A DIPÓLUS ÉS A QUADRUPÓLUS HELYZETE A MÁGNESES KÖZÉPPONT ORIGÓJU KOORDINÁTARENDSZERBEN

Zilahi-Sebess László

A földmágneses tér fő részét jellemző Gauss-féle sor alakja, ha csak belső hatókat tételezünk fel

$$1.\quad V = R \sum_{n=1}^{\infty} V_n\,(r, \vartheta, \lambda), \text{ ahol}$$

$$2.\quad V_n = \sum_{m=0}^{n} (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda)\, P_n^m (\cos\vartheta)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1},$$

ahol λ a Greenwichtől keletre számitott földrajzi hosszuság, ϑ a csillagászati északi saroktól számitott pólustávolság, r a Föld középpontjától mért távolság, R a gömbnek tekintett Föld sugara (amelyen belül helyezkednek el a feltételezett hatók). $P_n^m (\cos\vartheta)$ az n-ed foku és m-ed rendü asszociált függvény.

A Gauss-féle sor a földmágneses tér skaláris potenciálfüggvényét elméleti multipólusok potenciálfüggvényeinek összegeként állitja elő (dipólus, quadrupólus, oktupólus stb.).

Az n-ed rendü multipólus potenciálját a

$$\Phi_n = C\, \frac{\partial^n}{\partial l_1 \ldots \partial l_n} \left(\frac{1}{r}\right)$$

függvény állitja elő, ahol

$$3.\quad \frac{\partial}{\partial l_i} = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} + \beta_i \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial z}$$

differenciál-operátor s az α_i, β_i, γ_i a multipólus tengelyeinek iránycosinusai.

A legegyszerübb multipólus a dipólus. A Gauss-féle sor V_1 részletösszege egy centrikus dipólus potenciálterét irja le. A g_1^0, g_1^1 és h_1^1 együtthatók arányosak a dipólus nyomatékának összetevőivel.

Lényegesen nehezebb meghatározni a V_2 függvényből a quadrupólus két tengelyének iránycosinusait és a momentumát.

A quadrupólus tengelyeinek iránycosinusait meghatározhatjuk ugy, hogy elvégezzük a quadrupólus potenciálfüggvényét előállitó

$$4.\quad \Phi_2 = C \frac{\partial^2}{\partial l_1\, \partial l_2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

kifejezésben a parciális differenciálásokat s az eredményt a gömbfüggvények szerinti sorba rendezzük, majd a V_2 együtthatóval való összehasonlitás után másodfoku egyenleteket irhatunk fel az iránycosinusok és az észlelési adatokból adódó gömbfüggvény-együtthatók közt.

A fenti eljárással nyert másodfoku egyenletrendszer megoldása nem egyszerü feladat. Célszerü a V_2 függvényt olyan koordináta-rendszerbe áttranszformálni, ahol ez a feladat már egyszerüen végezhető el.

Ha a V_2 függvényt adott r érték mellett vizsgáljuk (pl. $r = R$) s a polárkoordináták helyett derékszögüeket vezetünk be, homogén másodfoku függvényt nyerünk. Határozzuk meg a V_2-höz, mint homogén másodfoku függvényhez tartozó saját vektorokat, a főtengely-transzformáció segitségével. A saját vektorok páronként merőlegesen egymásra s koordinátarendszerükben a quadratikus alaknak csupán a tiszta másodfoku tagjai léteznek s az együtthatók a megfelelő saját értékek.

Az igy választott koordinátarendszerben a quadrupólus tengelyek iránycosinusaira és a quadrupólus nyomatékra adódó másodfoku egyenletrendszer igen egyszerüen megoldható s a V_2-höz rendelt quadratikus alak saját értékeinek a segitségével az alábbi módon kifejezhető:

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 \sqrt{\frac{c_1}{c_1 - c_2}} \quad ; \quad \bar{\beta}_1 = -\bar{\beta}_2 = \sqrt{\frac{c_2}{c_2 - c_1}}$$

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0$$

$$5.\quad M = \frac{p^{(2)}}{r^3} = \frac{2}{3}\left(\lambda_1 - \lambda_2\right),$$

ahol

$$c_1 = \frac{4}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2$$

$$c_2 = \frac{2}{3}\lambda_1 + \frac{4}{3}\lambda_2$$

s λ_1, λ_2 a quadratikus alak maximális és minimális saját értékei.

(A felülvonás azt jelzi, hogy az iránycosinusok a sajátvektoru koordinátarendszerben értendők.)

Igen fontos feltétel, hogy c_1 és c_2 előjele különböző kell legyen.

A harmadik, abszolut értékben minimális saját értékhez tartozó saját vektor merőleges a quadrupólus tengelyek sikjára.

Az 5. összefüggések alapján belátható, hogy a quadrupólus tengelyek által bezárt szögek szögfelezői a maximális, ill. minimális saját értékekhez tartozó saját vektorok.

Ha a quadrupólus tengelyek iránycosinusait a szokásos koordinátarendszerben meg akarjuk kapni, csupán egy ortogonális transzformációt kell alkalmazni. A transzformációs mátrix elemei az egységnyi hosszuságu saját vektorok koordinátái.

Ha a fent vázolt gondolatmenet szerint eljárva kiszámitjuk a különböző sorfejtések adataiból a quadrupólus és a dipólus tengelyek által bezárt szögeket, különböző értékeket kapunk.

A P.Mauersberger (7) és a H.Fritsche (6) által végzett gömbfüggvény-sorfejtések együtthatóinak segitségével kiszámitottam a quadrupólus tengelyek és saját vektorok iránycosinusait.

Az ábrázolásnál, minthogy közel ugyanazon időpontokra vonatkozó potenciálsorfejtést többet is végeztek, csupán azt a tartományt tüntettem fel, amelyen belül estek a megoldások. Ezeknek a tartományoknak a nagysága a megbizhatóság mértékéül szolgálhat, s rámutat arra, hogy az eredményeket kritikával kell fogadni.

Már pusztán az a tény, hogy a gömbfüggvény-együtthatókat 3 - 4 jegy pontossággal állapitották meg, magában foglalja azt, hogy a meghatározott értékekhez meglehetősen nagy hibahatár tartozik. Ezt a hibahatárt, tekintettel arra, hogy az eredményhez harmadfoku és kétismeretlenes lineáris egyenletek megoldásával jutunk, igen nehéz meghatározni pontosan.

A nyert eredmények ábrázolásánál nullkörrel jelöltem egy adott sorfejtésből adódó pontot, illetve értéket.

A kör és a téglalap-alaku tartományok mellett álló számok időbeli sorrendet jelentenek.

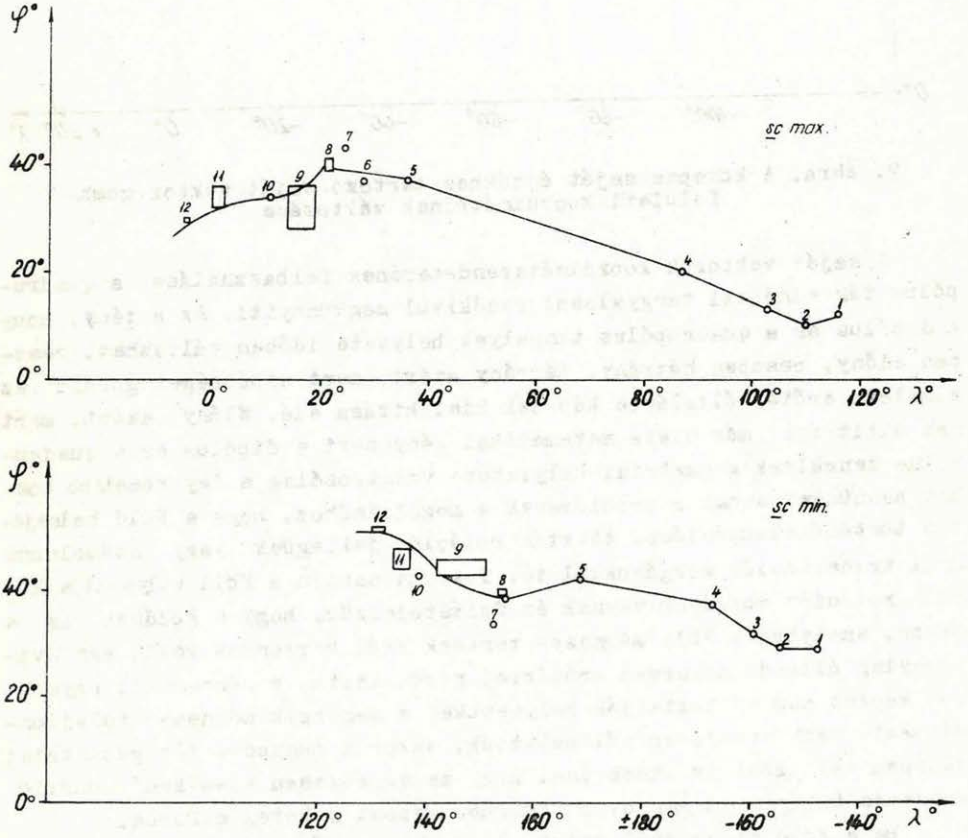
A számok a következő sorfejtésekre utalnak:

1. Fritsche	1550	8. Fritsche	1842
2. "	1600	Adams	1845 IV.
3. "	1650	"	1845 VI.
4. "	1700	9. Qu.Icilius	1880
5. "	1780	Adams	1880 VI.
6. Erman, Petersen	1829	"	1880 IV.
7. Gauss	1835	Neumayer	1885

Schmidt	1885 IV.	11.	Dyson. Furner	1922	(X,Y)
"	1885 VI.		" "	1922	(Z,80)
"	1885 II.		" "	1922	(Z,60)
Fritsche	1885	12.	Vestine	1945	
10. Fritsche	1900		Afanasieva	1945	

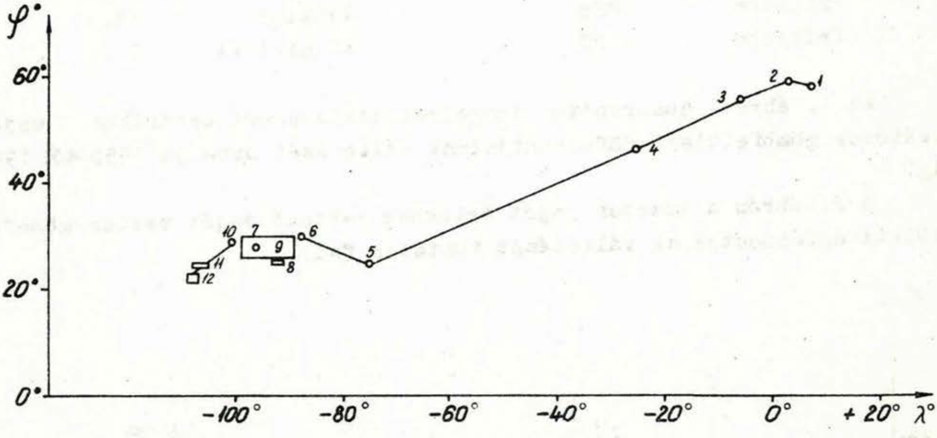
Az 1. ábra a quadrupólus tengelyek sikjába eső centrikus saját vektorok gömbfelületi döféspontjainak változását mutatja 1550-től 1945-ig.

A 2. ábrán a közepes saját értékhez tartozó saját vektor gömbfelületi döféspontjának változását tüntetem fel.



1. ábra. A maximális és minimális saját értékhez tartozó saját vektorok gömbfelületi koordinátáinak változása

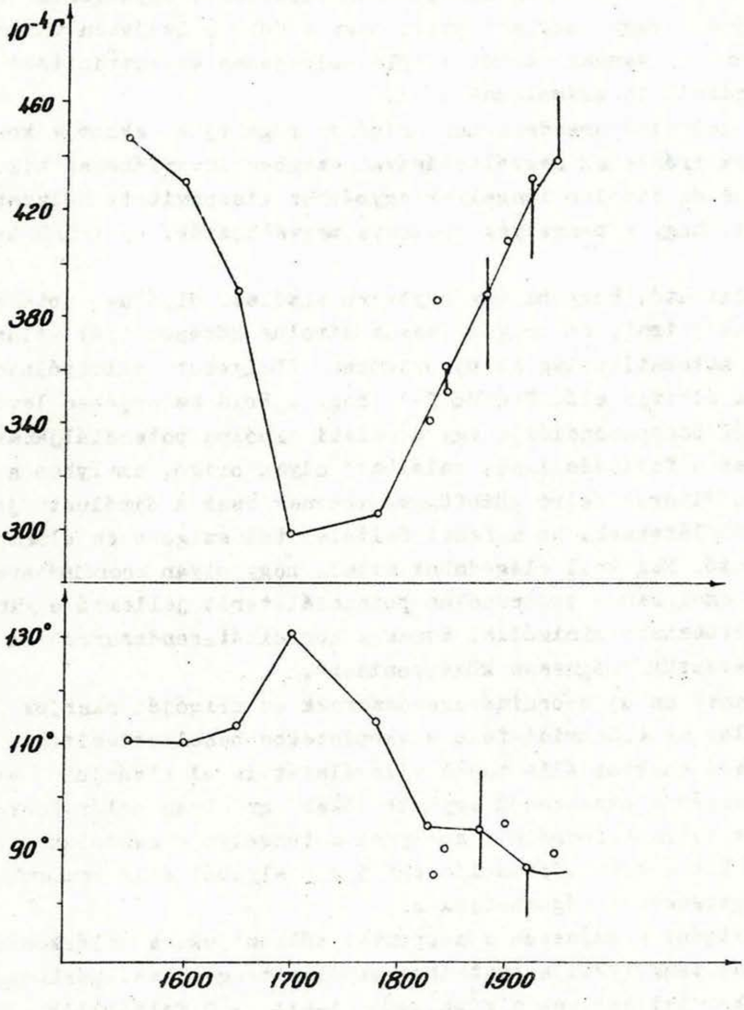
A 3. ábrán a centrikus quadrupólus momentumának és a quadrupólus tengelyek egymással bezárt szögének a változása látható.



2. ábra. A közepes saját értékhez tartozó saját vektor gömbfelületi koordinátáinak változása

A saját vektorok koordinátarendszerének felhasználása a quadrupólus tér elméleti tárgyalását rendkivül megkönnyiti. Az a tény, hogy a dipólus és a quadrupólus tengelyek helyzete időben változhat, részben előny, részben hátrány. Hátrány azért, mert nehézséget gördit az elméleti erőtér általános képének kialakitása elé. Előny azért, mert nem állit fel már eleve matematikai kényszert a dipólus és a quadrupólus tengelyek geometriai helyzetére vonatkozólag s igy közelebb hozhat bennünket annak a problémának a megoldásához, hogy a Föld belsejében történő elmozdulások tisztán rotációs jellegüek vagy számolnunk kell transzlációs mozgásokkal is. T.i. ha csupán a Föld sulypontja körüli rotációs mozgások vannak és feltételezzük, hogy a Földnek az a része, amelyben a Föld mágneses terének okát keresnünk kell, egy viszonylag állandó mágneses erőtérrel rendelkezik, s részecskéi egymáshoz képest nem változtatják helyzetüket s megőrzik mágneses tulajdonságukat, vagy arányosan változtatják, akkor a mágneses tér geometriai képében változást az okozhatna, hogy az egységesen viselkedő önálló mágneses tulajdonsággal biró tömeghez képest a kéreg elforog.

Ha a Föld belsejéből származó mágneses erőtér állandó, akkor állandó kell legyen a potenciál sorfejtésből kiolvasható dipólus és quadrupólus tengelyek egymáshoz való viszonya is. Ha a tengelyek helyzete változik, az eltérések mértékétől függően, a kiinduló alapelgon-



3. ábra. A centrikus quadrupólus nyomatékának időbeli változása. A centrikus quadrupólus tengelyek által bezárt szög változása

dolásunkat cáfolja meg, tehát vagy azt, hogy az anyagi tömeg, amely önálló mágneses térrel rendelkezik nem viselkedik egységesen rotáció szempontjából, vagy amellett szól, hogy a Föld belsejében transzlációs elmozdulások is vannak, tehát a Föld belsejében excentricitást előidéző mozgással is számolnunk kell.

Ha a koordinátarendszerünk origóját rögzitjük, akkor a koordinátatengelyek irányának megváltozásával szemben invariánsnak bizonyul a quadrupólus és dipólus tengelyek egymáshoz viszonyitott helyzete. Ahhoz tehát, hogy a tengelyek viszonya megváltozzék, uj origót kell választani.

Kimutatható, hogy ha egy egyszerü elméleti dipólus potenciálterét akarjuk leirni, de origóul nem a dipólus középpontját választjuk, akkor azt matematikailag az uj origóban elhelyezett multipólusok végtelen sora állitja elő. Tegyük fel, hogy a Föld belsejében levő mágneses hatók összpotenciálja egy elméleti dipólus potenciáljának felel meg. Ha ez a feltevés igaz, található olyan origó, amelyben a mágneses potenciálteret leiró gömbfüggvénysornak csak a dipólust jellemző együtthatói léteznek. Ez a fenti feltétel tul szigoru és általában nem teljesithető. Meg kell elégednünk azzal, hogy olyan koordinátarendszert keresünk, amelyben a quadrupólus potenciál-terét jellemző együtthatóknak négyzetösszege minimális. Ennek a koordinátarendszernek a középpontját nevezzük "mágneses középpontnak".

Ha ennek az uj koordinátarendszernek az origóját akarjuk kiszámitani, elég az A.Schmidt-féle végképletekbe behelyettesiteni, de ha a fennmaradó szektoriális tagok vizsgálatát is el kivánjuk végezni, akkor célszerü a másodrendü együtthatókat egy olyan polár-koordinátarendszerbe áttranszformálni, amelynek a tengelye a centrikus dipólus tengelye. Ezt a transzformációt egy 5 x 5 elemből álló transzformációs mátrix segitségével végezhetjük el.

Ha origóul a mágneses középpontot választjuk, s polárkoordinátarendszerünk tengelyéül a centrikus dipólus tengelyével párhuzamos irányt, akkor teljesülnek a $g_1^1 = h_1^1 = g_2^0 = g_2^1 = h_2^1 = 0$ feltételek. A polárkoordinátarendszer tengelye körüli elforgatással elérhető az is, hogy a $g_2^2 \cdot h_2^2 = 0$ feltétel is teljesül.

Ha $g_2^2 \cdot h_2^2 \neq 0$, akkor a saját vektorok az origón átfektetett és a dipólusra merőleges sik, valamint a

$$\varphi_1 = \text{arc tg} \frac{h_2^2}{g_2^2 + \sqrt{(g_2^2)^2 + (h_2^2)^2}}$$

ill.

$$\varphi_2 = \text{arc tg} \frac{h_2^2}{g_2^2 - \sqrt{(g_2^2)^2 + (h_2^2)^2}}$$

szögekkel megadott meridiánsikok metszésvonalaiba esnek.

Kimutatható, hogy ha $g_2^2 \neq 0$, de $h_2^2 = 0$, akkor a quadrupólus tengelyek a koordináta tengelyekkel 45^o-os szöget zárnak be. Ha $h_2^2 \neq 0$ és $g_2^2 = 0$, akkor a koordináta tengelyek a quadrupólus és a dipólus tengelyek.

A saját vektorok ortogonális rendszere a multipólus tengelyekhez képest a dipólus tengely körül 45^o-kal el van forgatva.

A Föld mágneses középpontjára vonatkoztatva is kiszámitottam a saját vektorok és quadrupólus tengelyek iránycosinusait. A nyert eredményeket tünteti fel a 4., 5. és 6. ábra. Itt az iránycosinusok olyan koordinátarendszerben értendők, amelynek az origója a mágneses középpont és tengelyei a szokásos földrajzi koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamosak.

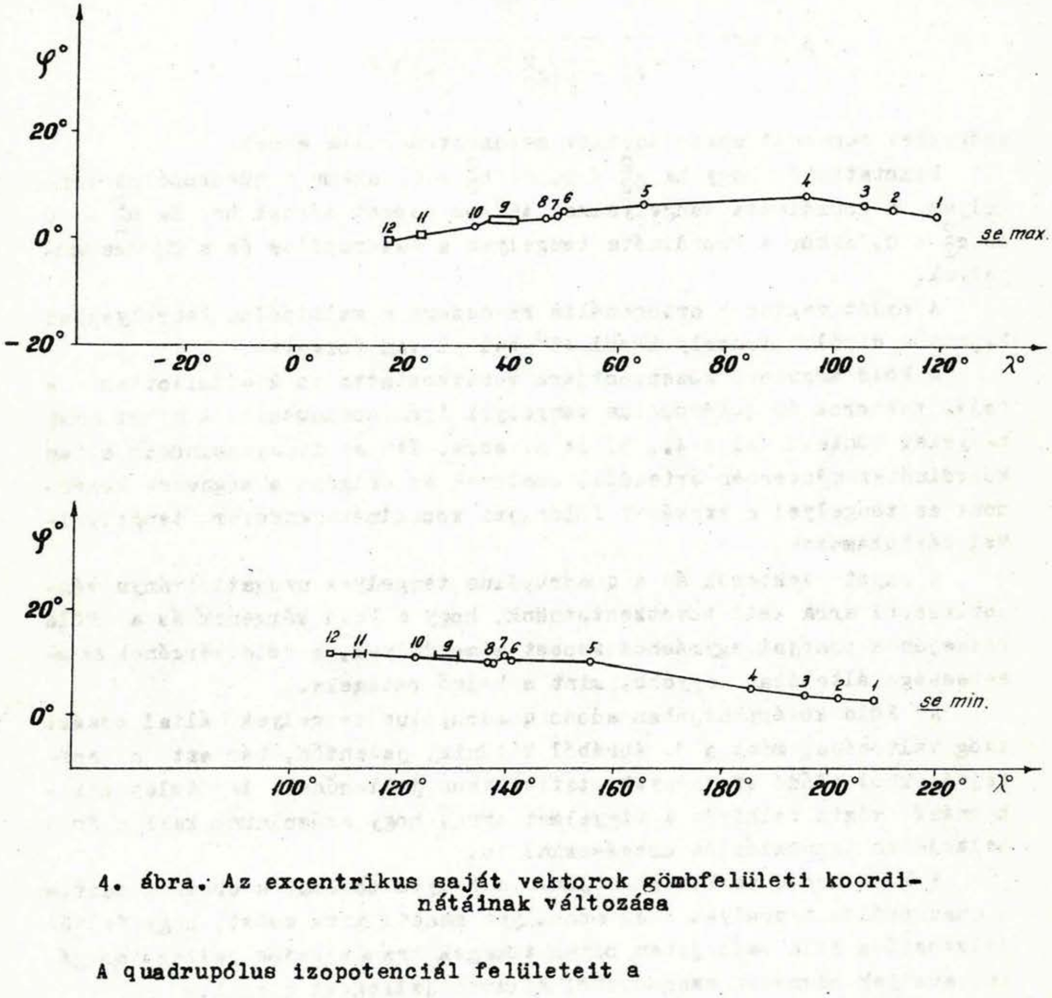
A saját vektorok és a quadrupólus tengelyek nyugati irányu vándorlásából arra kell következtetnünk, hogy a Föld kérgének és a Föld belsejének pontjai egymáshoz képest elmozdulnak, a Föld kérgének szögsebessége általában nagyobb, mint a belső rétegeké.

A Föld középpontjában adódó quadrupólus tengelyek által bezárt szög változása, mint a 3. ábrából kitünik, jelentős, bár azt a sorfejtésekből adódó eredmények statisztikus jellegének is tulajdonithatnánk, mégis felhivja a figyelmet arra, hogy számolnunk kell a Föld belsejében transzlációs mozgásokkal is.

A Föld mágneses középpontjának a helyváltozása, s ebben a pontban a quadrupólus tengelyek elég szabályos menete arra mutat, hogy feltételezhető a Föld belsejében olyan tömegek transzlációs jellegü mozgása, amelyek mágneses szempontból állandó jelleggel birnak.

Az a kérdés, hogy van-e transzlációs mozgás a Föld belsejében, nem dönthető el csupán a földmágneses potenciálsorok vizsgálataival, meg kell vizsgálni a kérdést más mérési adatokból kiindulva is. Célravezetőnek látszik a szeizmológiai adatok vizsgálata abból a szempontból, hogy nem mutatnak-e ezek az adatok a Föld belsejének excentrikus felépitésére. Ezekhez a vizsgálatokhoz célszerünek látszik szintén a gömbfüggvények felhasználása.

Minthogy mindig elérhetjük azt, hogy a gömbfüggvénysor másodrendü tagjai közül csupán a $g_2^2 \neq 0$, elegendő erre az esetre szoritkozni, amikor az elméleti quadrupólus potenciálterét vizsgáljuk.



4. ábra. Az excentrikus saját vektorok gömbfelületi koordinátáinak változása

A quadrupólus izopotenciál felületeit a

$$V_2 = A\left(\frac{1}{r}\right)^3 \cos 2\lambda \sin^2 \Theta$$

függvény irja le, rögzitett V_2 érték mellett. Az erővonalakat leiró függvényeket az ortogonális trajektóriák differenciál egyenletéből kapjuk meg.

A $\Theta = 90^\circ$-kal jellemzett sikban (quadrupólus tengelyek sikja) az erővonalak egyenletét paraméteres formában adhatjuk meg

$$u = C \cdot \left|\sin \lambda^{\frac{3}{4}}\right| \left|\cos \lambda^{\frac{7}{4}}\right| \operatorname{sg} \cos \lambda$$

$$v = C \cdot \left|\sin \lambda^{\frac{7}{4}}\right| \left|\cos \lambda^{\frac{3}{4}}\right| \operatorname{sg} \sin \lambda \, .$$

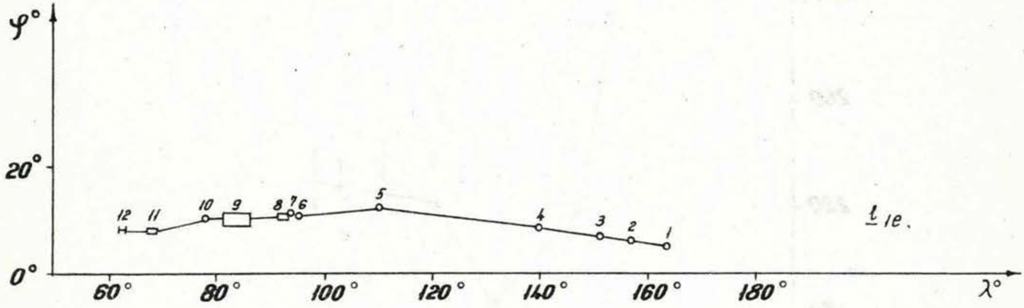
A dipólus tengelyhez és a maximális saját értékhez tartozó saját vektor sikjában ($\lambda = 0$) az erővonalakat az

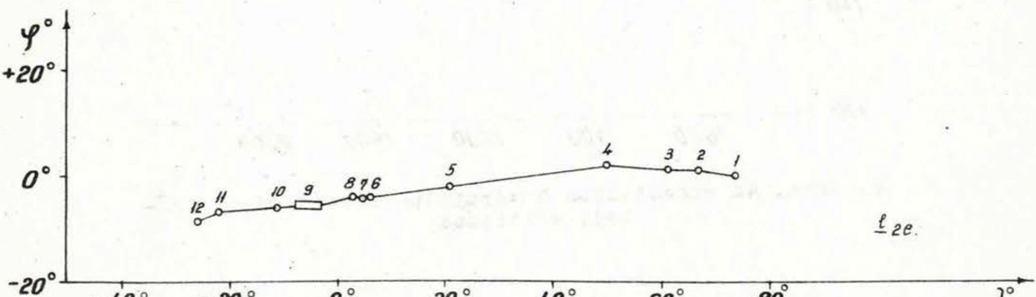
$$u = C \cdot \left|\cos \Theta^{\frac{3}{4}}\right| \sin \Theta$$

$$w = C \cdot \left|\cos \Theta^{\frac{5}{2}}\right| \operatorname{sg} \cos \Theta$$

függvények irják le.

A $\lambda = 45^{\circ}$, ill. $\lambda = 135^{\circ}$-os meridiánsikok ekvipotenciális felületek. Az erővonalak minden pontban merőlegesek ezekre a sikokra. A

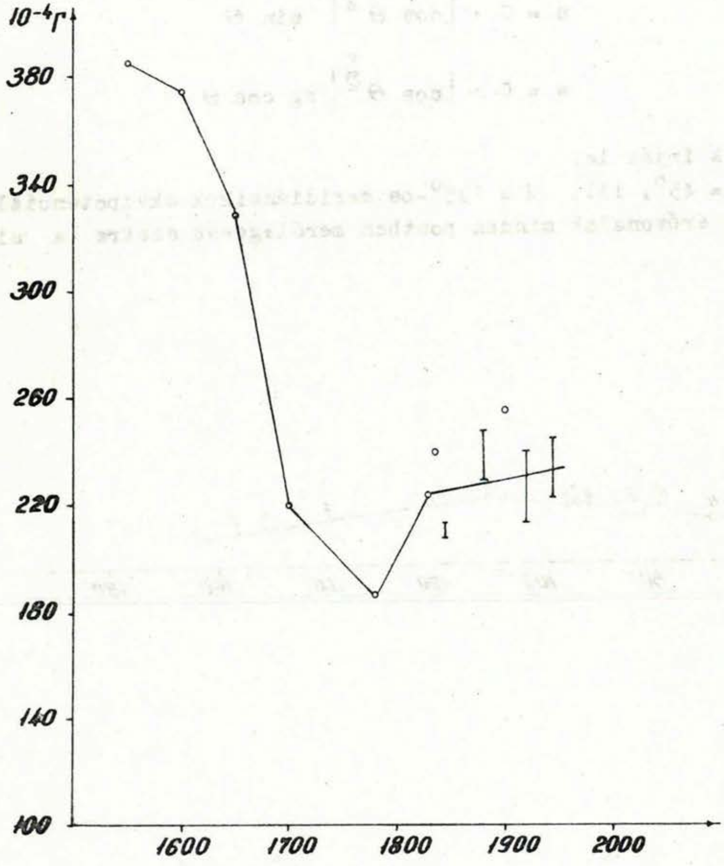




5. ábra. Az excentrikus quadrupólus tengelyek gömbfelületi koordinátáinak változása

$\lambda = 90^o$-os meridiánsikban hasonló geometriai képet mutatnak a quadrupólus erővonalai, mint a $\lambda = 0$ esetben (csak irányuk ellentétes).

Köszönettel tartozom dr. Barta György és dr. Albert Anna munkatársaimnak értékes kritikai észrevételeikért és Bertha István munkatársamnak, mert a vizsgálattal kapcsolatos nagytömegü számolómunka elvégzésében segitséget nyujtott.



6. ábra. Az excentrikus quadrupólus momentumának időbeli változása

IRODALOM

1. Barta György: A Föld mágneses sarkának és középpontjának időbeli vándorlásáról.
   Geofizikai Közlemények VIII. kötet. 1-2. szám, 1959.
2. Chargoy, A.: Movimiento del campo magnético terrestre dado por los terminos de segundo orden de la ecuacion del potencial.
   Anales del Instituto de Geofisica. UNAM Vol. 1.p.p. 24-37. Mexikó, 1955.
3. Analisis de modelos que describen el campo magnetico terrestre hasta 1955. Anales .... Vol. 3.
4. Fanselau, G.: Geomagnetismus und Aeronomie.
   Band III. Berlin, 1959.
5. Fanselau und Lucke: Über die Veränderlichkeit des erdmagnetischen Hauptfeldes und seine Theorien.
   Zeitschrift für Geophysik. 1956. H. 3/4.
6. Fritsche, H: Die Elemente des Erdmagnetismus für die Epochen 1600, 1650, 1700, 1780, 1842 und 1885....
   St. Petersburg, 1899.
7. Mauersberger, P: Betrachtungen über die zeitliche Änderung der Parameter des geomagnetischen Feldes auf Grund der vorliegenden Potentialentwicklungen.
   Abhdl.d.Geophys.Inst.Potsdam, Nr. 5/1952.
8. Schmidt, A: Der magnetische Mittelpunkt der Erde und seine Bedeutung.
   Gotha. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Leipzig, 1934.