*b*) Az egyes ellenállások feszültsége:

$$U_1 = R_1 I_1 = 20\ \Omega \cdot 10\ \text{A} = 200\ \text{V},$$
$$U_2 = U_3 = R_2 I_2 = 10\ \Omega \cdot 8\ \text{A} = 80\ \text{V}.$$

A telep kapocsfeszültsége

$$U = U_1 + U_3 = 280\ \text{V},$$

és ha a telep belső ellenállása elhanyagolhatóan kicsi (vagyis a feszültségforrás ideális), akkor ugyanekkora a telep elektromotoros ereje (üresjárati feszültsége).

*c*) A telepen $I = I_1$ erősségű áram folyik, a leadott teljesítmény tehát

$$P = U \cdot I = 280\ \text{V} \cdot 10\ \text{A} = 2800\ \text{W}.$$

A rendszerben (a három ellenálláson) $t = 30$ s alatt összesen

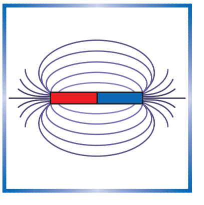
$$Q = P \cdot t = 2800\ \text{W} \cdot 30\ \text{s} = 84\ \text{kJ}$$

hő fejlődik.

*Tóth Hanga Katalin* (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 9. évf.)

49 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 12, nem versenyszerű 16 dolgozat.

## Fizika feladatok megoldása



**P. 5432.** *Egy függőleges helyzetben rögzített, vékony szigetelőpálcára három egyforma tömegű és egyenlő töltésű szigetelőgyöngyöt fűztünk fel. Az alsó gyöngy rögzített, a fölötte lévő másik kettő szabadon elcsúszhat a pálcán. Egyensúlyi helyzetben hányszor messzebb van a legfelső gyöngy a középsőtől, mint a középső a legalsótól?*

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

**Megoldás.** Legyen a gyöngyök tömege $m$, töltésük $Q$. Az alsó ($\mathcal{A}$) és középső ($\mathcal{K}$) gyöngy távolságát jelöljük $R$-rel. A felső ($\mathcal{F}$) gyöngy és $\mathcal{K}$ távolsága legyen $\lambda R$. A felfelé mutató vektorokat tekintsük pozitívnak.

$\mathcal{A}$ rögzített, így semmilyen erőhatásra nem tud elmozdulni. A másik két gyöngy is nyugalomban van, így a rájuk ható erők eredője *nulla.* A gyöngyök azonos töltésűek, így taszítják egymást. $\mathcal{K}$-ra hat a gravitációs erő lefelé, $\mathcal{F}$ taszítóereje is lefelé, továbbá $\mathcal{A}$ taszítóereje felfelé. Ezek előjeles összege nulla:

$$k\frac{Q^2}{R^2} - mg - k\frac{Q^2}{(\lambda R)^2} = 0.$$

$\mathcal{F}$-re hat a gravitációs erő lefelé, $\mathcal{K}$ taszítóereje felfelé és $\mathcal{A}$ taszítóereje ugyancsak felfelé. Az erőegyensúly feltétele:

$$k\frac{Q^2}{(\lambda R+R)^2}+k\frac{Q^2}{(\lambda R)^2}-mg=0.$$

Ebből a két egyenletből ($mg$ kiküszöbölése után) kapjuk, hogy

$$k\frac{Q^2}{R^2}-k\frac{Q^2}{(\lambda R)^2}=k\frac{Q^2}{(\lambda R+R)^2}+k\frac{Q^2}{(\lambda R)^2},$$

vagyis

$$1-\frac{1}{(\lambda+1)^2}-\frac{2}{\lambda^2}=0.$$

Közös nevezőre hozva a

$$\lambda^2(\lambda+1)^2-\lambda^2-2(\lambda+1)^2=0$$

negyedfokú egyenletet kapjuk, amelynek egyetlen valós, pozitív gyöke van: $\lambda\approx 1{,}54$ (lásd pl. a `WolframAlpha` vagy a `GeoGebra` számítógépes alkalmazásokat).

Egyensúlyi helyzetben tehát kb. másfélszer messzebb van a legfelső gyöngy a középsőtől, mint a középső a legalsótól.

*Dancsák Dénes* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 11. évf.)

47 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 7, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

**P. 5436.** *Két, egymást merőlegesen keresztező egyenes autópályán egy-egy pontszerűnek tekinthető autó a kereszteződési pont felé tart állandó nagyságú sebességgel. Az A jelű autó sebessége* $v_A=50$ km/h, *a B jelű autóé* $v_B=40$ km/h. *Egy adott időpontban a két autó a kereszteződési ponttól mért távolsága* $d_A=20$ km, *illetve* $d_B=36$ km.

*a) Mekkora lesz köztük a minimális távolság?*

*b) Mennyi idő múlva lesznek egymáshoz legközelebb?*

(*4 pont*) Közli:*Holics László,* Budapest

**Megoldás.** Számoljunk km, h és km/h egységekben. Az adott pillanat után $t$ idő elteltével az $A$ jelű autó $20-50t$, a $B$ jelű pedig $36-40t$ távolságra lesz a kereszteződéstől. A két autó közötti távolság ebben az időpontban (a Pitagorasz-tétel szerint)

$$d(t)=\sqrt{(20-50t)^2+(36-40t)^2}=\sqrt{4100\,t^2-4880\,t+1696}.$$

A legkisebb távolság a gyök alatti másodfokú kifejezés minimumánál lesz. Ha ezt a kifejezést $at^2+bt+c$ alakban írjuk, akkor a minimum időpontja

$$t_{\min}=-\frac{b}{2a}=\frac{4880}{8200}\approx 0{,}60 \text{ óra} = 36 \text{ perc},$$

a minimális távolság pedig

$$d_{\min} = d\,(t_{\min}) \approx 15{,}6\ \text{km}.$$

*A Könyv gyermekei csapat:*
*Farkas László, Dobák Bálint, Ferencz Hunor*
(Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

91 dolgozat érkezett. Helyes 65 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 11, nem versenyszerű 3 dolgozat.

**P. 5437.** *Egy kettőscsillag egyik tagja háromszor nagyobb tömegű, mint a másik csillag. A két égitest (amelyek mérete sokkal kisebb, mint a távolságuk) közelítőleg kör alakú pályákon keringenek a közös tömegközéppontjuk körül. Melyik csillagnak és hányszor nagyobb a mozgási energiája a tömegközépponti koordinátarendszerben?*

(*3 pont*) Tankönyvi feladat

**Megoldás.** Jelöljük a nagyobb tömegű csillag adatait 1-es, a kisebb tömegűét 2-es indexekkel. Ismert, hogy a tömegek aránya:

$$\frac{m_1}{m_2} = 3,$$

a tömegközépponttól mért távolságukra pedig

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \qquad \text{alapján} \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$$

teljesül. A csillagok keringési ideje megegyezik, így a szögsebességük ($\omega$) is ugyanakkora.

A csillagok mozgási energiája:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2,$$

illetve

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2,$$

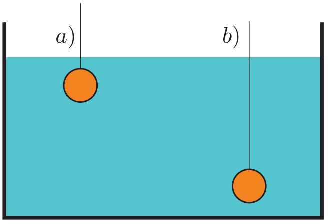
így a keresett arány

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Ezek szerint a kisebb tömegű csillagnak háromszor nagyobb a mozgási energiája (a tömegközépponti koordináta-rendszerben), mint a nagyobb tömegű társáé.

*Tomesz László Gergő* (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.)

59 dolgozat érkezett. Helyes 45 megoldás. Hiányos (1 pont) 8, hibás 3, nem versenyszerű 3 dolgozat.




**P. 5439.** *Egy gömb alakú, kezdetben $20\,^\circ C$ hőmérsékletű rézgolyót vékony, hőszigetelő szál segítségével nagy mennyiségű, $80\,^\circ C$-os vízbe merítünk. A fémgolyó $t_1$ idő elteltével melegszik fel $50\,^\circ C$-ra. Ezután a kísérletet megismételjük úgy, hogy a víz hőmérséklete $20\,^\circ C$, a golyóé pedig $80\,^\circ C$. A rézgolyó most $t_2$ idő alatt hűl le $50\,^\circ C$-ra. Melyik idő rövidebb, $t_1$ vagy $t_2$, ha a golyót*

*a) éppen csak belemerítjük a vízbe,*

*b) majdnem az edény aljáig engedjük le?*

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

**Megoldás.** A réz jó hővezető, a víz viszont rosszul vezeti a hőt. A Fourier-féle hővezetési törvényben szereplő hővezetési együttható rézre 400 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$, míg ugyanez a tényező vízre csupán 0,6 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$. Ez a nagy különbség csak akkor mutatkozik meg, ha a víz nem mozog, hanem az egymás melletti meleg és hideg vízrétegek között történik a hőátadás. Ha a víz áramlik (mint ahogy a központi fűtés csöveiben), akkor a hőátadás lényegesen felgyorsul. Ezt a fajta hőátadást hőáramlásnak (konvekciónak) nevezik.

*a*) A vízfelszín közelében tartott, eredetileg 20 °C-os golyónak hőt átadó vízréteg hőmérséklete csökken, így a sűrűsége nagyobb lesz, mint a környező, meleg folyadék sűrűsége. Ennek hatására a nagyobb sűrűségű folyadék lefelé, az edény aljához áramlik, helyére pedig melegebb folyadék kerül. Ez a meleg folyadék folyamatosan melegíti a rézgolyót, annak hőmérséklete viszonylag gyorsan emelkedik.

Az eredetileg 80 °C-os golyó hőt ad át a környező vízrétegnek, így annak sűrűsége csökken. A kisebb sűrűségű, fokozatosan melegedő folyadék nem tud az edény aljára süllyedni, nem indul el a konvekció, emiatt a rézgolyó lehűlése viszonylag lassan történik.

A réz hőmérséklete mindkét esetben ugyanannyit (30 °C-ot) változik, de a változás sebességének különbözősége miatt a felmelegedés $t_1$ ideje rövidebb, mint a lehűlés $t_2$ időtartama.

*b*) Az edény aljának közelében tartott rézgolyónál hasonló folyamatok mennek végbe, de a helyzet megfordul. A hideg golyó által lehűtött, tehát a környezetéhez képest sűrűbbé váló víz a golyó közelében marad, nem emelkedik fel, nem indul be a konvekció. A meleg golyó által felmelegített víz viszont a kisebb sűrűsége miatt felemelkedik, konvektív áramlás indul be. Az edény aljánál tartott rézgolyónál tehát a golyó felmelegedése a lassúbb, a lehűlése pedig a gyorsabb folyamat, vagyis $t_1 > t_2$.

*Nemeskéri Dániel* (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

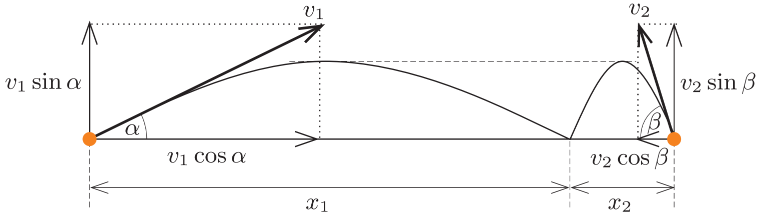
18 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 2, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

**P. 5446.** *Két diák egy mutatványra készül. A sportpályán egymástól bizonyos $d$ távolságra lévő focilabdákat egyszerre megrúgják úgy, hogy a labdák a levegőben találkozzanak. Az egyik diák $v_1 = 20$ m/s, a másik $v_2 = 10$ m/s sebességgel lövi el a labdát, de a kezdősebesség irányát szabadon megválaszthatják. Legfeljebb mekkora kezdeti $d_{\max}$ távolságra lehet egymástól a két labda ahhoz, hogy a mutatvány sikerüljön?*

*(A légellenállás hatását hanyagoljuk el.)*

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

**Megoldás.** Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket. Az $x_1 + x_2$ távolság úgy lesz a legnagyobb, ha a diákok egymás felé rúgják el a labdákat, és azok közvetlenül a földet érés előtt találkoznak.




A találkozási pontig mindkét labda ugyanannyi ideig mozgott, és a függőleges irányú elmozdulásuk is megegyezik:

$$v_1 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 = v_2 \sin\beta \cdot t - \frac{g}{2}t^2,$$

vagyis

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta. \tag{1}$$

A mozgás $t$ idejének fele alatt a labdák függőleges irányú sebessége nullára csökken:

$$v_1 \sin\alpha - g\frac{t}{2} = 0 \qquad \text{és} \qquad v_2 \sin\beta - g\frac{t}{2} = 0,$$

vagyis

$$t = \frac{2v_1 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_2 \sin\beta}{g}. \tag{2}$$

A labdák vízszintes irányú elmozdulásának összege, vagyis a labdák kezdeti távolsága:

$$d = x_1 + x_2 = v_1 \cos\alpha \cdot t + v_2 \cos\beta \cdot t.$$

Helyettesítsük be $t$ helyébe $x_1$ képleténél (2) második alakját, $x_2$-nél pedig az első alakot:

$$d = \frac{2v_1v_2}{g}\cos\alpha \sin\beta + \frac{2v_2v_1}{g}\cos\beta \sin\alpha = \frac{2v_1v_2}{g}\sin(\alpha+\beta).$$

Mivel $\sin(\alpha+\beta) \leqslant 1$, a labdák kezdeti távolságának maximuma

$$d_{\max} = \frac{2v_1v_2}{g} \approx \frac{2\cdot(20\ \mathrm{m/s})\cdot(10\ \mathrm{m/s})}{10\ \mathrm{m/s}^2} = 40\ \mathrm{m}.$$

(Ha $g$ pontosabb értékével, 9,81 $\mathrm{m/s}^2$-tel számolunk, a $d_{\max} \approx 41$ m-es eredményt kapjuk.)

Jóllehet nem volt kérdés a labdák kezdősebességének iránya, de ezeket is meghatározhatjuk. A legnagyobb $d$ távolság esetén $\alpha+\beta = 90°$, így (1) szerint

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \cos\alpha,$$

tehát

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 26{,}6° \qquad \text{és} \qquad \beta = 90° - \alpha = 63{,}4°.$$

*Osváth Emese* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

53 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 8, hibás 9, nem versenyszerű 2 dolgozat.

**P. 5452.** *Egy egyenes pályán haladó fotonrakéta tömege induláskor $m_0$. Adjuk meg a rakéta sebességét a nyugalmi tömeg pillanatnyi értékének a függvényében!*

*(Lásd még a* P. 5426. *feladatot a* KöMaL *2022. szeptemberi számában.)*

(*4 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

**Megoldás.** Legyen a $v$ sebességgel haladó rakéta nyugalmi tömege egy tetszőleges pillanatban $m_0^*$, „látszólagos” tömege

$$m = \frac{m_0^*}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ha eddig a pillanatig a rakétából kiáramlott fotonok összes lendülete $\boldsymbol{p}$, akkor a rakéta lendülete $-\boldsymbol{p}$. A rakéta (relativisztikus) energiája

$$E_{\text{rakéta}} = mc^2 = \frac{m_0^* c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

lendületének nagysága ($p = |\boldsymbol{p}|$) pedig

$$p = mv = \frac{m_0^* v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

A fotonok energiája

$$E_{\text{foton}} = pc = \frac{m_0^* vc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Felírható az energiamegmaradás törvénye:

$$m_0c^2 = pc + mc^2,$$

azaz

$$m_0c^2 = \frac{m_0^* vc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0^* c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

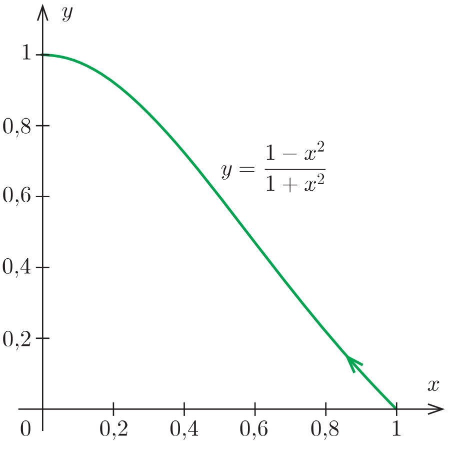
Innen

$$m_0 = \frac{c+v}{\sqrt{c^2-v^2}} m_0^* = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\, m_0^*$$

következik, amiből (négyzetre emelés és rendezés után) megkapjuk a keresett sebességet:

$$v(m_0^*) = \frac{m_0^2 - (m_0^*)^2}{m_0^2 + (m_0^*)^2}.$$

Ezt a kapcsolatot – bevezetve az $y = \frac{v}{c}$ és $x = \frac{m_0^*}{m_0}$ dimenziótlan változókat – grafikusan is ábrázolhatjuk.




*Klement Tamás* (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

19 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Bernhardt Dávid, Klement Tamás és Nemeskéri Dániel megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 2 dolgozat.

**P. 5454.** *Az autógumik javítása után a kerekeket nagy fordulatszámra pörgetik, és az esetleges „ütést" kicsiny nehezékekkel kiegyensúlyozzák (centrírozzák a kereket). Az egyik kereket álló helyzetből állandó szöggyorsulással forgásba hozzák. Egy bizonyos pillanatban a tengelytől* $R = 20$ cm *távolságban lévő szelepsapka gyorsulásának nagysága kétszer akkora, mint az induláskor, és a sebessége ekkor* $v = 1$ m/s.

*a) Mennyi idő telt el az indulásától számítva?*

*b) Mennyi volt a szelepsapka gyorsulása induláskor?*

*c) Mennyi utat tett meg a szelepsapka ezalatt?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

**Megoldás.** Mivel a kerék szöggyorsulása állandó, ezért a szelepsapka érintőirányú (tangenciális) gyorsulása is időben állandó. Jelöljük ezt a gyorsulást (amely megegyezik az induláskori gyorsulással) $a_\mathrm{t}$-vel.

Az idő múltával a szelepsapka sebessége egyre nő, és emiatt a sugárirányú $a_\mathrm{cp}$ centripetális gyorsulás is növekszik. A tangenciális és a centripetális gyorsulás egymásra merőleges vektorok, így az eredőjük nagysága a Pitagorasz-tétel szerint

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{cp}^2}.$$

A kérdéses pillanatban $a = 2a_\mathrm{t}$, ekkor

$$\sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{cp}^2} = 2a_\mathrm{t},$$

vagyis

$$a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{cp}^2 = 4a_\mathrm{t}^2,$$

tehát

$$a_\mathrm{cp} = \sqrt{3}\,a_\mathrm{t}.$$

*b*) Másrészt a szelepsapka centripetális gyorsulása kifejezhető a sebességével és a kerék sugarával:

$$a_\mathrm{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{1\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{0{,}2\ \mathrm{m}} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

így

$$a_\mathrm{t} = \frac{5}{\sqrt{3}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 2{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

*a*) Az indulástól számítva a kérdéses pillanatig

$$t = \frac{v}{a_\mathrm{t}} = 0{,}35\ \mathrm{s}$$

idő telt el.

*c*) A szelepsapka által megtett út az egyenletesen változó mozgás út-idő összefüggése szerint

$$s = \frac{a_\mathrm{t}}{2}t^2 = 0{,}17\ \mathrm{m}.$$

*Lévai Dominik Márk* (Tata, Eötvös J. Gimn., 12. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 14, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 4, nem versenyszerű 5 dolgozat.

**P. 5456.** *A képen azt láthatjuk, hogy munkások egy kútgyűrűt raknak fel (vagy esetleg engednek le) pallókon egy teherautóról. A kútgyűrű tömege* 300 kg, *átmérője* 1 m, *a pallók hossza* 5 m, *a teherautó platójának magassága* 1 m. *Tegyük fel, hogy a munkások kezei által kifejtett erők eredője párhuzamos a pallókkal, valamint a kezük és a kútgyűrű között 0,8 a tapadási súrlódási együttható, továbbá a kútgyűrű nem csúszik meg a pallón.*

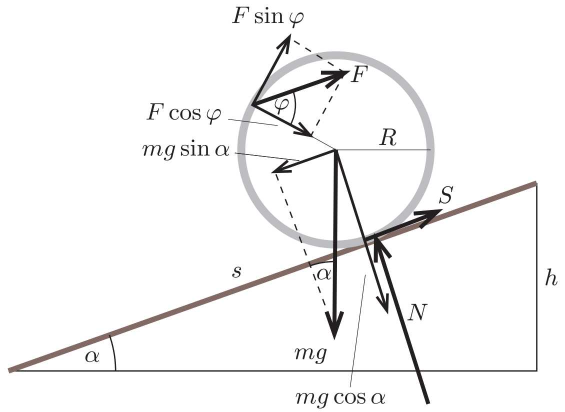
*Határozzuk meg, hogy a pallókkal párhuzamosan legalább mekkora erőt kell a betongyűrűre kifejteni, ha egyenletes mozgással, megcsúszás nélkül akarjuk görgetni*

*a*) *felfelé;*

*b*) *lefelé!*

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

**Megoldás.** A kútgyűrű egyenletesen mozog, tehát a rá ható erők eredője is és a forgatónyomatékok eredője is *nulla.* Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket.




A kútgyűrűre a pallókkal párhuzamos irányban ható erők egyensúlyi feltétele $F+S=mg\sin\alpha$, amit

$$F+S=mg\frac{h}{s} \tag{1}$$

alakban is felírhatunk. (Látni fogjuk, hogy az ábrán jelölt irányítás mellett $S>0$, tehát a kútgyűrű és a pallók közötti súrlódás csökkenti a munkások által kifejtendő $F$ erő nagyságát.)

Az $F$ erőt felbonthatjuk $F\sin\varphi$ nagyságú tangenciális (érintőirányú) és $F\cos\varphi$ nagyságú radiális (sugárirányú) komponens összegére. A kútgyűrű szimmetriatengelyére vonatkoztatva csak az $F$ erő tangenciális komponensének, valamint a pallók és a kútgyűrű közötti $S$ súrlódási erőnek van forgatónyomatéka. Így a forgatónyomatékok egyensúlyi feltétele:

$$F\sin\varphi\cdot R-SR=0,\qquad \text{vagyis}\qquad S=F\sin\varphi. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből kapjuk, hogy

$$F=\frac{mgh}{s(1+\sin\varphi)}.$$

Mivel a szinuszfüggvény $0<\varphi<\pi/2$ intervallumon monoton növekvő, $F$ legkisebb értékét $\varphi$ legnagyobb értéke adja meg:

$$F_{\min}=\frac{mgh}{s(1+\sin\varphi_{\max})}.$$

A $\varphi$ szög legnagyobb értékét az a feltétel határozza meg, hogy a munkások keze és a kútgyűrű közötti (érintőirányú) súrlódási erő nem lehet nagyobb, mint az általuk kifejtett, sugárirányú nyomóerő $\mu=0{,}8$-szerese:

$$F\sin\varphi\leqslant\mu F\cos\varphi,\qquad \text{vagyis}\qquad \operatorname{tg}\varphi\leqslant\mu.$$

Ezek szerint

$$\varphi \leqslant \varphi_{\max} = \operatorname{arctg} \mu = 38{,}7°,$$

és így

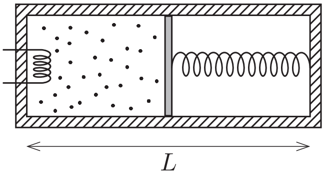
$$F_{\min} = \frac{mgh}{s(1+\sin\varphi_{\max})} \approx 362\ \mathrm{N}.$$

(Érdekes, hogy ez az eredmény *nem függ* a kútgyűrű $R$ sugarától.)

A megoldás során sehol nem hivatkoztunk a mozgás irányára, tehát az eredmény egyaránt érvényes a felfelé lassan görgetett, illetve az óvatosan leeresztett kútgyűrűre is.

*Halász Henrik* (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

27 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Csilling Dániel, Csiszár András és Halász Henrik megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 17, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.



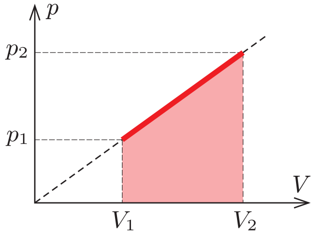

**P. 5457.** *Hőszigetelt, hengeres tartály belső hossza L. A tartályt egy hőszigetelő dugattyú két részre osztja; a bal oldali térfélben egyatomos ideális gáz, a jobb oldaliban vákuum van (lásd az ábrát). A dugattyút a tartály jobb oldali végével rugó köti össze, melynek feszítetlen hossza L. A gázt a bal oldali térfélben lévő fűtőszál segítségével lassan melegíteni kezdjük.*

*Határozzuk meg a gáz mólhőjét ebben a folyamatban!*

(*5 pont*) Oroszországi feladat nyomán

**I. megoldás.** Legyen a dugattyú keresztmetszete $A$, a rugóállandó pedig $D$. A rugó összenyomódása megegyezik a gáztér hosszával; jelöljük ezt a távolságot $\Delta\ell$-lel. A dugattyúra a gáz ugyanakkora erőt fejt ki, mint az összenyomott rugó:

$$pA = D\,\Delta\ell.$$




A gáz nyomása tehát egyenesen arányos $\Delta\ell$-lel. Mivel a gáz $V = A\Delta\ell$ térfogata is egyenesen arányos $\Delta\ell$-lel, megállapíthatjuk, hogy $p$ egyenesen arányos $V$-vel:

$$\frac{p}{V} = \text{állandó}.$$

A gáz állapotváltozása a $p$–$V$ grafikonon egy – az origóból induló – egyenessel szemléltethető.

A hőtan I. főtétele szerint a gázzal közölt $Q$ hő a gáz $E_\mathrm{b}$ belső energiáját növeli és a tágulási munkát fedezi:

$$Q = \Delta E_\mathrm{b} + W'_{\text{tágulási}}. \tag{1}$$

Legyenek a leírt folyamatban a gáz két különböző állapotának állapotjelzői $(p_1, V_1)$ és $(p_2, V_2)$. Ekkor a tágulási munka (ami a piros vonal alatti rózsaszínű trapéz területével egyezik meg) két derékszögű háromszög területének különbségeként kapható meg:

$$W'_{\text{tágulási}} = \frac{p_2V_2}{2} - \frac{p_1V_1}{2} = \Delta\left(\frac{pV}{2}\right).$$

Az $f$ szabadsági fokú molekulákból álló ideális gáz belső energiája így számítható ki:

$$E_{\mathrm{b}} = \frac{f}{2}pV.$$

Jelen esetben egyatomos gázról van szó, így $f=3$, tehát

$$\Delta E_{\mathrm{b}} = \frac{3}{2}\,\Delta(pV).$$

Ezek szerint a közölt hő (1)-nek megfelelően

$$Q = 2\cdot\Delta(pV).$$

Tudjuk még, hogy az ideális gáz állapotegyenlete:

$$pV = nRT, \qquad \text{vagyis} \qquad \Delta(pV) = nR\cdot\Delta T,$$

és így a mólhő (mólnyi mennyiség hőkapacitása) ebben a folyamatban

$$C_{\mathrm{m}} = \frac{Q}{n\,\Delta T} = 2R.$$

*Klement Tamás* (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

**II. megoldás.** Miközben a gáz belső energiáját megnöveljük, a rugót is össze kell nyomjuk, ezért a fűtőszál által közölt hő egyenlő a gáz belső energiájának és a rugó rugalmas energiájának együttes megváltozásával:

$$Q = \Delta E_{\text{belső}} + \Delta E_{\text{rugalmas}}. \tag{1}$$

Legyen a rugó pillanatnyi összenyomódása $\ell$, a rugóállandó $D$, a dugattyú keresztmetszete $A$, a gáz állapotjelzői pedig a szokásos $p$, $V$ és $T$. Tekintsük a rendszer 1-es és a 2-es állapota közötti változásokat. Az erőegyensúly feltétele:

$$p_1A = D\ell_1 \qquad \text{és} \qquad p_2A = D\ell_2,$$

a gáztérfogatok pedig

$$V_1 = A\ell_1 \qquad \text{és} \qquad V_2 = A\ell_2.$$

A rugóenergia megváltozása kifejezhető a nyomásokkal, a térfogatokkal és a hőmérsékletekkel is:

$$\Delta E_{\text{rugalmas}} = \frac{1}{2}D\ell_2^2 - \frac{1}{2}D\ell_1^2 = \frac{1}{2}p_2A\ell_2 - \frac{1}{2}p_1A\ell_1 = \frac{1}{2}p_2V_2 - \frac{1}{2}p_1V_1 = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}nRT_2 - \frac{1}{2}nRT_1 = \frac{1}{2}nR\Delta T,$$

az egyatomos ($f=3$ szabadsági fokú) gáz belső energiájának megváltozása pedig

$$\Delta E_{\text{belső}}=\frac{f}{2}nRT_2-\frac{f}{2}nRT_1=\frac{3}{2}nR(T_2-T_1)=\frac{3}{2}nR\Delta T. \tag{3}$$

A rendszerrel közölt hő (1), (2) és (3) szerint

$$Q=2nR\Delta T,$$

így a folyamatban a mólhő:

$$C_{\mathrm{m}}=\frac{Q}{n\,\Delta T}=2R=16{,}63\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}.$$

*Beke Botond* (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

45 dolgozat érkezett. Helyes 31 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

**P. 5458.** *Három telep mindegyike* 12 V *üresjárási feszültségű és* 3 Ω *belső ellenállású. A telepek milyen kapcsolása esetén kapjuk az R külső ellenálláson a legnagyobb teljesítményt, és mekkora ez a teljesítmény, ha*

*a*) $R=1\ \Omega$;

*b*) $R=3\ \Omega$;

*c*) $R=3{,}5\ \Omega$;

*d*) $R=6\ \Omega$?

(*4 pont*) Közli: *Székely György,* Budapest

**Megoldás.** Három egyforma telepet négyféle módon kapcsolhatunk össze. (Nem foglalkozunk azokkal az esetekkel, amikor nem mindegyik telepet használjuk, illetve az eltérő polaritással összekapcsolt telepekkel.)

A eset: a három telepet sorosan kapcsoljuk;

B eset: mindhárom telepet párhuzamosan kapcsoljuk;

C eset: két telepet sorosan kapcsolunk, a harmadikat velük párhuzamosan kötjük be;

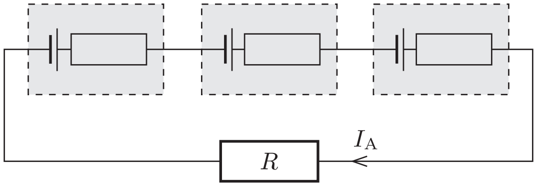
D eset: két telepet párhuzamosan kapcsolunk, majd a harmadikat sorosan kötjük hozzájuk.

Számítsuk ki mind a négy esetben, hogy mekkora áram folyik egy $R$ nagyságú külső ellenálláson. (A feszültséget volt, az ellenállásokat ohm, az áramokat amper, a teljesítményt pedig watt egységekben mérjük, de a mértékegységeket nem írjuk ki.)

*A eset.*

A telepek üresjárati feszültsége összeadódik (tehát 36 lesz), a belső ellenállások ugyancsak összeadódnak (tehát a nagyságuk 9 lesz), így az áramerősség a külső terhelésen

$$I_{\mathrm{A}}=\frac{36}{R+9},$$

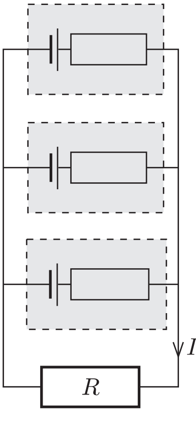



az $R$ ellenállásra jutó teljesítmény pedig

$$P_A = I_A^2 R = \left(\frac{36}{R+9}\right)^2 R.$$

$R$ helyébe rendre 1; 3; 3,5 és 6-ot helyettesítve (két jegy pontossággal számolva) kapjuk, hogy $P_A^a = 13$, $P_A^b = 27$, $P_A^c = 29$, $P_A^d = 35$.

*B eset.*




A párhuzamosan kapcsolt telepek üresjárati feszültsége marad 12, de a belső ellenállásuk harmadolódik (hiszen a főág áramának $\frac{1}{3}$ része folyik csak át rajtuk), tehát 1 lesz. Ennek megfelelően

$$I_B = \frac{12}{R+1}$$

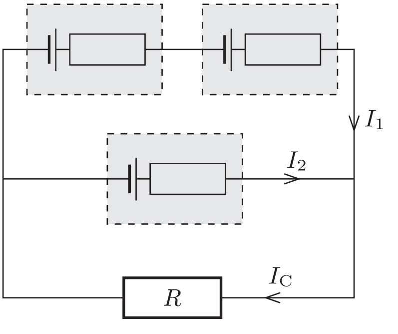
és

$$P_B = I_B^2 R = \left(\frac{12}{R+1}\right)^2 R,$$

vagyis $P_B^a = 36$, $P_B^b = 27$, $P_B^c = 25$, $P_B^d = 18$.

Kicsit bonyolultabban számolhatók a vegyes kapcsolások.

*C eset.*




Az *ábra* jelöléseinek megfelelően Kirchhoff I. és II. törvénye szerint

(1) $$I_C = I_1 + I_2,$$

(2) $$24 - 6I_1 = 12 - 3I_2,$$

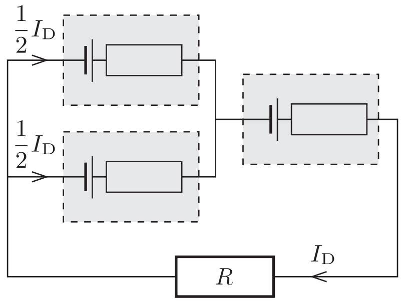
(3) $$12 - 3I_2 - RI_C = 0.$$

Az (1)–(3) lineáris egyenletrendszert megoldva kapjuk:

$$I_C = \frac{16}{R+2}, \quad P_C = I_C^2 R = \left(\frac{16}{R+2}\right)^2 R,$$

és ennek megfelelően

$$P_C^a = 28, \qquad P_C^b = 31, \qquad P_C^c = 30, \qquad P_C^d = 24.$$




*D eset.*

Ha a főág áramerőssége $I_\mathrm{D}$, akkor a párhuzamosan kapcsolt telepek mindegyikén $\frac{1}{2}I_\mathrm{D}$ erősségű áram folyik. Kirchhoff huroktörvényét alkalmazva:

$$12-\frac{3}{2}I_\mathrm{D}+12-3I_\mathrm{D}-RI_\mathrm{D}=0,$$

vagyis

$$I_\mathrm{D}=\frac{24}{R+4{,}5},$$

a teljesítmény pedig

$$P_\mathrm{D}=I_\mathrm{D}^2R=\left(\frac{24}{R+4{,}5}\right)^2R,$$

azaz $P_\mathrm{D}^a=19$, $P_\mathrm{D}^b=31$, $P_\mathrm{D}^c=32$, $P_\mathrm{D}^d=31$.

A kapott eredményeket a külső ellenállás nagysága szerint rendezve látjuk, hogy

*a*) az 1 $\Omega$-os ellenállásra a párhuzamos kapcsolásnál jut a legnagyobb teljesítmény, 36 W;

*b*) a 3 $\Omega$-os ellenállásra a vegyes kapcsolásoknál jut a legnagyobb teljesítmény, egyaránt 31 W;

*c*) a 3,5 $\Omega$-os ellenállásnál a D esetnek megfelelő kapcsolásban legnagyobb a teljesítmény, nevezetesen 32 W;

*d*) a 6 $\Omega$-os ellenállásnál a telepek soros kapcsolásánál legnagyobb a teljesítmény, nagysága 35 W.

*Fórizs Borbála* (Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)

49 dolgozat érkezett. Helyes a „bármi jó” csapat (Esztinka Anna Karolina, Szalóki Szonja), Bunford Luca, Fórizs Borbála, Molnár Kristóf és Tatár Ágoston megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 16, hiányos (1–2 pont) 23, nem versenyszerű 5 dolgozat.

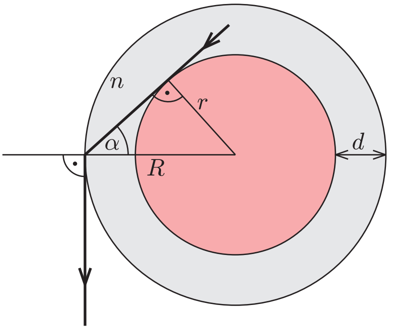
**P. 5460.** *Színes parfümöt* 4 cm *külső átmérőjű,* 10 cm *magas, állandó falvastagságú, henger alakú, $n=1{,}5$ törésmutatójú üvegben hoznak forgalomba. A parfümöt a polcon szemmagasságban helyezik el, és hátulról világítják meg. A távoli vásárlók úgy látják, mintha a hengerpalást falvastagsága nulla lenne*. Legalább hány* ml *parfüm lehet az üvegben?*

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

**Megoldás.** A hengerpalástot akkor látjuk nulla vastagságúnak, ha az üveg külső széléről olyan fénysugár érkezik a szemünkbe, amelyik áthaladt az üveg belsejében lévő színes folyadékon, vagy legalább érintette azt.

* A fénykép csak illusztráció, az üveg alakja és a falvastagsága eltér a feladatban leírtaktól.

Az *ábra* a határesetnek megfelelő fénysugarat mutatja. Az üvegedény külső sugara $R = 2$ cm, a belső sugara pedig legyen $r$. A geometriai viszonyok miatt




$$\sin\alpha = \frac{r}{R},$$

továbbá a Snellius–Descartes-törvény szerint

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}.$$

Ennek megfelelően az edény belső sugara

$$r = \frac{R}{n} = \frac{2{,}0\ \text{cm}}{1{,}5} = 1{,}33\ \text{cm},$$

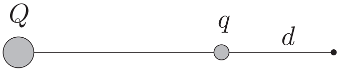
az üveghenger falvastagsága pedig $d = R - r = 0{,}67$ cm. Ugyanilyen vastag a $H = 10$ cm magas henger alsó és felső körlapja is, tehát az üvegedény belső térfogata legalább

$$V = (H - 2d)\, r^2\pi \approx 48\ \text{ml}.$$

*Szabó Zsombor* (Esztergomi Dobó Katalin Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

6 dolgozat érkezett. Teljes értékű megoldás nem volt. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (2 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

**P. 5469.** *Súlytalanságban egy rögzített* $Q = 6\cdot 10^{-7}$ C *értékű ponttöltés elektromos mezejében egy* $q = 4\cdot 10^{-7}$ C *töltésű,* $m = 3$ g *tömegű pontszerű test mozog. Kezdősebesség nélkül indulva* $d = 0{,}8$ m *távolság megtétele közben sebessége* $v = 2$ m/s *értékre növekedett.*




*Mekkora volt a két töltés távolsága kezdetben?*

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

**Megoldás.** A kisebb töltés Coulomb-energiájának egy része átalakul mozgási energiává:

$$k\frac{Qq}{r} = k\frac{Qq}{r+d} + E_\text{m}, \tag{1}$$

ahol $r$ a két töltés kezdeti távolsága.

Tudjuk, hogy

$$E_\text{m} = \frac{1}{2}mv^2 = 6\cdot 10^{-3}\ \text{J},\quad \text{továbbá}\quad kQq \equiv a = 2{,}15\cdot 10^{-3}\ \text{Jm}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{a}{r} = \frac{a}{r+d} + E_{\mathrm{m}},$$

$$ad = r^2 E_m + rdE_{\mathrm{m}},$$

$$E_{\mathrm{m}} r^2 + E_{\mathrm{m}} dr - ad = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a pozitív megoldása $r = 0{,}268$ m $\approx 27$ cm, ekkora volt tehát a két töltés kezdeti távolsága.

*Fajszi Karsa* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

62 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 8, hibás 18, nem versenyszerű 4 dolgozat.

## Fizikából kitűzött feladatok

**M. 422.** Tartsunk egy rúdmágnest merőlegesen egy viszonylag nagy méretű vaslaphoz közel. Mérjük meg a rúdmágnesre ható mágneses erőt a fémlaptól mért távolság függvényében!

(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

**G. 813.** Egy toronyház tetejéről sorozatfelvételt készítettünk a ház melletti utca forgalmáról. A kiválasztott két felvétel egymást követően 4/15 másodperc időkülönbséggel készült az egyenletesen haladó gépkocsikról. Becsüljük meg a gépkocsik úttesthez viszonyított sebességét, ha az úttestet kettéosztó fehér, szaggatott választóvonal egy szakaszának hossza kb. 2 méter.

(*3 pont*) *Öveges József Országos Fizikaverseny* feladata nyomán

**G. 814.** Egy nagy tömegű, nyitott vasúti kocsi vízszintes, egyenes pályán halad $v$ sebességgel. A kocsin lévő könnyű játékágyúval az ágyúhoz képest $2v$ sebességgel tudunk lövedékeket kilőni. A vízszinteshez képest milyen szögben lője ki az ágyú a lövedékét, hogy az visszaessen a vasúti kocsira? A kilövés után mennyi idővel esik vissza a lövedék a kocsira? (A légellenállástól tekintsünk el.)

(*3 pont*)