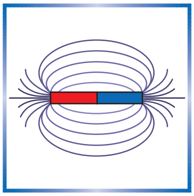


Fizika feladatok megoldása

P. 5455. *Egy függőleges tengelyű, 45°-os félnyílásszögű, súrlódásmentes tölcsér belső felületére, a tengelyétől* 10 cm *távolságban* v_0 *nagyságú vízszintes sebességgel egy pontszerű testet juttatunk. Mekkora lesz a test legnagyobb sebessége, ha*

a) $v_0 = 0{,}5$ m/s;

b) $v_0 = 2{,}0$ m/s?

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. Az energiamegmaradásból következik, hogy a test sebessége a pályájának legmélyebb pontjánál lesz a legnagyobb. Ebben a pontban a test sebességének nincs függőleges komponense, és így a tölcsér tengelye irányába mutató (radiális) sebességkomponens is nulla.

Jelöljük a tengelytől mért távolságot (ami megegyezik a tölcsér csúcsához viszonyított magassággal) h-val, a test sebességét v-vel, ezek kezdeti értékét pedig h_0-lal és v_0-lal. A perdületmegmaradás törvénye szerint $mv_0h_0 = mvh$ (ahol m a test tömege), vagyis

$$h = h_0 \frac{v_0}{v}. \tag{1}$$

A mechanikai energia megmaradását az

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{2}$$

egyenlet fejezi ki.

(1)-et (2)-be helyettesítve kapjuk:

$$\frac{1}{2}v_0^2 + gh_0 = \frac{1}{2}v^2 + gh_0\frac{v_0}{v}. \tag{3}$$

Ennek nyilvánvaló megoldása a $v = v_0$, tehát a (3) egyenlet nullára rendezett alakjából ki lehet emelni a $v - v_0$ gyöktényezőt:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{gh_0}{v}(v_0 - v) = (v - v_0)\left[\frac{v + v_0}{2} - \frac{gh_0}{v}\right] = 0.$$

A szögletes zárójelben szereplő (a $v \neq v_0$ megoldásnak megfelelő) kifejezés akkor tűnik el, ha

$$v^2 + vv_0 - 2gh_0 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva a keresett sebességre

$$v_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 8gh_0}}{2}$$

adódik, de közülük csak az egyik pozitív:

$$v_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 8gh_0}}{2}.$$

Ha ez az érték kisebb, mint v_0, vagyis $h > h_0$, akkor a pontszerű test felfelé mozog és a sebessége egyre csökken. Ilyenkor a sebesség legnagyobb értéke a kezdeti v_0. Ha viszont v_1 nagyobb, mint v_0, akkor a test lefelé mozog, a sebessége a legmélyebb helyzet eléréséig növekszik, és a legnagyobb értéke v_1.

a) Ha $v_0 = 0{,}5$ m/s, akkor

$$v_1 = \frac{-0{,}5 + \sqrt{0{,}5^2 + 8 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1}}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} > v_0,$$

tehát a mozgás során a test legnagyobb sebessége 1,17 m/s.

b) Ha $v_0 = 2{,}0$ m/s, akkor

$$v_1 = \frac{-2{,}0 + \sqrt{2{,}0^2 + 8 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1}}{2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} < v_0.$$

Ebben az esetben a test legnagyobb sebessége megegyezik a kezdősebességgel, vagyis 2,0 m/s.

Nemeskéri Dániel (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.) és *Szanyi Attila* (Bonyhád, Petőfi S. Ev. Gimn. és Koll., 12. évf.) dolgozata alapján

32 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5463. *Egy ismeretlen, légkör nélküli bolygó felett* $H = 225$ m *magasságban „lebeg” egy rozoga űrszonda. Egymás után lepottyan róla két csavar. A második csavar akkor válik le az űrszondáról, amikor az első éppen* 16 *métert esett. Mekkora a két csavar távolsága abban a pillanatban, amikor az első eléri a bolygó felszínét?*

(*4 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

Megoldás. Legyen t_0 az az idő, mely alatt az első csavar $h_0 = 16$ m-t esett, t az az idő, amely alatt az első csavar eléri a bolygó felszínét, d pedig a két csavar távolsága, amikor az első eléri a felszínt.

Alkalmazva a szabadesés általános képletét $\left(s = \frac{g}{2}t^2\right)$, fel tudjuk írni a második csavar által megtett útra az alábbi egyenletet:

$$H - d = \frac{g}{2}(t - t_0)^2. \tag{1}$$

Tudjuk továbbá, hogy (a szabadesés általános $t = \sqrt{2s/g}$ összefüggése szerint)

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \tag{2}$$

és

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \tag{3}$$

(2)-t és (3)-t az (1) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$H - d = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right)^2,$$

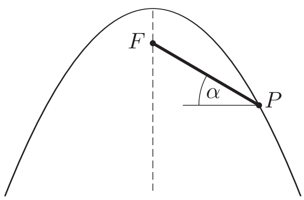
amit d-re rendezve és egyszerűbb alakra hozva a keresett távolság:

$$d = 2\sqrt{Hh_0} - h_0 = 2\sqrt{(225\ \mathrm{m})\cdot(16\ \mathrm{m})} - 16\ \mathrm{m} = 104\ \mathrm{m},$$

ami nem függ az ismeretlen bolygó ismeretlen nagyságú nehézségi gyorsulásától.

$\Delta S \geqslant 0$ csapat: *Czehlár Gergely, Pásztor Ádám* és *Polyányi Zorka*
(Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 12. évf.)

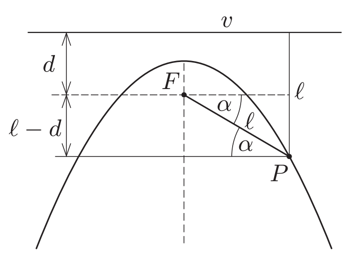
79 dolgozat érkezett. Helyes 53 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.



P. 5464. *Egy függőleges tengelyű, lefelé nyíló parabola F fókuszpontján keresztül különböző hajlásszögű lejtőket fektetünk. Mekkora a hajlásszöge annak a lejtőnek, amelyen az F pontból kezdősebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó pontszerű test a lehető legrövidebb idő alatt éri el a parabolát?*

(*5 pont*) *Faragó Andor* (1877–1944) feladata nyomán*

Megoldás. Használjuk ki a parabola azon tulajdonságát, hogy bármely pontja egyenlő távol van az F fókuszponttól és a v vezéregyenestől.



Legyen F és v távolsága d, a lejtő hajlásszöge α, a pálya hossza (F és P távolsága) pedig ℓ. Ekkor

$$\ell \sin\alpha = \ell - d, \quad \text{vagyis} \quad \ell = \frac{d}{1-\sin\alpha}.$$

Csúszás közben a pontszerű test egyenletesen gyorsul, a gyorsulása (súrlódásmentes esetben) $a = g\sin\alpha$, így a csúszás t idejére fennáll:

$$\frac{g\sin\alpha}{2}t^2 = \ell = \frac{d}{1-\sin\alpha},$$

* Faragó Andor indította újra 1925-ben az I. világháború miatt megszüntetett KöMaL-t, és annak 1939-ig szerkesztője, kiadója volt. Ő vezette be a kiemelkedő feladatmegoldók fényképeinek közlését.

vagyis

$$t=\sqrt{\frac{2d}{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}}.$$

A csúszás ideje akkor lesz minimális, ha az

$$f(\alpha)=\sin\alpha(1-\sin\alpha)$$

kifejezés maximális. A fenti kifejezés a $\xi\equiv\sin\alpha$ változónak kvadratikus függvénye:

$$f(\xi)=\xi(1-\xi),$$

ami a legnagyobb értékét $\xi=\frac{1}{2}$-nél, vagyis $\alpha=30^\circ$-nál éri el. (Ezt teljes négyzetté alakítással, vagy deriválással láthatjuk be.)

Seprődi Barnabás Bendegúz (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Érdekes, hogy a legrövidebb lecsúszási időhöz tartozó α szög sem a parabola d paraméterétől, sem a nehézségi gyorsulástól nem függ. Ezt a részletes számítás elvégzése nélkül, dimenzionális megfontolásokkal (dimenzióanalízissel) is beláthatjuk. A dimenziótlan α szög csak a méter mértékegységű d-től és a $\mathrm{m/s^2}$ mértékegységű g-től függhetne. Mivel az idő mértékegysége csak g-ben szerepel, α nem függhet g-től. Ekkor viszont α d-től sem függhet, hiszen nincs egy másik, hosszúság dimenziójú mennyiség, ami d mértékegységét kiejthetné.

(*G. P.*)

41 dolgozat érkezett. Helyes 34 megoldás. Hiányos (1–3 pont) 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5466. *Egy nyirkos tavaszi reggelen a hőmérséklet* 1 °C, *a relatív páratartalom pedig* 80%-*os. Egy szobában* 20 °C-*on a relatív páratartalom* 40%. *Nő vagy csökken a szoba páratartalma, ha szellőztetünk?*

(*4 pont*) (*Példatári feladat nyomán*)

Megoldás. Táblázati adatok szerint a 20 °C-os levegő maximális páratartalma (vagyis a telített vízgőz sűrűsége ezen a hőmérsékleten) 17,3 $\mathrm{g/m^3}$. Ha a relatív páratartalom 40%, akkor a levegőben köbméterenként 6,9 g vízgőz van. Az 1 °C-os levegő maximális páratartalma 5,2 $\mathrm{g/m^3}$, 80% relatív páratartalomnál ez 4,2 $\mathrm{g/m^3}$-nek felel meg.

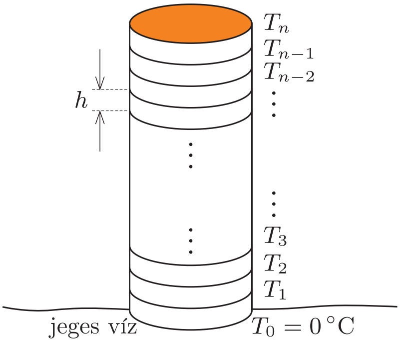
Ha szellőztetünk, a 20 °C-os levegő egy része kicserélődik az 1 °C-os levegővel. Ennek hatására a szoba páratartalma csökken, hiszen az 1 °C-os levegő maximális páratartalmának 80%-a kisebb, mint a 20 °C-os levegő maximális páratartalmának 40%-a.

Márfai Dóra (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

57 dolgozat érkezett. Helyes 34 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 7, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5467. *Egy* 20 cm *hosszú,* 3 cm^2 *keresztmetszetetű, megfelelő elektromos szigeteléssel ellátott rézrúdon teljes hosszában egyenletesen feltekert fűtőszál van. A rudat függőlegesen tartjuk úgy, hogy az alsó vége éppen beleér egy olvadó jeget tartalmazó pohár vizébe, így folyamatosan* $0\,^\circ C$ *hőmérsékletű marad. Hány fokra melegszik fel elegendően hosszú idő alatt a rúd másik vége, ha a fűtőszál* 100 W *teljesítménnyel melegíti a rézrudat?*

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka



Megoldás. Jelöljük a rúd keresztmetszetét A-val, a hosszát ℓ-lel, a fűtőszál teljesítményét P-vel. Osszuk fel (gondolatban) a rudat n darab $h = \ell/n$ vastag szeletre, és legyen $n \gg 1$. A szeleteket számozzuk meg alulról felfelé haladva 1-től n-ig. (Az *ábrán* a fűtőszál nem látható.)

Elegendően hosszú idő alatt beáll a termikus egyensúly, amikor a rúd különböző pontjainak hőmérséklete időben már nem változik. Legyen a k-adik szelet felső részének hőmérséklete T_k, az alsó részének hőmérséklete pedig T_{k-1}. A rúd alsó vége $T_0 = 0\,^\circ$C hőmérsékletű, a felső végét jellemző T_n pedig éppen a keresett maximális hőmérséklet.

Jelöljük a k-adik réteg felső és alsó lapja közötti $T_k - T_{k-1}$ hőmérséklet-különbséget δ_k-val. A Fourier-féle hővezetési törvény szerint rétegek felső lapján Δt idő alatt

$$Q_k^{(\mathrm{be})} = \lambda A \frac{\delta_k}{h} \cdot \Delta t$$

hő áramlik a kérdéses rétegbe befelé, az alsó lapon pedig

$$Q_k^{(\mathrm{ki})} = \lambda A \frac{\delta_{k-1}}{h} \cdot \Delta t$$

hő áramlik kifelé. Ugyanakkor a fűtőszál által a vékony rétegnek átadott Joule-hő

$$Q_{\mathrm{Joule}} = P \frac{h}{\ell} \cdot \Delta t.$$

(Ez utóbbi minden kis rétegnél ugyanakkora, tehát nem függ a k indextől.)

Hőmérsékleti egyensúlyban az egyes rétegnek átadott és az onnan elvezetett hő megegyezik, vagyis

$$Q_k^{(\mathrm{be})} + Q_{\mathrm{Joule}} = Q_k^{(\mathrm{ki})},$$

tehát

$$\delta_k - \delta_{k-1} = -\frac{Ph^2}{\lambda A \ell} = \text{állandó}.$$

Ezek szerint a δ_k számok olyan (csökkenő) számtani sorozatot alkotnak, melynek differenciája

$$d = -\frac{Ph^2}{\lambda A \ell} < 0.$$

Feltételezzük, hogy a rúd felső vége nem ad át számottevő nagyságú hőt a környező levegőnek, vagyis

$$Q_n^{(\mathrm{be})} = 0, \qquad \text{tehát} \qquad \delta_n = 0.$$

Mivel a számtani sorozat elemeire igaz, hogy

$$\delta_n = \delta_1 + (n-1)d = 0,$$

megkapjuk a sorozat első elemét:

$$\delta_1 = -(n-1)d = (n-1)\frac{Ph^2}{\lambda A\ell}.$$

A vékony rétegek hőmérséklet-változásainak összege megadja a rúd felső és alsó vége közötti hőmérséklet-különbséget:

$$T_n - T_0 = T_{\max} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k = \frac{\delta_1 + \delta_n}{2} \cdot n = \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{Ph^2}{\lambda A\ell} \approx n^2 \frac{Ph^2}{2\lambda A\ell}.$$

(Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $n \gg 1$.) Mivel $nh = \ell$, a keresett hőmérséklet

$$T_{\max} = \frac{P\ell}{2\lambda A}.$$

Az ismert adatok és $\lambda_{\text{réz}} = 395\ \mathrm{W/(m\,K)}$ felhasználásával

$$T_{\max} = \frac{100\ \mathrm{W} \cdot 0{,}2\ \mathrm{m}}{2 \cdot 395\ \mathrm{W/(m\,K)} \cdot (3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2)} \approx 84\,^\circ\mathrm{C}.$$

Halász Henrik (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

23 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 10 dolgozat.

P. 5470. *Két egyforma gyűjtőlencsét egymással szemben úgy helyezünk el, hogy fókuszpontjaik egybeesnek. Az egyik lencsét a közös optikai tengellyel párhuzamos, monokromatikus, egyenletes energiaáram-sűrűségű fénynyalábbal világítjuk meg. A lencsék antireflexiós (visszaverődést megakadályozó) réteggel vannak bevonva, a lencsék belsejében történő fényelnyelődéstől és az ottani visszaverődésektől eltekinthetünk.*

a) Milyen irányú erő hat a lencsékre?

b) Becsüljük meg a lencsékre ható erők nagyságát!

Adatok: *a lencsék fókusztávolsága* 10 cm, *átmérőjük* 5 cm, *a megvilágító nyaláb fényének hullámhossza* 590 nm, *az első lencsére* 1 W *fényteljesítmény jut.*

(*5 pont*) Közli: *Domokos Péter,* Budapest

Megoldás. Jelöljük a lencse fókusztávolságát f-fel, a sugarát R-rel, a lézernyaláb (lencsére jutó) teljesítménye legyen P és a monokromatikus fény hullámhossza λ (vagyis a frekvenciája c/λ).

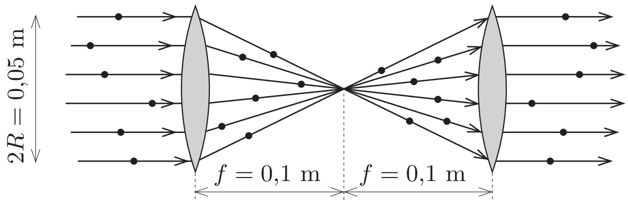
A lézerfényt fénysebességgel haladó fotonok (kicsiny „golyócskák”) összességének fogjuk tekinteni (lásd a *nem* méretarányos *1. ábrát*). Mindegyik, az ábrán kicsiny golyócskaként feltüntetett fotonnak

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$$

energiája és

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{c}$$

nagyságú lendülete (impulzusa) van.



1. ábra

a) A lencsékre ható erő a fotonok eredő lendületének egységnyi idő alatti megváltozásával egyenlő. A lencsére valamekkora Δt idő alatt $E = P\,\Delta t$ energiájú fény érkezik, ami

$$\Delta N = \frac{E}{\varepsilon} = \frac{P}{\varepsilon}\,\Delta t$$

számú fotonnak felel meg. Ezen fotonok mindegyikének ugyanakkora nagyságú és irányú lendülete van, az eredő lendületük tehát

$$I_0 = \Delta N \cdot p = \frac{E}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \frac{P}{c}\,\Delta t.$$

Ha az első lencse helyén egy fényelnyelő lap lenne, akkor erre a lapra

$$F_0 = \frac{I}{\Delta t} = \frac{P}{c} = \frac{1\ \mathrm{W}}{3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} = 3{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}$$

erő hatna. A lencse azonban nem nyeli el a fényt, csak a fotonok haladási irányát változtatja meg. A lencséből Δt idő alatt kilépő fény eredő lendülete (ami a szimmetria miatt az optikai tengely irányába mutató vektor) a fentebb számolt I-nél kisebb, de nullától különböző nagyságú lesz. Így az első lencsére ható erő, ami a közös fókuszpont felé mutat, ténylegesen valamekkora $F < F_0$ nagyságú.

A fénysugarak megfordíthatósága miatt a második lencsére is ugyanekkora nagyságú, de ellentétes irányú erőt fejt ki a fény, hiszen a fény lendülete a második lencsén áthaladva I-ről I_0-ra növekszik. A két lencse között tehát azonos nagyságú, de egymással ellentétes irányú „vonzóerő” jön létre. Ez a két erő azonban nem a Newton III. törvényében szereplő hatás-ellenhatás miatt ugyanakkora nagyságú, hiszen mindkét erőt a fény lendületváltozása, nem pedig a másik lencse „hatása” hozza létre.

b) A lencsékre ható erők nagyságának számszerű értékét a fotonok lendületváltozásából lehet kiszámítani (becsülni). A szimmetria miatt elegendő, ha csak az optikai tengely irányába eső lendületkomponenseket vizsgáljuk. Amennyiben egy p impulzusú foton a lencsén áthaladva φ szöggel térül el, akkor az optikai tengely irányába eső lendülete

$$\Delta p = p(1 - \cos\varphi)$$

értékkel csökken. A lencse széléhez érkező fotonok eltérülési szöge

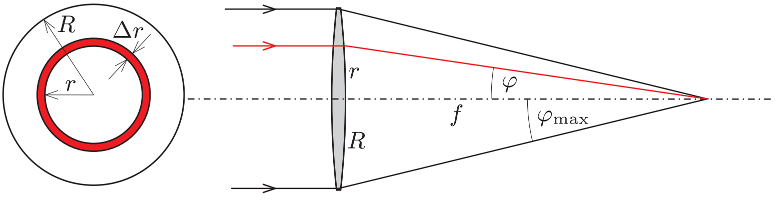
$$\varphi_{\max} = \operatorname{arctg}\frac{R}{f} = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = 14^\circ .$$

Ha mindegyik foton ugyanekkora szöggel térülne el, akkor az eredő impulzus is ugyanilyen arányban csökkenne, tehát a lencsére ható erő

$$F^* = \frac{P}{c}\,(1 - \cos\varphi_{\max}) = 0{,}03\ F_0 \approx 10^{-10}\ \mathrm{N}$$

lenne. A fotonok azonban különböző szögekben térülnek el, az optikai tengely közelében haladó fotonoknál pl. $\varphi \approx 0$, így ezek a fotonok egyáltalán nem járulnak hozzá a lencsére ható erőhöz. Elfogadható nagyságrendi becslésnek tekinthető, ha az eredő erőt F^* és $F = 0$ valamilyen középértékével közelítjük, az tehát néhányszor 10^{-11} N nagyságú lehet.

Ha pontosabban akarjuk kiszámítani a lézerfény által kifejtett erőt, akkor valamennyi foton járulékát figyelembe kell vegyük. (Ezt a vizsgálatot a pontverseny résztvevőitől nem vártuk el, hiszen csak az erő nagyságának *becslése* volt a kérdés. – *A Szerk.*)



2. ábra

Azok a fotonok, amelyek a lencsét egy r sugarú ($r \leqslant R$), igen keskeny, Δr szélességű körgyűrű mentén érik el (lásd a *2. ábrát*), valamennyien $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{r}{f}$ szögben térülnek el, és így a lendületük megváltozása (egyenként) Δt idő alatt

$$\Delta p = p(1 - \cos\varphi) = p\left(1 - \frac{f}{\sqrt{f^2 + r^2}}\right).$$

Ezen fotonok száma (a körgyűrű és a teljes kör keresztmetszetarányából)

$$\Delta N(r) = \frac{2r\pi\Delta r}{R^2\pi} \cdot \frac{P}{\varepsilon}\,\Delta t,$$

a megfelelő lendületváltozás tehát

$$\Delta I = \frac{2P}{R^2 c}\left(1 - \frac{f}{\sqrt{f^2+r^2}}\right) r\Delta r \cdot \Delta t.$$

A lencsére ható teljes erő

$$F = \sum \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{P}{c}\sum_{r=0}^{R}\left(1 - \frac{f}{\sqrt{f^2+r^2}}\right)\frac{2r\Delta r}{R^2}. \tag{1}$$

A fenti kifejezésben szereplő összeg a körgyűrűk vastagságának csökkentésével egyre jobban közelít az

$$\int\limits_{r=0}^{R} \frac{2}{R^2}\left(1 - \frac{f}{\sqrt{f^2+r^2}}\right) r\,\mathrm{d}r$$

integrálhoz, aminek értéke az ismert (SI mértékegységben megadott) számadatokkal (pl. a `https://www.wolframalpha.com/` felhasználásával) kiszámítható:

$$K = \int\limits_{0}^{0{,}025} 32\left(1 - \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}01+r^2}}\right) r\,\mathrm{d}r = 0{,}0152,$$

és ennek megfelelően

$$F = K\frac{P}{c} = \frac{0{,}0152}{3\cdot 10^8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m/s}} = 5{,}05\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}.$$

A *Lumity csapat: Kurucz Kende* és *Vidor Nikoletta*
(Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 12/11. évf.)
dolgozatának felhasználásával

Megjegyzés. Az (1) képletben szereplő összeget elemi úton (integrálszámítás alkalmazása nélkül) is meg lehet határozni. Ehhez fizikai megfontolásokat, az egyenletesen gyorsuló mozgás ismert út–idő és sebesség-elmozdulás képleteit hívjuk segítségül.

1. Első észrevételünk: az $r\Delta r$ szorzat (ha Δr kicsi) így is felírható:

$$r\Delta r \approx \frac{1}{2}\Delta(r^2) = \frac{(r+\Delta r)^2 - r^2}{2}.$$

2. Vezessük be új változónak az $x = r^2/R^2$ dimenziótlan mennyiséget ($0 \leqslant x \leqslant 1$). ($x$ azt fejezi ki, hogy egy r sugarú kör területe hányszorosa a lézersugár teljes keresztmetszetének.) Ezzel a jelöléssel $\frac{2r\Delta r}{R^2} = \Delta x$, és az (1)-ben szereplő összeg így írható:

$$K = \sum_{x=0}^{1}\left(1 - \frac{f}{\sqrt{f^2+R^2x}}\right)\Delta x = K_1 - K_2.$$

3. Az összeg első része könnyen számolható:

$$K_1 = \sum_{x=0}^{1} \Delta x = 1.$$

Az összeg másik fele már nem ennyire egyszerű:

$$K_2 = f \sum_{x=0}^{1} \frac{\Delta x}{\sqrt{f^2 + R^2 x}},$$

de ha a benne szereplő állandókat átjelöljük $f \to v_0$ és $R^2 \to 2a$ módon, ismerős képlethez jutunk:

$$K_2 = f \sum_{x=0}^{1} \frac{\Delta x}{\sqrt{v_0^2 + 2ax}} = f \sum \frac{\Delta x}{v(x)},$$

ahol $v(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ az egyenletesen gyorsuló mozgást végző test pillanatnyi sebessége x út megtétele után.

Láthatjuk, hogy

$$K_2 = f \sum \Delta t = fT,$$

ahol T az az idő, amennyi alatt a v_0 kezdősebességgel induló, állandó a gyorsulású test $x = 1$ utat tud megtenni. Az út–idő függvénykapcsolat szerint

$$\frac{a}{2} T^2 + v_0 T = 1,$$

vagyis az eredeti paraméterekkel kifejezve:

$$\frac{R^2}{4} T^2 + fT - 1 = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a pozitív megoldása:

$$T = \frac{-f + \sqrt{f^2 + R^2}}{R^2/2},$$

és így ($f = 4R$ esetén)

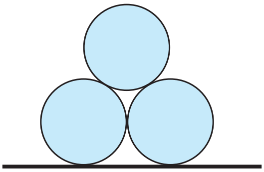
$$K_2 = 2\left[\left(\frac{f}{R}\right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{f}\right)^2} - 1\right] = 8\sqrt{17} - 32,$$

és végül

$$K_1 - K_2 = 33 - 8\sqrt{17} \approx 0{,}015.$$

(G. P.)

7 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott a Lumity csapat megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–3 pont) 5 dolgozat.



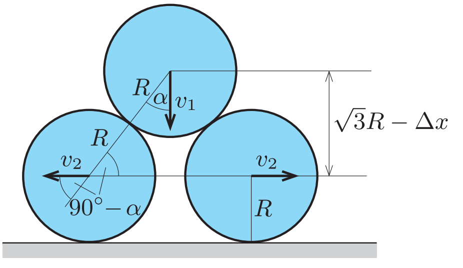
P. 5471. *Három egyforma, R sugarú, m tömegű jéghengert készítünk, és azokat az* ábrán *látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük. A jég felülete nagyon síkos, emiatt a súrlódás mindenhol elhanyagolható.*

a) Határozzuk meg és ábrázoljuk vázlatosan az egyik alsó jéghenger mozgási energiáját a felső henger elmozdulásának függvényében!

b) Mekkora sebességgel csapódik a felső jéghenger a talajhoz, és mekkora sebességre gyorsul fel a másik két jéghenger?

(*6 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

Megoldás. A szimmetria miatt a felső jéghenger függőlegesen lefelé mozog, a pillanatnyi sebességét jelöljük v_1-gyel, az alsó hengerek (vízszintes) sebességét pedig v_2-vel. A felső és az egyik alsó henger tengelyét összekötő egyenesnek a függőlegessel bezárt (időben egyre növekvő nagyságú) szöge legyen α (lásd az *1. ábrát*).



1. ábra

Ameddig a felső jéghenger érintkezik az alsókkal, a felső henger éppen olyan sebességgel közeledik a másikhoz, mint amekkora sebességgel az távolodik tőle:

$$v_1 \cos\alpha = v_2 \cos(90^\circ - \alpha) = v_2 \sin\alpha,$$

vagyis

$$v_1 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} v_2.$$

Tekintsük azt a helyzetet, amelynél a felső henger elmozdulása Δx, vagyis amikor

$$\text{(1)} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}R - \Delta x}{2R},$$

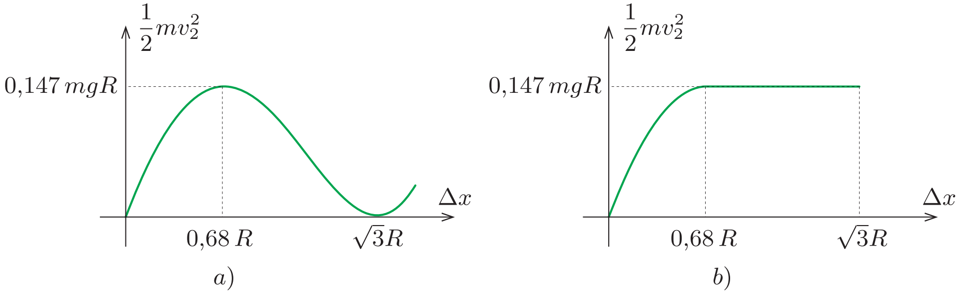
és alkalmazzuk az energiamegmaradás törvényét. (Súrlódás hiányában a jéghengerek nem jönnek forgásba, így csak a tömegközéppontok mozgásához kapcsolódó energiákkal kell számolnunk.)

$$mg\Delta x = \frac{1}{2}mv_1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_2^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2\frac{1+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Innen (1) felhasználásával kapjuk, hogy bármelyik alsó test mozgási energiája a felső test elmozdulásának függvényében:

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{\Delta x\left(\sqrt{3}R - \Delta x\right)^2}{4R^2 + \left(\Delta x - \sqrt{3}R\right)^2}\cdot mg.$$

Ábrázolva a (2) függvényt a *2.a. ábrán* látható grafikont kapjuk. Mivel az alsó jéghengerre ható nyomóerőnek folyamatosan gyorsítani kellene (vízszintes irányban) ezt a testet, nem lehetséges, hogy a mozgási energiája a felső henger bizonyos elmozdulása után csökkenni kezdene. Ténylegesen az történik, hogy $\Delta x = 0{,}68\,R$ elmozdulásnál a jéghengerek elválnak egymástól, onnantól kezdve az alsó hengerek nem gyorsulnak tovább, a mozgási energiájuk állandó marad (*2.b. ábra*).



2. ábra

A két alsó jéghenger sebessége az elválás pillanatában (és a továbbiakban):

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 0{,}147\,Rg} = 0{,}54\sqrt{Rg}\,.$$

A jéghengerek elválásának pillanatában a helyzetüket jellemző szög:

$$\arccos \frac{\sqrt{3}R - 0{,}68\,R}{2R} = 58{,}1^\circ,$$

és így a középső jéghenger sebessége ekkor (függőlegesen lefelé):

$$v_1 = v_2 \operatorname{tg} \alpha \approx 0{,}87\sqrt{Rg}\,.$$

A továbbiakban a középső test szabadon esik mindaddig, amíg meg nem tesz

$$d = \sqrt{3} - 0{,}68\,R = 1{,}05\,R$$

távolságot. Eközben

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + 2gd} = \sqrt{0{,}87^2\,Rg + 2 \cdot 1{,}05\,Rg} \approx 1{,}7\sqrt{Rg}$$

sebességre gyorsul fel és csapódik a talajba.

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.)

13 dolgozat érkezett. Helyes Schmercz Blanka megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 9, hibás 1 dolgozat.

P. 5472. *Mennyi idő alatt kerüli meg a James Webb űrtávcső a Napot?*

(*3 pont*)

Megoldás. A James Webb űrtávcső a Nap-Föld L_2 librációs pont körül kering. Az L_2 pont a Napot és a Földet összekötő egyenesen van a Földtől 1,5 millió kilométerre. Az L_2 pont a Földdel együtt fordul el a Nap körül, és így ugyanannyi idő alatt kerüli meg a Napot, mint a Föld. Tehát a James Webb űrtávcső is pontosan 1 év alatt kerüli meg a Napot.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. Néhány versenyző az interneten talált 6 hónapos periódust adta meg válaszul, ami *nem a Nap,* hanem az L_2 pont körüli keringési idő.

67 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Hiányos (1 pont) 8, hibás 9, nem versenyszerű 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 423. Ütköztessünk vízszintes asztallapon egyenesen és centrálisan egy nyugvó 100 forintos pénzérmének egy másik 100 forintos érmét. Mérjük le az ütközés után a megállásáig megtett utakat. Határozzuk meg ezekből az ütközés rugalmatlansági fokát jellemző *ütközési számot!* Függ-e az ütközési szám az ütköző testek relatív sebességétől?

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata nyomán

G. 817. A James Webb űrtávcső a Nap-Föld rendszer úgynevezett L_2 Lagrange-pontja körül mozog. Ez a pont 1,5 millió km távolságra van a Földtől a Nap és a Föld középpontját összekötő egyenesen úgy, hogy a Föld a Nap és az L_2 Lagrange-pont között van. Képzeljük el, hogy pontosan az L_2 Lagrange-pontban vagyunk, és a Nap felé nézünk. Szükségünk van-e védőszemüvegre? Mit látunk?

(*4 pont*)

G. 818. Egy nyitott vasúti kocsi vízszintes, egyenes pályán halad v sebességgel. A sínpár közvetlen közelében lévő ágyúval $2v$ sebességű lövedéket lövünk ki éppen akkor, amikor a vasúti kocsi vége az ágyú mellett halad el. A vízszinteshez képest milyen szögben lője ki az ágyú a lövedékét, hogy az a vasúti kocsi végére essen? A kilövés után mennyi idővel esik vissza a lövedék? (A légellenállástól tekintsünk el.)

(*4 pont*)