

C. 1765. A szabályos négyoldalú $ABCDE$ gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, a gúla minden éle 32 egység hosszúságú. Egy csiga az E csúcsból az A pontba igyekszik a következő módon: először az EA élen abba a P pontba jut el, amelyre $EP = 2$. Innen az ABE lap felületén haladva az EB él Q pontjába érkezik, ahol $EQ = 4$. Ezután a BCE lap felületén az EC él azon R pontjába mászik, amelyre $ER = 8$, innen pedig a CDE lapon az ED élen levő S pontba, ahol $ES = 16$. Végül az S -ből az A pontba mászik a DAE lap felületén. Legalább mekkora távolságot tesz meg összesen a csiga?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1766. Mutassuk meg, hogy minden háromszögben (a szokásos jelöléseket használva) teljesül, hogy

$$\sqrt{a \sin \alpha} + \sqrt{b \sin \beta} + \sqrt{c \sin \gamma} = \sqrt{(a + b + c)(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)}.$$

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

C. 1767. Adott 2 darab 7-es, 3 darab 17-es, 5 darab 119-es, 7 darab 289-es, 11 darab 2023-as és n darab 1-es érme. Az érmék közül véletlenszerűen kiválasztunk egyszerre kettőt, amelyeknek az értékét összeszorozzuk és így éppen 2023-at kapunk. Határozzuk meg n értékét, ha tudjuk, hogy a megfelelő kiválasztás valószínűsége $\frac{12}{55}$.

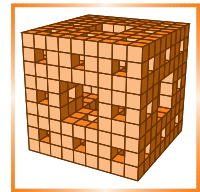
Javasolta: *Teleki Olivér* (Tököl)

Beküldési határidő: 2023. május 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5310–5317.)



B. 5310. Egy stratégiai játékot négy csapat játszik egy $n \times n$ -es négyzetrácsra rajzolt térképen ($n \geq 3$). Minden négyzet alakú mező víz vagy szárazföld. A négy csapat bázisa a térkép négy sarkában, szárazföldön van. Tudjuk, hogy a térképen egyetlen nagy, összefüggő vízfelület van, és hogy semelyik két bázis között nem vezet út végig szárazföldön haladva. Legalább hány mezőt foglal el víz? (Egy út során akkor léphetünk egyik mezőről a másikra, ha közös élen találkoznak. A vízfelület olyan értelemben összefüggő, hogy bármely mezőjéről bármelyikre vezet ilyen út csak vizes mezőkön keresztül.)

(4 pont)

Javasolta: *Williams Kada* (Cambridge)

B. 5311. Igaz-e, hogy ha egy háromszög mindhárom szögének szinusza racionális, akkor mindhárom szög koszinusza is racionális?

(3 pont)

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5312. Jelölje F_k a k -edik Fibonacci-számot ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$). Bizonyítsuk be, hogy

$$2 \sum_{k=1}^n F_k^2 F_{k+1} = F_n F_{n+1} F_{n+2}$$

teljesül minden pozitív egész n számra.

(3 pont)

Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5313. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC < AB < BC$. A körülírt kör középpontja O , a magasságpont M . Az AB oldal felezőmerőlegese az AM egyenest a P pontban, az OMP kör a BM egyenest másodszor az M -től különböző Q pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a BC egyenes érinti az ABQ kört.

(4 pont)

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

B. 5314. Legyen S egy n -elemű halmaz, $1 \leq k \leq n$ pedig páratlan egész szám. Legfeljebb hány részhalmaza választható ki S -nek úgy, hogy semelyik kettő szimmetrikus differenciája ne legyen pontosan k -elemű?

(5 pont)

Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5315. Tekintsünk egy ABC háromszöget. Az AB oldal meghosszabbításán, B -n túl vegyük fel a B' pontot, továbbá az AC oldal meghosszabbításán, C -n túl vegyük fel a C' pontot úgy, hogy $BB' = CC'$ teljesüljön. Jelölje k , illetve k' az ABC' háromszög, illetve az $AB'C$ háromszög körülírt körét. Bizonyítandó, hogy k és k' közös húrja az A -ból induló szögfelezőre esik.

(5 pont)

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5316. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a, b < 1$, akkor

$$(a + b - ab)(a^b + b^a) > a + b.$$

(6 pont)

Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5317. A zárt pozitív ortánsban fekvő, $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ fókuszú ellipszis a koordináta-tengelyeket a p abszcisszájú, illetve a q ordinátájú pontokban érinti. Mutassuk meg, hogy a $(p; q)$ pont kollineáris az origóval és az ellipszis centrumával, és számítsuk ki az ellipszis numerikus excentricitását.

(6 pont)

Javasolta: *László Lajos* (Budapest)

Beküldési határidő: 2023. május 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>