# Megoldásvázlatok a 2023/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

## I. rész

**1.** *Három testvér, Dia, Viki és Dávid Keszthelyről Balaton körüli kerékpártúrára egyszerre indul. Dia* 20 km/h *sebességgel haladva* 18 *óra* 30 *perckor, Dávid* 35 km/h *sebességgel tekerve* 14 *órakor ért haza. Mekkora sebességgel haladt Viki, ha ő pontosan* 15 *órakor ért vissza Keszthelyre?* (*12 pont*)

**Megoldás.** Jelöljük a Balaton körút hosszát km-ben mérve $s$-sel. Mivel Dávid menetideje $\frac{9}{2}$ órával kevesebb, mint Diáé, ezért

$$\frac{s}{20}-\frac{s}{35}=\frac{9}{2}.$$

Ebből $s=210$, amit felhasználva Dávid menetideje $\frac{210\ \text{km}}{35\ \text{km/h}}=6$ óra. Így Vikinek 7 óra állt rendelkezésre az út megtételére, ezért az ő sebessége $\frac{210\ \text{km}}{7\ \text{h}}=30$ km/h volt.

**2.** *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\frac{x^2+x-2}{-x^2+5x-4}+\frac{-2x^2+9x-4}{2x^2+3x-2}=2. \qquad (\textit{13 pont})$$

**Megoldás.** A másodfokú kifejezéseket szorzattá alakítva:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(4-x)}+\frac{(2x-1)(4-x)}{(2x-1)(x+2)}=2.$$

Ez alapján az egyenlet értelmezési tartománya: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2;\frac{1}{2};1;4\right\}$.

Az egyszerűsítéseket elvégezve:

$$\frac{x+2}{4-x}+\frac{4-x}{x+2}=2,$$

majd a nevezőkkel beszorozva:

$$(x+2)^2+(4-x)^2=2(x+2)(4-x),$$

$$x^2+4x+4+16-8x+x^2=2(-x^2+2x+8),$$

$$4x^2-8x+4=0,$$

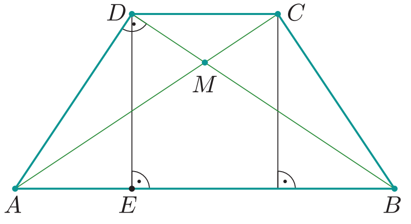
$$4(x-1)^2=0,$$

amiből $x=1$ adódik. Mivel $x\notin D$, ezért az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.

**3.** *Az $ABCD$ húrtrapéz $D$-ből induló magasságának talppontja az $AB$ alapon $E$, átlóinak metszéspontja $M$. Tudjuk, hogy $AE=4$, $EB=9$ és $BDA\sphericalangle=90°$.*

*a) Mekkora a trapéz területe?* *(6 pont)*

*b) Bizonyítsuk be, hogy az $MDA$ háromszög területe mértani közepe az $MAB$ és $MCD$ háromszögek területének.* *(7 pont)*




*1. ábra*

**Megoldás.** *a)* Az $ABD$ derékszögű háromszögre alkalmazva a magasságtételt:

$$DE=\sqrt{AE\cdot EB}=\sqrt{4\cdot 9}=6,$$

$$CD=AB-2AE=13-2\cdot 4=5,$$

így az $ABCD$ trapéz területe

$$t=\frac{AB+CD}{2}\cdot DE=\frac{13+5}{2}\cdot 6=54.$$

*b)* A húrtrapéz tengelyes szimmetriáját felhasználva: $T_{MDA}=T_{MBC}$. Másrészt

$$\frac{T_{MDA}}{T_{MCD}}=\frac{MA}{MC}=\frac{T_{MAB}}{T_{MBC}}.$$

A felírt két összefüggés alapján:

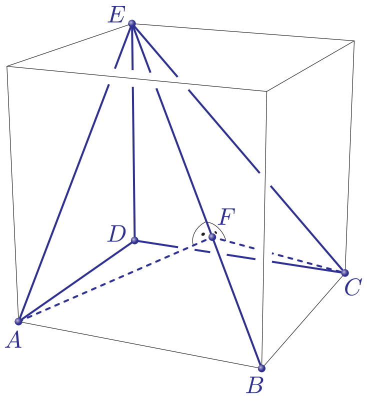
$$T_{MDA}\cdot T_{MBC}=T_{MAB}\cdot T_{MCD},$$

$$(T_{MDA})^2=T_{MAB}\cdot T_{MCD},$$

$$T_{MDA}=\sqrt{T_{MAB}\cdot T_{MCD}},$$

ezzel az állítást beláttuk.

**4.** *Egy gúla alaplapja egység oldalú négyzet. Egyik oldaléle szintén egységnyi hosszúságú és egybeesik a gúla magasságával. Mekkora a gúla szomszédos lapjai által bezárt szögek közül a legnagyobb?* *(13 pont)*




*2. ábra*

**Megoldás.** A *2. ábra* szerint a gúlát egy egység élű kockából származtathatjuk. $ABCD$ a gúla alaplapja, $ED$ a magassága, $EA=EC=\sqrt{2}$ a kocka lapátlói, $EB=\sqrt{3}$ pedig a kocka testátlója.

Az $EDA$ és $ECD$ lapsíkok az alapsíkra és egymásra is merőlegesek. Az $EAB$ sík az alaplap síkjával és az $ECD$ lappal 45°-os szöget zár be, míg az $EDA$ lapra merőleges. Hasonlóan, az $EBC$ sík az alaplap síkjával és az $EDA$ lappal 45°-os szöget zár be, az $ECD$ lapra pedig merőleges. Ezért várhatóan az $EAB$ és $EBC$ lapok hajlásszöge a gúla keresett szöge. Ennek a szögnek a kiszámításához állítsunk $A$-ból és

$C$-ből merőlegest az $EB$ élre. A kocka szimmetriája alapján ezek közös $F$ pontban metszik az $EB$ élt. Az $FAB$ és $FEA$ derékszögű háromszögek alapján a $BF=x$ jelölést bevezetve:

$$AF^2=1^2-x^2 \quad \text{és} \quad AF^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}-x\right)^2,$$

ezek felhasználásával

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad AF=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az $FAC$ háromszögre alkalmazva a koszinusztételt, következik, hogy

$$\cos CFA\sphericalangle=\frac{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}}=-\frac{1}{2},$$

ahonnan $CFA\sphericalangle=120^\circ$.

A gúla szomszédos lapjai által bezárt legnagyobb szög $120^\circ$.

## II. rész

**5.** *Blicc úr minden hétköznap villamossal megy dolgozni, de sohasem vesz jegyet. A villamosra minden nap $p$ valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor* 7000 Ft*-ra bünteti meg a jegy nélkül utazókat. Egy villamosjegy* 350 Ft*. Annak a valószínűsége, hogy Blicc úrnak büntetésmentes hete lesz:* 0,1935.

*a) Adjuk meg $p$ értékét.* (*3 pont*)

*b) Mennyi az esélye annak, hogy Blicc urat pontosan kétszer büntetik meg a következő héten?* (*3 pont*)

*c) Blicc urat április elsején megbüntették. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Blicc úrnak anyagilag megéri, ha a büntetés után még három hétig jegy nélkül utazik?* (*4 pont*)

*d) Hány utazás után lesz legalább* 99,99% *az esélye annak, hogy Blicc úr nem ússza meg a büntetést?* (*6 pont*)

**Megoldás.**

*a)*

$$(1-p)^5=0{,}1935,$$
$$1-p=0{,}72,$$
$$p=0{,}28.$$

*b)*

$$P=\binom{5}{2}\cdot 0{,}28^2\cdot 0{,}72^3=0{,}2926.$$

*c)* Blicc úrnak legalább 21-szer kell büntetésmentesen utazni, ennek esélye:

$$0{,}72^{21}=0{,}0010.$$

*d)*
$$\begin{aligned} P(\text{megússza a büntetést}) &\leqslant 0{,}0001,\\ 0{,}72^n &\leqslant 0{,}0001,\\ \lg 0{,}72^n &\leqslant \lg 0{,}0001,\\ n\cdot \lg 0{,}72 &\leqslant \lg 0{,}0001,\\ n &\geqslant \frac{\lg 0{,}0001}{\lg 0{,}72} \approx 28{,}04. \end{aligned}$$

A 28. utazás után következik be a feladat követelménye szerinti feltétel.

**6.** *Számológép használata nélkül határozzuk meg az alábbi kifejezések pontos értékét:*

*a)*
$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+$$
$$+\log_2\left(1+\frac{1}{14}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{15}\right); \qquad \textit{(3 pont)}$$

*b)*
$$\log_{36}1+\log_{36}2+\log_{36}3+\log_{36}4+\log_{36}6+\log_{36}9+$$
$$+\log_{36}12+\log_{36}18+\log_{36}36; \qquad \textit{(4 pont)}$$

*c)*
$$2^{\lg 2}\cdot\left(2^{\lg 5}+5^{\lg 2}\right); \qquad \textit{(4 pont)}$$

*d)*
$$\log_2 25\cdot\log_3 16\cdot\log_5 27. \qquad \textit{(5 pont)}$$

**Megoldás.**

*a)*
$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\log_2\left(1+\frac{1}{14}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{15}\right)=$$
$$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\ldots+\log_2\frac{15}{14}+\log_2\frac{16}{15}=$$
$$=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{15}{14}\cdot\frac{16}{15}\right)=\log_2 16=4.$$

*b)*
$$\log_{36}1+\log_{36}2+\log_{36}3+\log_{36}4+\log_{36}6+$$
$$+\log_{36}9+\log_{36}12+\log_{36}18+\log_{36}36=$$
$$=(\log_{36}1+\log_{36}36)+(\log_{36}2+\log_{36}18)+$$
$$+(\log_{36}3+\log_{36}12)+(\log_{36}4+\log_{36}9)+\log_{36}6=$$
$$=4\log_{36}36+\log_{36}6=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

*c)*
$$2^{\lg 2}\cdot\left(2^{\lg 5}+5^{\lg 2}\right)=2^{\lg 2}\cdot\left(5^{\lg 2}+5^{\lg 2}\right)=$$
$$=2^{\lg 2}\cdot 2\cdot 5^{\lg 2}=2\cdot 10^{\lg 2}=2\cdot 2=4.$$

*d*) $\quad \log_2 25 \cdot \log_3 16 \cdot \log_5 27 = \frac{\lg 25}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 16}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 27}{\lg 5} = \frac{\lg 16}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 27}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 25}{\lg 5} =$

$$= \log_2 16 \cdot \log_3 27 \cdot \log_5 25 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

**7.** *Adottak a $k_1: x^2+y^2-6x-4y-3=0$ és $k_2: x^2+y^2-12x+12y+63=0$ egyenletű körök. Tükrözzük $k_1$-et a $P(1;5)$ pontra, a kapott kört jelölje $k_1'$.*

*a) Írjuk fel $k_1'$ egyenletét.* (*5 pont*)

*Megrajzolva a $k_1'$ és $k_2$ körök két-két közös belső és külső érintőit, azok rendre a $Q$ és az $R$ pontban metszik egymást.*

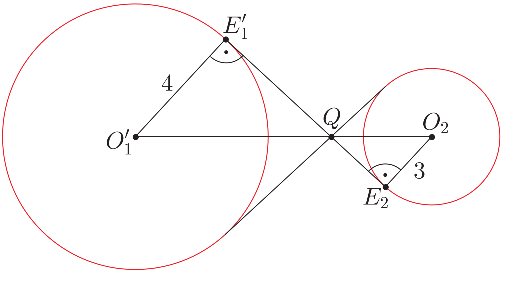
*b) Határozzuk meg a $Q$ és az $R$ pont koordinátáit.* (*11 pont*)

**Megoldás.** *a*) A $k_1$ kör egyenletét átalakítva $k_1: (x-3)^2+(y-2)^2=16$, ebből a kör középpontja és sugara $O_1(3;2)$, $r_1=4$. $O_1$-nek $P$-re vonatkozó tükörképe legyen $O_1'(o_1;o_2)$. Ekkor $\frac{o_1+3}{2}=1$ és $\frac{o_2+2}{2}=5$, amiből $O_1'(-1;8)$, $r_1'=4$, ezért $k_1': (x+1)^2+(y-8)^2=16$.

*b*) A $k_2$ kör egyenletét átalakítva $k_2: (x-6)^2+(y+6)^2=9$, ebből a kör középpontja és sugara $O_2(6;-6)$, $r_2=3$.

Tekintsük a *3. ábrát*. Az $O_1'QE_1'$, $O_2QE_2$ háromszögek hasonlósága alapján $Q$ az $O_1'O_2$ szakasz $4:3$ arányú osztópontja, ezért

$$Q\left(\frac{3\cdot(-1)+4\cdot 6}{7}; \frac{3\cdot 8+4\cdot(-6)}{7}\right), \quad \text{azaz} \quad Q(3;0).$$




*3. ábra*

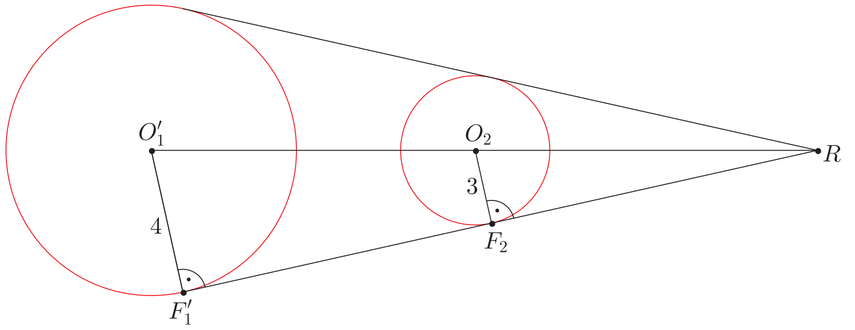
Hasonlóképpen az $O_1'RF_1'$, $O_2RF_2$ háromszögek hasonlósága alapján (*4. ábra*)

$$\frac{O_1'R}{O_2R} = \frac{4}{3}, \quad \text{és így} \quad \frac{O_1'O_2}{O_2R} = \frac{1}{3}.$$

Ez alapján az $R(r_1;r_2)$ pont koordinátáira fennáll, hogy

$$\frac{r_1+3\cdot(-1)}{4} = 6, \quad \frac{r_2+3\cdot 8}{4} = -6,$$

amelyek figyelembevételével $R(27;-48)$.




*4. ábra*

**8.** *Egy háromszög oldalainak hossza $a = 3$, $b = 7$ és $c = 8$ egység.*

*a) Igazoljuk, hogy a háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak.* *(7 pont)*

*b) Adjuk meg a háromszög beírt és körülírt körének területarányát.* *(6 pont)*

*c) Mekkora részekre osztják a beírt kör érintési pontjai a háromszög oldalait?* *(3 pont)*

**Megoldás.** *a*) Legyenek a háromszög szögei $\alpha < \beta < \gamma$. Ha a szögek számtani sorozatot alkotnak, akkor $\alpha = \beta - \delta$, $\gamma = \beta + \delta$ és

$$\alpha + \beta + \gamma = (\beta - \delta) + \beta + (\beta + \delta) = 3\beta = 180^\circ,$$

amiből $\beta = 60^\circ$, tehát egy háromszög szögei akkor és csak akkor alkotnak számtani sorozatot, ha $\beta = 60^\circ$. Ezt fogjuk igazolni.

A $b$ oldalra felírva a koszinusztételt:

$$7^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\beta,$$

amiből $\cos\beta = \frac{1}{2}$ és $\beta = 60^\circ$ adódik.

*b*) Az általánosított szinusztétel alapján a háromszög körülírt körének $R$ sugarát meghatározva:

$$R = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{7}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

A vizsgált háromszög $T$ területét és a félkerületét kiszámolva:

$$T = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{3 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 6\sqrt{3} \quad \text{és} \quad s = \frac{3+7+8}{2} = 9 \quad \text{adódik.}$$

Ezek segítségével a beírt kör sugara:

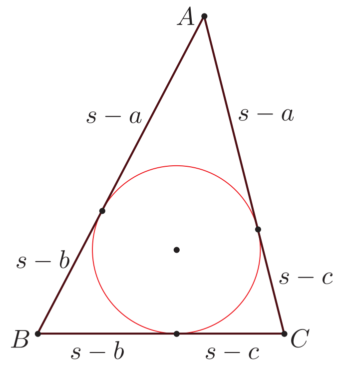
$$r = \frac{T}{s} = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

így a háromszög beírt és körülírt körének területaránya:

$$\frac{R^2\pi}{r^2\pi} = \frac{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{49}{4}.$$

*c*) Az *5. ábra* szerint a keresett érintőszakaszok hosszai:

$$s-a=9-3=6,$$
$$s-b=9-7=2,$$
$$s-c=9-8=1.$$



*5. ábra*

**9.** *Az $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ másodfokú függvény grafikonja áthalad a $P(1;6)$, $Q(3;8)$ és $R(7;0)$ pontokon.*

*a*) *Határozzuk meg az a, b, c együtthatók értékét.* (*6 pont*)

*b*) *Írjuk fel a függvénygörbe 5 abszcisszájú pontjában az érintő egyenletét.* (*4 pont*)

*c*) *Számítsuk ki ezen érintő, a függvény grafikonja és az x tengely által határolt síkidom területét.* (*6 pont*)

**Megoldás.** *a*) A megadott feltételek alapján:

$$f(1)=a+b+c=6,$$
$$f(3)=9a+3b+c=8,$$
$$f(7)=49a+7b+c=0.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

$$a=-\frac{1}{2},\quad b=3,\quad c=\frac{7}{2}.$$

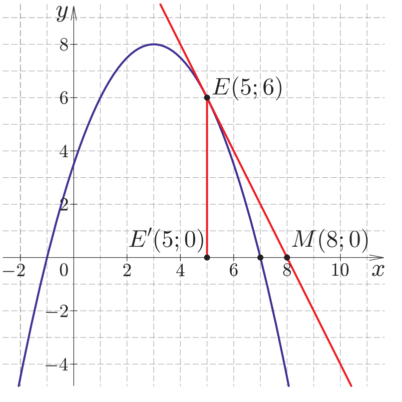
*b*) Mivel

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{7}{2}=$$
$$=-\frac{1}{2}(x-3)^2+8\quad (x\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$f(5)=-\frac{1}{2}(5-3)^2+8=6,$$

így az érintési pont $E(5;6)$.



*6. ábra*

Az egyenes meredeksége:

$$f'(x) = -x + 3 \implies m = f'(5) = -2,$$

ezért az érintő egyenlete: $y - 6 = -2(x - 5)$, azaz $y = -2x + 16$.

*c*) A másodfokú függvény zérushelyei a $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2} = 0$ egyenlet alapján: $x_1 = -1$ és $x_2 = 7$.

Az $e$ egyenes és az $x$ tengely $M$ metszéspontja esetén $y = -2x + 16 = 0$, amiből $x = 8$ és $M(8;0)$ adódik.

Az $E(5;6)$ pont $x$ tengelyre eső merőleges vetületét $E'$-vel jelölve $E'(5;0)$, és így a vizsgált terület:

$$T = T_{EE'M} - \int_5^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

A két területet külön vizsgálva:

$$T_{EE'M} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9,$$

$$\int_5^7 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{7}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2}\right]_5^7 =$$

$$= \left(-\frac{343}{6} + \frac{147}{2} + \frac{49}{2}\right) - \left(-\frac{125}{6} + \frac{75}{2} + \frac{35}{2}\right) = \frac{20}{3}.$$

A síkidom területe:

$$T = 9 - \frac{20}{3} = \frac{7}{3}.$$

**Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos**
Keszthely

## Matematika feladat megoldása

**B. 5269.** *Legyen $p \geqslant 19$ egy páratlan szám. Színezzük ki a $0, 1, \ldots, p-1$ számokat két színnel. Legyen $1 \leqslant i \leqslant p$ esetén $x_i$ a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz egy véletlenszerűen választott eleme (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenek a választások). Igazoljuk, hogy legalább $3/(2^p p)$ annak a valószínűsége, hogy $x_1, \ldots, x_p$ egyforma színűek és $p \mid x_1 + \ldots + x_p$.*

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)