e^{j\omega F_0} = \quad (25)$$

$$\text{csenkített: } = 2 \cos 2\pi F_0 t \cdot n_f(t)$$

$$\text{átviteli függvény: } N_{s, cs}(f) = [N_f(f - F_0) + N_f(f + F_0)] * G(f)$$

$$\text{súlyfüggvény: } n_{s, cs}(t) = 2 \cos 2\pi F_0 t \cdot n_f(t) \cdot g(t) \quad (26)$$

Ismét felhasználva az addíciós-tételt, valamint (19)-et a sáv- vagy lyukszűrő átviteli függvénye és súlyfüggvénye megadható.

Lyukszűrő:

ideális:

$$\text{átviteli függvény: } N_l(f) = 1 - N_f(f - F_0) - N_f(f + F_0)$$

$$\text{súlyfüggvény: } n_l(t) = 1 - 2 \cos 2\pi F_0 t \cdot n_f(t) \quad (27)$$

csökkentett:

$$\text{átviteli függvény: } N_{l,cs}(f) = [1 - N_f(f - F_0) - N_f(f + F_0)] * G(f)$$

$$\text{súlyfüggvény: } n_{l,cs}(t) = [1 - 2\cos 2\pi F_0 t n f(t)] \cdot g(t) \quad (28)$$

A fenti képletekben $g(t)$ az alkalmazott csökkentőfüggvény, $G(f)$ a csökkentőfüggvény Fourier-transzformáltja.

Mint láttuk, az átlagnégyzetes kritérium a

$$g(t) = 1 \quad \text{ha} \quad (t) \leq \frac{T}{2}$$

$$= 0, \quad \text{ha} \quad (t) > \frac{T}{2}$$

$$G(f) = T \sin c T_f$$

függvényt mutatta legalkalmasabbnak. Új kritériumunk szerint vannak ennél jobb csökkentőfüggvények is, ezek közül azonban nem választott ki határozottan egyet. Azért, hogy dönthessünk valamelyik csökkentőfüggvény mellett, figyelembe kell vennünk még egy szempontot.

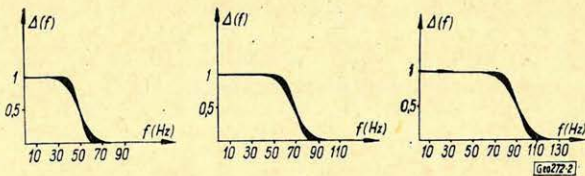
A fenti ideális szűrők mind zérus fáziseltolásúak. Ugyanis átviteli függvényük valós és nem negatív. (A szűrő azokon a frekvenciákon, melyeken valós átviteli függvénye negatív, fázist fordít.) Ha a $g(t)$ csökkentőfüggvény $G(f)$ spektruma – bár $g(t)$ páros volta miatt valós – bizonyos frekvenciákon negatív, a konvolúció eredményeképpen kapott átviteli függvény is lehet negatív. Célszerű ezért olyan csökkentőfüggvényt választani, melynek Fourier-transzformáltja mindenütt pozitív. Ily módon a csökkentett súlyfüggvényű szűrő is zérus fázisú marad. A megvizsgáltak és a jósági kritérium szerint alkalmasnak találtak közül ilyen a

$$g(t) = e^{-at^2}$$

$$G(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \quad (29)$$

Mint a (16), (19) és (21) képletek mutatják, az összes átviteli és súlyfüggvény előállítható (13), ill. (14) felhasználásával. A felülvágó szűrő jó vagy rossz átviteli tulajdonságait így módon örökölni fogja a belőle konstruált többi típus.

A (29) csökkentőfüggvény felhasználásával kaptuk a 2. ábrán látható átviteli függvényeket. A levágási frekvenciák: 50 Hz, 70 Hz és 90 Hz. Mindhárom esetben öt különböző vágási meredekségű szűrőt mutatunk be. A vágás meredekségét az a paraméterrel szabályozhatjuk.



2. ábra. Felülvágó szűrő átviteli függvényei. Levágási frekvenciák: 50 Hz, 70 Hz, ill. 90 Hz

Фиг. 2. Функции передачи фильтра нижних частот. Частоты среза: 50 гц, 70 гц, 90 гц

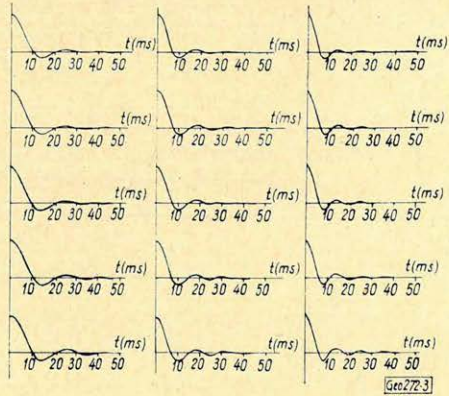
Fig. 2. Überführungsfunktionen eines Tiefpassfilters. Abschneidefrequenzen: 50 Hz, 70 Hz, bzw.

90 Hz

3. ábra. A 2. ábrán látható átviteli függvényekhez tartozó Gauss-féle függvényekkel csontkított súlyfüggvények. Hosszuk 99 msec

Фиг. 3. Весовые функции, срезаемые функцией Гаусса, функций передачи, показанных на фиг. 2. Длина функций 99 msec

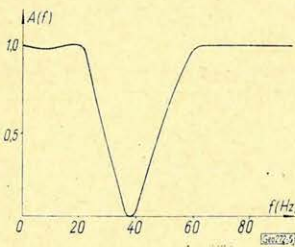
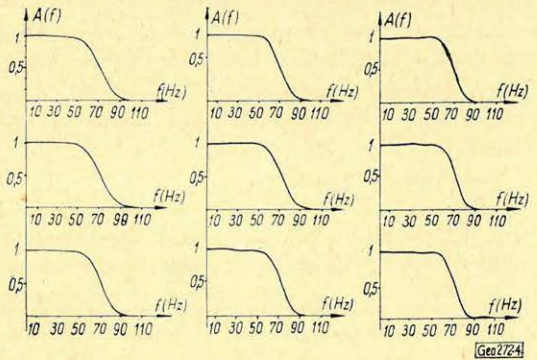
Fig. 3. Die mit der zu den Übertragungsfunktionen der Abb. 2 gehörigen Gauss-Funktion abgestumpften Gewichtsfunktionen. Länge: 99 msec



4. ábra. 70 Hz levágási frekvenciájú felül-vágó szűrők átviteli függvényei 69 msec, 74 msec és 89 msec-os súlyfüggvényhossz mellett

Фиг. 4. Функции передачи фильтров нижних частот, при срезе в 70 гц. Длина весовой функции 69 msec, 74 msec, 89 msec

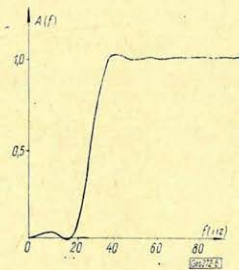
Fig. 4. Übertragungsfunktionen von Tiefpassfiltern mit einer Abschneidefrequenz von 70 Hz, Gewichtsfunktionslänge: 69 ms, 74 ms und 89 ms



5. ábra. Sávvágó szűrő átviteli függvénye. A kiszűrt sáv középpontja 50 Hz, szélessége 20 Hz. Súlyfüggvényhossz: 99 msec

Фиг. 5. Функция передачи режекторного фильтра. Центр полосы задержки 50 гц, ширина полосы 20 гц, при длине весовой функции 99 msec

Fig. 5. Übertragungsfunktion eines Bandfilters. Mittelpunkt des ausgefilterten Bandes: 50 Hz, Breite 20 Hz.



6. ábra. Alulvágó szűrő átviteli függvénye. A kiszűrt sáv 0 Hz - 30 Hz. Súlyfüggvényhossz 99 msec.

Фиг. 6. Функция передачи фильтра верхних частот. Полоса фильтрации 0 гц - 30 гц. Длина весовой функции 99 msec

Fig. 6. Übertragungsfunktion eines Hochpassfilters. Ausgefiltertes Band: 0 - 20 Hz. Länge der Gewichtsfunktion: 99 ms

A súlyfüggvényeket a 3. ábrán mutatjuk be. Hosszuk 99 msec.

A 4. ábrán 50, ill. 70 Hz felvágási frekvenciájú felülvágó szűrő átviteli függvényei láthatók 69 msec, 79 msec, 89 msec hosszúságú súlyfüggvényből számítva.

Az 5. ábrán sáv-vágó szűrő átviteli függvényét látjuk. A kiszűrt frekvenciasáv középpontja 40 Hz, a sáv szélesség 20 Hz. Súlyfüggvényhossz: 99 msec.

A 6. ábrán alulvágó szűrő átviteli függvényét mutatjuk be. A kiszűrt frekvenciasáv 0 Hz és 30 Hz közé esik. Súlyfüggvényhossz: 99 msec.

Összefoglalás

Az ún. Gauss-féle függvényt csonkítófüggvényként alkalmazva a dolgozat elején felsorolt szűrők súlyfüggvényeire, ez az ilyen típusú szűrőknél rövidnek számító súlyfüggvényekhez az ideálist igen jól közelítő átviteli függvény megvalósítását teszi lehetővé.

Szűrőtervezéskor alul-, ill. felülvágó szűrőnél kettő, sáv-, ill. lyukszűrőnél 3 paramétert kell megadnunk. Az első esetben az áteresztési, ill. kiszűrés tartomány szélességét megadó F értékét és a csonkítófüggvény „ a ” paraméterét. A második esetben a sáv szélességet megadó F mellett a kiszűrt, ill. átengedett frekvenciasáv középpontját definiáló F_0 érték is rögzítendő, valamint „ a ” értéke, melynek megfelelő választásával állíthatjuk be a vágási meredekséget.

IRODALOM

- R. B. Blackman – J. W. Tukey, 1958: The Measurement of Power Spectra. New York, Dover.
R. Bracewell, 1965: The Fourier Transform and its Applications. New York, McGraw-Hill Book Co, Inc.
Fodor György, 1967: Lineáris rendszerek analízise. Műszaki Könyvkiadó.
Meskó Attila, 1969: Digitális feldolgozás matematikai alapjai. II. kötet, NIMDOK.

Lapszemle

A „Bányászati és Kohászati Lapok – Kőolaj és Földgáz” 3. (103) évf. 1970. áprilisi ünnepi számának geofizikai szempontból érdeklődésre számottartó cikkei:

Gyulay Zoltán: Emlékezés (97. old.)

Bese Vilmos – Bándi József: A magyar szénhidrogénipar gazdasági fejlődése a felszabadulás óta (101–103. old.).

Dank Viktor – Patsch Ferenc: A magyar szénhidrogén-kutatás és -feltárás 25 éve (104–109. old.).

Rövid és teljességre igényt nem is tartó összefoglalása az elmúlt 25 év szénhidrogén-feltárási munkálatainak. A cikk több helyen kitér ugyan a kutatás tudományos részére („elő kutatás” névvel), de pl. az ELGI szerepéről sehol sem tesz említést.

A cikket 20 irodalmi hivatkozás egészíti ki.

*

A „Bányászati és Kohászati Lapok – Bányászat 3. (103.) évf. 3. szám 1970. márciusi számának geofizikai szempontból érdekes cikkei:

Benedek Dénes – Bohus Géza: Korszerű robbantástechnológiák kialakítása a Budapesti Földalatti Vasút munkahelyein (172–183 old.).

Geofizikai szempontból érdekes az az összeállítás, mely a terület földtani felépítését tünteti fel a mélység-szelvény grafikus ábrázolásával együtt.