Az egyenes meredeksége:

$$f'(x) = -x + 3 \implies m = f'(5) = -2,$$

ezért az érintő egyenlete: $y - 6 = -2(x - 5)$, azaz $y = -2x + 16$.

c) A másodfokú függvény zérushelyei a $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2} = 0$ egyenlet alapján: $x_1 = -1$ és $x_2 = 7$.

Az e egyenes és az x tengely M metszéspontja esetén $y = -2x + 16 = 0$, amiből $x = 8$ és $M(8;0)$ adódik.

Az $E(5;6)$ pont x tengelyre eső merőleges vetületét E'-vel jelölve $E'(5;0)$, és így a vizsgált terület:

$$T = T_{EE'M} - \int\limits_5^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

A két területet külön vizsgálva:

$$T_{EE'M} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9,$$

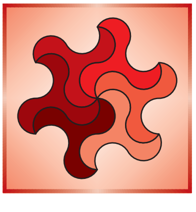
$$\int\limits_5^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2}\right]_5^7 =$$

$$= \left(-\frac{343}{6} + \frac{147}{2} + \frac{49}{2}\right) - \left(-\frac{125}{6} + \frac{75}{2} + \frac{35}{2}\right) = \frac{20}{3}.$$

A síkidom területe:

$$T = 9 - \frac{20}{3} = \frac{7}{3}.$$

Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos
Keszthely



Matematika feladat megoldása

B. 5269. *Legyen $p \geqslant 19$ egy páratlan szám. Színezzük ki a $0, 1, \ldots, p-1$ számokat két színnel. Legyen $1 \leqslant i \leqslant p$ esetén x_i a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz egy véletlenszerűen választott eleme (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenek a választások). Igazoljuk, hogy legalább $3/(2^p p)$ annak a valószínűsége, hogy $x_1, \ldots, x_p$ egyforma színűek és $p \mid x_1 + \ldots + x_p$.*

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

Megoldás. Legyen a megadott színezésben a $0, 1, \ldots, p-1$ számok közül r darab piros és b darab kék. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy adott x_i elem piros lesz, $u = \frac{r}{p}$; annak valószínűsége pedig, hogy kék lesz, $v = \frac{b}{p}$. A kettő összege $r + b = p$, illetve $u + v = 1$.

Minden $c = 0, 1, \ldots, p$ esetén legyen A_c az az esemény, hogy $x_1, \ldots, x_c$ mind kék színű, $x_{c+1}, \ldots, x_p$ mindegyike piros, továbbá $x_1 + \ldots + x_p$ osztható p-vel. (Ha $c = 0$, akkor mindegyik x_i piros; ha pedig $c = p$, akkor mindegyik kék.) Azt állítjuk, hogy $0 \leqslant c < p$ esetén $P(A_c) + P(A_{c+1}) = u^{p-c-1} v^c \cdot \frac{1}{p}$.

Tekintsük az $A_c \vee A_{c+1}$ eseményt: ez azt jelenti, hogy $x_1, \ldots, x_c$ kék, $x_{c+2}, \ldots,$ x_p piros, az x_{c+1} tetszőleges színű, és $x_1 + \ldots + x_p$ osztható p-vel. Mivel A_c és A_{c+1} egymást kizáró események, $P(A_c \vee A_{c+1}) = P(A_c) + P(A_{c+1})$.

A $P(A_c \vee A_{c+1})$ meghatározásához először válasszuk ki az $x_1, \ldots, x_c$ elemeket: annak valószínűsége, hogy mindegyikük kék, v^c. Ezután válasszuk ki az $x_{c+2}, \ldots, x_p$ elemeket; annak valószínűsége, hogy ezek mind pirosak, u^{p-c-1}. Utolsónak válasszuk ki az x_{c+1} elemet: ennek színe piros és kék is lehet, de értéke egyértelműen meghatározott; a megfelelő választás feltételes valószínűsége $\frac{1}{p}$. Összeszorozva,

$$P(A_c) + P(A_{c+1}) = P(A_c \vee A_{c+1}) = v^c \cdot u^{p-c-1} \cdot \frac{1}{p}.$$

Annak a valószínűsége, hogy az x_i-k egyforma színűek és az összegük osztható p-vel:

$$\begin{aligned}
&P(A_0 \vee A_p) = P(A_0) + P(A_p) = \\
&= \big(P(A_0) + P(A_1)\big) - \big(P(A_1) + P(A_2)\big) + \big(P(A_2) + P(A_3)\big) - \\
&\quad - \big(P(A_3) + P(A_4)\big) + - \ldots - \big(P(A_{p-2}) + P(A_{p-1})\big) + \big(P(A_{p-1}) + P(A_p)\big) = \\
&= \frac{u^{p-1}}{p} - \frac{u^{p-2}v}{p} + \frac{u^{p-3}v^2}{p} - \frac{u^{p-4}v^3}{p} + - \ldots - \frac{uv^{p-2}}{p} + \frac{v^{p-1}}{p} = \\
&= \frac{(u+v)(u^{p-1} - u^{p-2}v + u^{p-3}v^2 - u^{p-4}v^3 + - \ldots - uv^{p-2} + v^{p-1})}{p} = \\
&= \frac{u^p + v^p}{p} = \frac{r^p + b^p}{p^{p+1}}.
\end{aligned}$$

(Több lépésben is kihasználtuk, hogy p páratlan.)

Legyen $t = \frac{p}{2}$, $r = t + k$ és $b = t - k$. Mivel p páratlan, $|2k| = |r - b| \geqslant 1$, tehát $|k| \geqslant \frac{1}{2}$. A binomiális tétel szerint kifejtve, és az első tagokat megtartva,

$$\begin{aligned}
&r^p + b^p = (t+k)^p + (t-k)^p = \\
&\qquad = 2t^p + 2\binom{p}{2} t^{p-2}|k|^2 + 2\binom{p}{4} t^{p-4}|k|^4 + \ldots + 2\binom{p}{p-1} t|k|^{p-1} >
\end{aligned}$$

$$> 2t^p + 2\binom{2t}{2} t^{p-2}\frac{1}{4} + 2\binom{2t}{4} t^{p-4}\frac{1}{16} =$$

$$= 2t^p + 2\cdot\frac{2t(2t-1)}{2}\cdot\frac{t^{p-2}}{4} + 2\cdot\frac{2t(2t-1)(2t-2)(2t-3)}{24}\cdot\frac{t^{p-4}}{16} =$$

$$= 2t^p + \left(t^p - \frac{1}{2}t^{p-1}\right) + \left(\frac{1}{12}t^p - \frac{1}{4}t^{p-1} + \frac{11}{48}t^{p-2} - \frac{1}{16}t^{p-3}\right) =$$

$$= 3t^p + \frac{1}{12}t^{p-1}(t-9) + \frac{1}{48}t^{p-3}(11t-3).$$

Mivel $p \geqslant 19$, az utolsó tagban $t-9$ és $11t-3$ is pozitív. Tehát $r^p + b^p > 3t^p$, és így

$$P(A_0 \vee A_p) = \frac{r^p + b^p}{p^{p+1}} > \frac{3t^p}{p^{p+1}} = \frac{3}{2^p p.}$$

Ezzel beláttuk az állítást.

Wiener Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11 évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Pontosabb számolással azt kaphatjuk, hogy

$$P(A_0 \vee A_p) \geqslant \frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)^p + \left(1-\frac{1}{p}\right)^p}{2^p p},$$

és ha $|r-b| = 1$, akkor egyenlőség áll fenn.

Belátható, hogy a számláló monoton nő, ezért

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^p + \left(1-\frac{1}{p}\right)^p \geqslant \left(\frac{20}{19}\right)^{19} + \left(\frac{18}{19}\right)^{19} \approx 3{,}008.$$

A számláló határértéke

$$\lim\left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^p + \left(1-\frac{1}{p}\right)^p\right) = e + \frac{1}{e} \approx 3{,}0862,$$

így a számlálóban a 3 helyett például 3,1-et írva a feladat állítása már semmilyen p-re sem teljesül.

2. A beküldött dolgozatokban kétféle gyakori típushiba volt. Sokan félreértették a feladatot, és a színezést is véletlenszerűnek vették. (Véletlen színezéssel a valószínűség kiszámítása triviális.)

A másik gyakori hiba, hogy a függetlenség vizsgálata nélkül, események együttes bekövetkezésének valószínűségét úgy számolták, hogy a két valószínűséget összeszorozták. Tipikusan, kiszámolták annak a valószínűségét, hogy a számok azonos színűek, meg annak a valószínűségét is, hogy az összeg osztható p-vel, majd egyszerűen összeszorozták. A feladat feltételeivel ez a számolás *véletlenül* jó eredményt ad. Viszont a kapott eredmény hibás akkor, ha p páros, vagy legalább három színnel színezünk.

3. Meglepő az a tény, hogy – legalábbis páratlan p és kétféle szín esetén – az egyszínű elemekből álló, p-vel osztható összegű sorozatok száma csak a piros és kék színű elemek

számától függ, és nem számít, hogy a $0, 1, \ldots, p-1$ számok között hogyan helyezkednek el a piros és kék elemek. Még meglepőbb ennek oka: az, hogy az $X^p + Y^p$ polinom osztható az $X+Y$ polinommal. Ezt akkor értjük csak meg igazán, ha a feladatot komplex számokkal oldjuk meg. Az alábbiakban vázolunk egy ilyen megoldást; a módszer az A. 448. feladat honlapunkon megjelent második megoldását* követi.

Legyen $\varepsilon = \varepsilon^{2\pi/p} = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$ az első p-edik komplex egységgyök, és bármely x egész szám esetén legyen

$$\chi(x) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon^{kx}.$$

Ha $p \mid x$, akkor az összeg mindegyik tagja 1. Ellenkező esetben a tagok egy $\varepsilon^x \neq 1$ hányadosú mértani sorozatot alkotnak, és a mértani sorozat összegképletéből következik, hogy az összeg 0. Tehát,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } p \mid x; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{1}$$

Legyen ismét a piros számok száma r, a kékek száma b, továbbá bármely k egész számra legyen

$$f(k) = \sum_{\substack{0\leqslant x<p \\ x \text{ piros}}} \varepsilon^{kx} \quad \text{és} \quad g(k) = \sum_{\substack{0\leqslant x<p \\ x \text{ kék}}} \varepsilon^{kx}.$$

A $k=0$ esetben mindegyik ε^{kx} hatvány értéke 1, így $f(0)$ és $g(0)$ éppen a piros, illetve kék elemek száma: $f(0) = r$, $g(0) = b$. Továbbá, felhasználva (1)-et,

$$f(k) + g(k) = p \cdot \chi(k).$$

Az olyan $x_1, \ldots, x_p$ sorozatok száma, amelyekben mindegyik x_j piros, és az összegük osztható p-vel,

$$\sum_{x_1 \text{ piros}} \sum_{x_2 \text{ piros}} \cdots \sum_{x_p \text{ piros}} \chi(x_1 + x_2 + \ldots + x_p) =$$

$$= \sum_{x_1 \text{ piros}} \sum_{x_2 \text{ piros}} \cdots \sum_{x_p \text{ piros}} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon^{k(x_1+x_2+\ldots+x_p)} \right) =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{x_1 \text{ piros}} \varepsilon^{kx_1} \right)\left(\sum_{x_2 \text{ piros}} \varepsilon^{kx_2} \right) \cdots \left(\sum_{x_p \text{ piros}} \varepsilon^{kx_p} \right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(k)^p.$$

* `https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A448&l=hu`

Hasonlóan láthatjuk, hogy az olyan $x_1, \ldots, x_p$ sorozatok száma, amelyekben mindegyik x_j kék, és az összegük osztható p-vel,

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} g(k)^p.$$

A feladatnak megfelelő $x_1, \ldots, x_p$ sorozatok száma tehát

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(k)^p + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} g(k)^p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\big(f(k)^p + g(k)^p\big) =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\big(f(k)+g(k)\big)\cdot\big(f(k)^{p-1} - f(k)^{p-2}g(k) + f(k)^{p-3}g(k)^2 - + \ldots + g(k)^{p-1}\big).$$

Ha $1 \leqslant k < p$, akkor $f(k)+g(k)=0$. Ha pedig $k=0$, akkor $f(k)=r$, $g(k)=b$, és azt kapjuk, hogy a feltételeknek megfelelő $x_1, \ldots, x_p$ sorozatok száma

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\big(f(k)^p + g(k)^p\big) = \frac{f(0)^p + g(0)^p}{p} = \frac{r^p + b^p}{p},$$

ami csak a piros és kék elemek számától függ.

A feladatra 21 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 3 versenyző: Tarján Bernát, Varga Boldizsár és Wiener Anna. 2 pontos 2, 1 pontos 1, a többi 14 versenyző nem kapott pontot.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (769–773.)

K. 769. A Kozmás Étteremben túl sósra sikerült a húsleves, ezért a főnök szeretné felhigítani a hűtőben talált sótlan levessel. A sós leves 5 százaléka, a sótlan leves 1,2 százaléka só. Hány litert keverjen össze a kétféle levesből a főnök, ha 72 deciliter levesre van szüksége és szeretné, hogy a sótartalma 3,48 százalék legyen?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

K. 770. Hányszor annyi olyan mező van a sakktáblán, amelyről a huszár legalább négy mezőre léphet tovább, mint amelyről nyolc mezőre léphet?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

K. 771. Ferike pontosan kilenc négyzet alakú részre vágott fel egy téglalapot. A négyzeteket megvizsgálva Ferike észrevette, hogy az egyiknek a területe 64 cm^2, két másiké 16 cm^2, a többié pedig 4 cm^2. Mekkora volt az eredeti téglalap kerülete?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)