A magyar küldöttség: Baran Zsuzsanna (helyettes csapatvezető), Fülöp Csilla, Sztranyák Gabriella, Wiener Anna, Kercsó-Molnár Anita, Kiss Melinda (csapatvezető), Csahók Tímea (koordinátor)

Kiss Melinda Flóra és **Baran Zsuzsa**
az EGMO felkészítő csapat nevében

Az EGMO 2023 feladatai

Első nap

1. feladat. Adott $n \geqslant 3$ darab pozitív valós szám, $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Minden $1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant n$-re legyen $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (itt az a_0-t a_n-nek definiáljuk, az a_{n+1}-et pedig a_1-nek). Tegyük fel, hogy tetszőleges $1 \leqslant i, j \leqslant n$ esetén $a_i \leqslant a_j$ pontosan akkor teljesül, ha $b_i \leqslant b_j$ teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. feladat. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Legyen D az a pont a körülírt körén, amire AD átmérő. A K és L pontok rendre az AB, illetve AC szakaszokon helyezkednek el úgy, hogy DK és DL érintik az AKL háromszög körülírt körét.

Bizonyítsuk be, hogy a KL egyenes átmegy az ABC háromszög magasságpontján.

Egy háromszög magasságpontja a magasságvonalak metszéspontja.

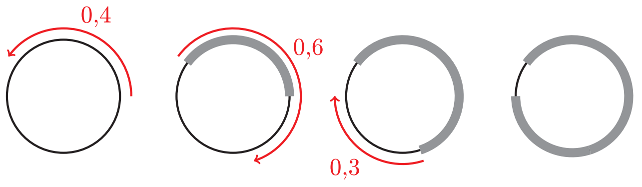
3. feladat. Legyen k egy pozitív egész szám. Lexinek van egy $\mathcal{D}$ szótára, ami valahány k betűs szóból áll és minden szó csak az A és B betűket tartalmazza. Lexi szeretné egy $k \times k$-as rács minden mezőjére vagy az A vagy a B betűt beleírni úgy, hogy mindegyik oszlop egy $\mathcal{D}$-beli szót tartalmazzon felülről lefelé olvasva, és mindegyik sor egy $\mathcal{D}$-beli szót tartalmazzon balról jobbra olvasva.

Mi az a legkisebb m egész, amire teljesül, hogy ha $\mathcal{D}$ tartalmaz legalább m különböző szót, akkor Lexi ki tudja tölteni a rácsot ezen a módon, függetlenül attól, hogy milyen szavak vannak $\mathcal{D}$-ben?

Második nap

4. feladat. Turbó, a csiga egy körvonal egyik pontján ül, melynek kerülete 1. Pozitív valós számok adott $c_1; c_2; c_3; \ldots$ végtelen sorozatára Turbó egymás után megteszi a $c_1; c_2; c_3; \ldots$ távolságokat a körvonalon, minden alkalommal eldöntve, hogy az óramutató járásával megegyező, vagy ellentétes irányban mászik.

Például, ha a $c_1; c_2; c_3; \ldots$ sorozat a $0{,}4; 0{,}6; 0{,}3; \ldots$ sorozat, akkor Turbó elkezdheti a mászást az alábbi módon:



Határozzuk meg azt a legnagyobb $C > 0$ konstanst, melyre a következő teljesül: pozitív valós számok tetszőleges $c_1; c_2; c_3; \ldots$ sorozatára, ahol $c_i < C$ minden i-re, Turbó biztosítani tudja (a sorozat tanulmányozása után), hogy van egy pont a körvonalon, amin sosem fog tartózkodni és amin sosem fog átmászni.

5. feladat. Adott egy $s \geqslant 2$ pozitív egész szám. Tetszőleges k pozitív egésznek definiáljuk a *csavartját,* k'-t az alábbi módon: írjuk fel a k számot $as + b$ alakban, ahol a, b nemnegatív egészek és $b < s$, ekkor a csavartja $k' = bs + a$. Az n pozitív egészre tekintsük azt a $d_1, d_2, \ldots$ végtelen sorozatot, amire $d_1 = n$ és d_{i+1} a d_i-nek a csavartja minden i pozitív egészre.

Bizonyítsuk be, hogy ebben a sorozatban pontosan akkor szerepel az 1, ha az n-nek az $s^2 - 1$-gyel való osztási maradéka 1 vagy s.

6. feladat. Legyen ABC egy háromszög, melynek a körülírt köre Ω. Jelölje rendre S_b és S_c a felezőpontját annak az AC, illetve AB ívnek, ami nem tartalmazza a harmadik csúcsot. Jelölje N_a a felezőpontját a BAC ívnek (a BC ívnek, ami A-t tartalmazza). Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja. Legyen ω_b az a kör, ami érinti AB-t és belülről érinti Ω-t az S_b-ben, és legyen ω_c az a kör, ami érinti AC-t és belülről érinti Ω-t az S_c-ben. Mutassuk meg, hogy az ω_b és ω_c körök metszéspontjain átmenő egyenes és az IN_a egyenes az Ω körön metszik egymást.

A beírt kör az a kör a háromszögben, ami a háromszög mindhárom oldalát érinti.