Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (851–853.)

A. 851. Legyenek k, l és m pozitív egész számok. Legyen $ABCDEF$ egy olyan középpontosan szimmetrikus hatszög, melynek szögei mind $120°$-osak, oldalainak hosszai pedig $AB=k$, $BC=l$ és $CD=m$. Jelölje $f(k,l,m)$ azt, hogy hányféle módon lehet az $ABCDEF$ hatszöget átfedés nélkül lefedni olyan egységoldalú rombuszokkal, melyek egyik szöge $120°$.

Bizonyítsuk be, hogy rögzített l és m mellett létezik olyan $g_{l,m}$ polinom, melyre minden pozitív egész k esetén $f(k,l,m)=g_{l,m}(k)$, és állapítsuk meg $g_{l,m}$ fokát l és m függvényében.

Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

A. 852. Legyenek (a_i,b_i) páronként különböző számpárok, ahol $1\leqslant i\leqslant n$-re a_i és b_i pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)>\frac{2}{9}n^3,$$

és mutassuk meg, hogy az állítás éles, azaz bármilyen $c>\frac{2}{9}$ esetén lehetséges, hogy

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)<cn^3.$$

Javasolta: OKTV feladat alapján *Pach Péter Pál* (Budapest)

A. 853. Az általános helyzetű A, B, C, A', B', C' pontokról tudjuk, hogy az AA', BB', CC' egyenesek mind érintik ugyanazt az egyenlő szárú hiperbolát rendre az A, B és C pontokban, továbbá hogy az $A'B'C'$ háromszög körülírt köre megegyezik az ABC háromszög Feuerbach-körével. Jelölje $s(A')$ az A' pontnak az ABC háromszög talpponti háromszögéhez tartozó Simson-egyenesét, A^* pedig legyen az A-ból az $s(A')$-re állított merőlegesnek és a $B'C'$ egyenesnek a metszéspontja. Hasonlóan definiáljuk a B^* és C^* pontokat. Mutassuk meg, hogy az A^*, B^* és C^* pontok egy egyenesen vannak.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄