Mivel a kapott eredmény a $]0;15[$ intervallumon teljesül, így megállapítható, hogy a D pontra kapott 3,47 óra alacsonyabb az A pontbeli 3,5 óránál, valamint a B pontbeli 4,03 óránál is, vagyis a $[0;15]$ intervallumon, tehát a teljes AB szakaszon a D pontban történő kikötésnél lesz a szállítási idő a legkisebb.

Megjegyzés. Belátható, hogy a minimális idő $v_{\text{hajó}} \geqslant v_{\text{kamion}}$, valamint

$$\arcsin\left(\frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}}\right) \geqslant AHB\sphericalangle$$

esetén a HBC úthoz tartozik, egyébként pedig abban a D pontban érdemes kikötnie a hajónak, amelyre $\frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}} = \sin AHD\sphericalangle$ teljesül. A feladatban szereplő adatokkal $AD = \sqrt{6}$, $HD = \sqrt{150}$, és így valóban

$$\sin AHD\sphericalangle = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = \frac{1}{5} = \frac{8}{40} = \frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}}.$$

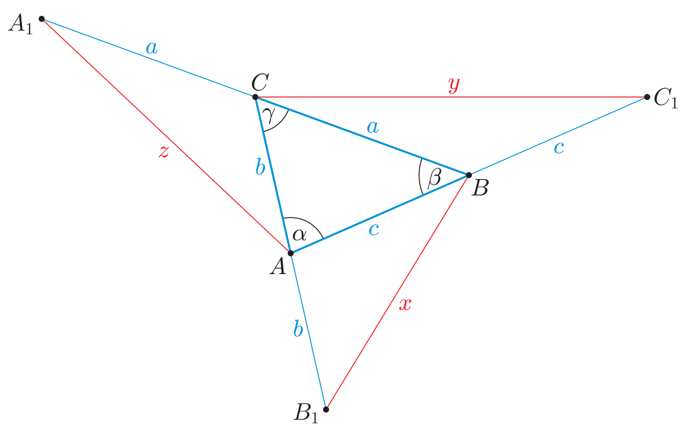
Koncz Levente
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5255. *Tükrözzük középpontosan az ABC háromszög A csúcsát B-re, B csúcsát C-re, és C csúcsát A-ra, így kapjuk rendre a C_1, A_1 és B_1 pontokat. Mutassuk meg, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 hosszúságú oldalakkal háromszög szerkeszthető.*

(3 pont)

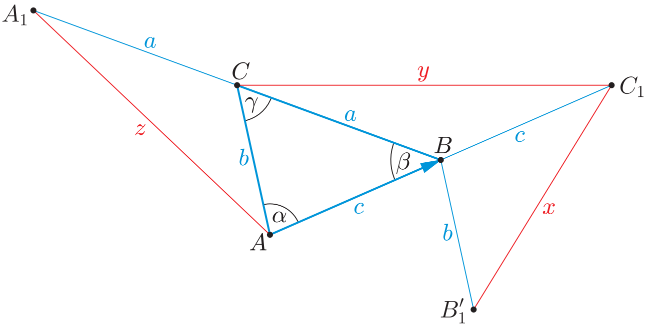
I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.



1. ábra

Mivel kiegészítőszögek, ezért $BAB_1\sphericalangle = 180° - \alpha$, $CBC_1\sphericalangle = 180° - \beta$, illetve $ACA_1\sphericalangle = 180° - \gamma = \alpha + \beta$.

Toljuk el az AB_1B háromszöget a $\overrightarrow{BC_1}$ vektorral. Ekkor az A csúcs B-be, a B csúcs pedig C_1-be kerül.



2. ábra

A fentiek alapján: $ABB_1'\sphericalangle = 180° - BAB_1\sphericalangle = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

Mivel két oldal ($A_1C = CB = a$ és $BB_1' = AC = b$) és az általuk bezárt szög ($CBB_1'\sphericalangle = A_1CA'\sphericalangle = \alpha + \beta$) egyenlő, ezért az $A_1CA\triangle \approx CBB1'\triangle$, amiből következik, hogy $CB_1' = z$. Az x, y és z oldalakkal tehát szerkeszthető háromszög ($CB_1'C_1\triangle$).

Geretovszky Márton (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Többen oldották meg hasonló módszerrel: az ábrából különféle geometriai transzformációkkal eljutottak egy másik ábrába, ahol megjelenik egy háromszög a három szükséges oldallal. Általában eltolásokat vagy tükrözéseket alkalmaztak. Sokan hiányosan indokolták meg, hogy különböző transzformációk a különböző pontokat miért viszik ugyanabba a pontba.

II. megoldás. Használjuk az 1. ábra jelöléseit. A háromszög-egyenlőtlenség alapján a BC_1C háromszögben $a + c > y$, valamint az ABA_1 háromszögben $c + z > 2a$.

A súlyvonalak hosszáról ismert egyenlőtlenség szerint pl. az a oldalhoz tartozó súlyvonal hosszára $s_a < \frac{b+c}{2}$, így a B_1BC háromszögben felírható, hogy $c < \frac{a+x}{2}$.

A három egyenlőtlenség rendezve:

$$a + c > y,$$
$$2a - c < z,$$
$$2c - a < x.$$

Az utolsó két egyenlőtlenséget összeadva:

$$2a - c + 2c - a < z + x,$$
$$a + c < z + x.$$

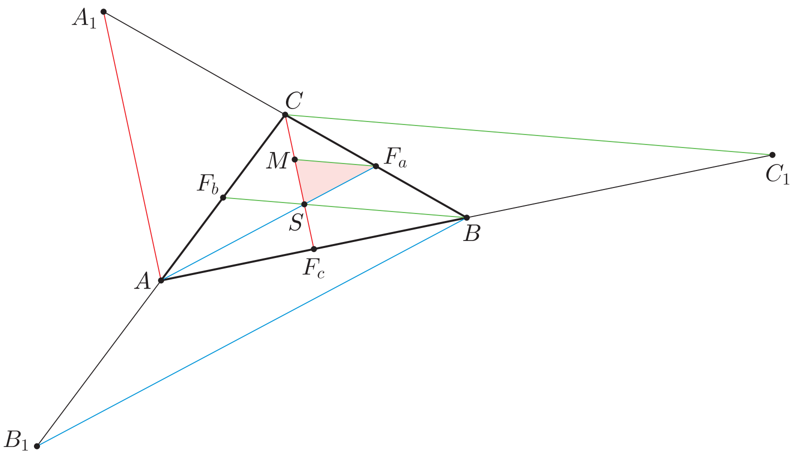
Mivel $a+c>y$, ezért $y<a+c<z+x$, és így $y<z+x$.

Hasonlóan belátható, hogy $x<y+z$ és $z<x+y$, vagyis az x, y és z szakaszokra érvényes a háromszög-egyenlőtlenség, tehát a három szakasszal szerkeszthető háromszög.

Borsos Balázs(Brüsszel, European School of Brussels I, 11. évf.)

Megjegyzés. Ennél a módszernél a legtöbb megoldás hibás volt, az esetek zömében a megoldók rosszul kezelték az egyenlőtlenségrendszereket, és olyan következtetésekre jutottak, melyek nem feltétlenül igazak (pl.: egyenlőtlenségnél a nagyobb oldalt csökkentették); vagy olyan részmegoldást adtak, amely csak hegyesszögű háromszögre érvényes.

III. megoldás. Használjuk a *3. ábra* jelöléseit, ahol F_a, F_b, F_c a megfelelő oldalak felezőpontját, S pedig a súlypontot jelöli.



3. ábra

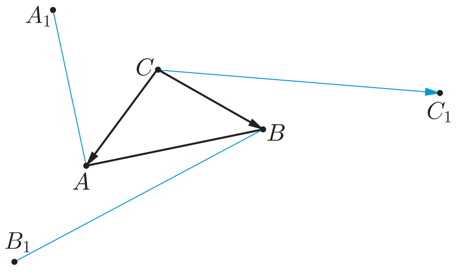
Rajzoljuk meg az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalát. Ez a B_1BC háromszög középvonala lesz, mert a tükrözés miatt A felezőpont, F_a pedig szintén felezőpont. Tehát BB_1 kétszer olyan hosszú, mint AF_a, és a két szakasz párhuzamos.

Hasonlóan belátható, hogy AA_1 kétszer olyan hosszú, mint CF_c, és párhuzamos vele; illetve CC_1 kétszer akkora, mint BF_b, és párhuzamos vele.

Legyen a CS szakasz felezőpontja M. Tekintsük most az MSF_a háromszöget. Ebben az MS szakasz harmada a CF_c szakasznak (hiszen a súlyvonalak harmadolják egymást, M pedig CS felezőpontja). F_aS harmada AF_a-nak (ugyanezen ok miatt). Az F_aM szakasz középvonala a BSC háromszögnek, mert F_a és M is felezőpont. Mivel az SB szakasz $\frac{2}{3}$-szorosa az F_bB szakasznak, ezért F_aM harmada lesz F_bB-nek.

Mivel az MSF_a háromszög oldalai harmadai a súlyvonalaknak, ezért ha ezt a háromszöget a háromszorosára nagyítjuk, akkor a kapott háromszög oldalainak hossza éppen a három súlyvonal lesz. Korábban megmutattuk, hogy a súlyvonalak fele olyan hosszúak, mint a hozzájuk tartozó XX_1 szakaszok, vagyis ha a súlyvonalakból szerkesztett háromszöget még a kétszeresére nagyítjuk, akkor olyan háromszöget kapunk, amelyben az oldalak hossza éppen az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok hosszával egyezik meg. Ezzel megmutattuk, hogy ilyen háromszög szerkeszthető.

Juhász-Molnár Erik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)



4. ábra

IV. megoldás. A felezőpontra ismert formula szerint

$$\overrightarrow{CB} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC_1}}{2},$$

amiből $\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. Hasonlóan láthatjuk, hogy $\overrightarrow{BB_1} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Ezeket összeadva

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) + (2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) + (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$$
$$= 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) = \mathbf{0}.$$

Továbbá vegyük észre, hogy

$$\overrightarrow{AA_1} + 4\overrightarrow{BB_1} - 2\overrightarrow{CC_1} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 8\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA} = 9\overrightarrow{BA}.$$

Hasonlóan,

$$\overrightarrow{BB_1} + 4\overrightarrow{CC_1} - 2\overrightarrow{AA_1} = 9\overrightarrow{CB} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CC_1} + 4\overrightarrow{AA_1} - 2\overrightarrow{BB_1} = 9\overrightarrow{AC}.$$

Így az $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ és $\overrightarrow{CC_1}$ vektorok nem lehetnek egymással párhuzamosak, mert akkor ABC oldalvektorai is párhuzamosak lennének.

Így $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ és $\overrightarrow{CC_1}$ egy nem elfajuló háromszög oldalvektorai, amiből az állítás azonnal következik.

Megjegyzés. Negatív osztási arányt is értelmezve az osztópontba mutató vektorra vonatkozó ismert formula általánosítható arra az esetre, ha az osztópont nem belső pontja a pontok által meghatározott szakasznak, de illeszkedik az egyenesükre. Tulajdonképpen ezt használtuk a megoldásban.

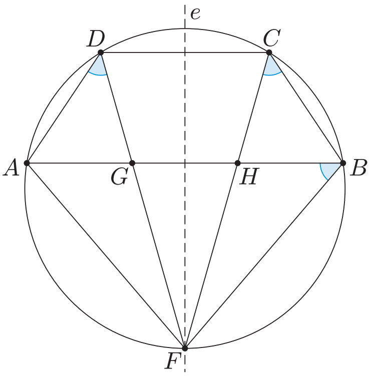
191 dolgozat érkezett. 3 pontos 94, 2 pontos 15, 1 pontos 5, 0 pontos 62 dolgozat. Nem versenyszerű: 6 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 3 dolgozat.

Megjegyzés. A viszonylag sok 0 pontos megoldás annak köszönhető, hogy sokan nem olvasták el rendesen a szöveget, és pl. A tükörképét A_1-gyel jelölték. Így azonban egy lényegesen egyszerűbb feladatot oldottak meg.

B. 5260. *A k kör AB húrjának G és H pontjaira $AG = GH = HB = 1$. A kör egyik AB ívének felezőpontja legyen F. Az FH és FG szelők a kört másodszor a C, illetve D pontban metszik. Mutassuk meg, hogy $CD = BC^2$.*

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

I. megoldás. Legyen AB felezőmerőlegese az e egyenes.



Az e-re vonatkozó tengelyes tükrözés után A képe B, G képe H, F a tengely pontja, továbbá a k kör képe is önmaga. Látjuk, hogy $FG=FH$, az FGH háromszög egyenlő szárú. A szimmetria alapján D pont képe a C lesz, hiszen FG képe FH és k a helyén marad. Az eddigiek alapján GH és CD is merőleges e-re, tehát párhuzamosak. $FHG\sphericalangle = FGH\sphericalangle = FDC\sphericalangle = FCD\sphericalangle$. Az FGH és FDC egyenlőszárú háromszögek hasonlók:

$$\frac{CD}{GH}=\frac{FC}{FH}. \tag{1}$$

A szimmetria és a kerületi szögek tétele alapján $BCF\sphericalangle = ADF\sphericalangle = ABF\sphericalangle$. Emiatt $FCB\triangle \sim FHB\triangle$ (van két egyforma és egy közös szögük), így az egymásnak megfelelő oldalak aránya megegyezik.

$$\frac{FC}{FB}=\frac{FB}{FH}=\frac{BC}{HB}.$$

Az ebben szereplő arányokból kifejezhető FC és FH, amelyekkel felírható e két oldal aránya:

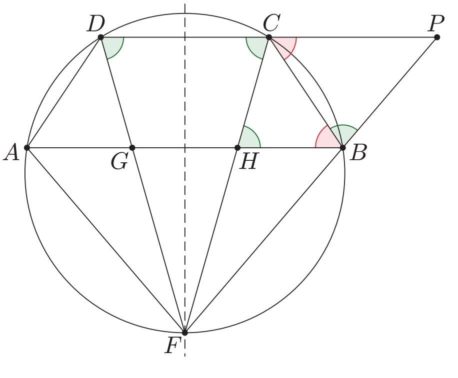
$$\frac{FC}{FH}=\frac{\frac{FB\cdot BC}{HB}}{\frac{FB\cdot HB}{BC}}=\frac{BC^2}{HB^2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) alapján, felhasználva, hogy GH és HB egységnyi hosszúságúak kapjuk, hogy

$$\frac{FC}{FH}=CD=BC^2.$$

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az első megoldásban leírtak szerint, a tengelyes tükrözés alapján $GH \parallel CD$ és $FDC\sphericalangle = FCD\sphericalangle$. Kapjuk azt is, hogy $CHB\sphericalangle = FCD\sphericalangle$, mivel váltószögek. E kettőből $FDC\sphericalangle = CHB\sphericalangle$.



Legyen FB és DC félegyenesek metszéspontja a P pont. A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján

$$\frac{GH}{DC}=\frac{FH}{FC}=\frac{HB}{CP}.$$

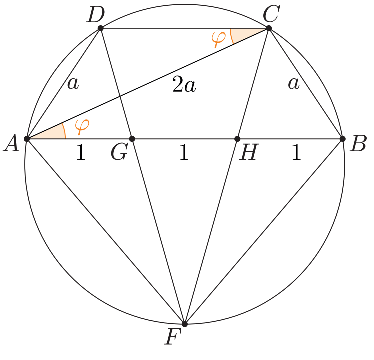
A GH és HB szakaszok egyenlősége miatt $DC=CP$.

Most belátjuk, hogy $PCB\triangle \sim CBH\triangle$. $PCB\sphericalangle = CBH\sphericalangle$, mert váltószögek. Az $FBCD$ húrnégyszög szemközti szögeinek összege $180°$, a $PBC\sphericalangle$ az $FBC\sphericalangle$ mellékszöge, tehát $PBC\sphericalangle = FDC\sphericalangle$. Korábban láttuk, hogy $FDC\sphericalangle = CHB\sphericalangle$, így $= PBC\sphericalangle = CHB\sphericalangle$. PCB és CBH háromszögek két-két szöge megegyezik, a két háromszög valóban hasonló. A megfelelő oldalak arányából

$$\frac{BC}{HB} = \frac{CP}{BC}.$$

Rendezés után $HB = 1$ és $CP = CD$ ismeretében a bizonyítandó állítást kapjuk: $CD = BC^2$.

Zömbik Barnabás (Budapest, V. ker. Eötvös József Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján



III. megoldás. Az F pont felezi az AB ívet, így az ACB háromszögben CF belső szögfelező. A szögfelezőtételből $AC : CB = AH : HB = 2$, tehát ha $BC = a$, akkor $AC = 2a$.

Az *ábra* szimmetrikus az F-en átmenő átmérőre, az $ABCD$ húrnégyszög szimmetrikus trapéz. Legyen $CD = b$ hosszúságú. Az $ACD\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ szögek váltószögek, jelöljük ezek nagyságát φ-vel.

Most írjuk fel a koszínusztételt az ACD és CAB háromszögekben a φ-vel szemközti a hosszúságú oldalakra:

$$a^2 = 4a^2 + b^2 - 2 \cdot 2a \cdot b \cdot \cos\varphi,$$

$$a^2 = 4a^2 + 9 - 2 \cdot 2a \cdot 3 \cdot \cos\varphi.$$

A $\cos\varphi$-t mindkét egyenletből kifejezve és egyenlővé téve:

$$\frac{3a^2 + b^2}{4ab} = \frac{3a^2 + 9}{12a}.$$

Rendezéssel és szorzattá alakítással:

$$\frac{3a^2 + b^2}{b} = \frac{3a^2 + 9}{3} = a^2 + 3,$$

$$3a^2 + b^2 = a^2 b + 3b,$$

$$a^2 b - 3a^2 - b^2 + 3b = 0,$$

$$(a^2 - b)(b - 3) = 0.$$

A szorzat valamelyik tényezője nulla.

Ha $a^2 = b$, akkor éppen a feladatban szereplő állítást kapjuk.

Ha $b=3$, akkor a húrtrapéz téglalap, átlói a kör középpontjában felezik egymást, tehát AC átmérő, a kör sugara a. Az ABC háromszög félszabályos, $AB=a\sqrt{3}$, azaz $a=\sqrt{3}$. Ekkor is teljesül, hogy $b=3=\sqrt{3}^{\,2}=a^2$.

Mindkét esetben igaz a feladat állítása.

Melján Dávid Gergő (Kecskeméti Katona József Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

IV. megoldás. Az F pont felezi az ívet, H, G harmadolópontok, így az ábra szimmetrikus, $AD=BC$.

Számoljuk ki az $(AHGB)$ kettősviszony értékét:

$$(AHGB)=\frac{AG}{GH}:\frac{AB}{BH}=\frac{1}{1}:\frac{3}{-1}=-\frac{1}{3}.$$

Vetítsük az A, H, G, B pontokat az F pontból a körre. Ekkor A és B pontok a helyükön maradnak, a H pont a C-be, a G pont a D-be kerül. A vetítés kettősviszonytartó, ezért

$$(AHGB)=(ACDB)=\frac{AD}{DC}:\frac{AB}{BC}=-\frac{1}{3}.$$

Az AD és BC ellentétes irányításúak, továbbá $AB=3$. Ezeket felhasználva:

$$-\frac{BC}{CD}\cdot\frac{BC}{3}=-\frac{1}{3},$$

$$\frac{BC^2}{3\cdot CD}=\frac{1}{3},$$

$$BC^2=CD.$$

Chrobák Gergő (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A honlapon két további megoldás olvasható. Az egyik Ptolemeiosz tételét, a másik háromszögek hasonlóságát használja fel.

Összesen 61 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 44, 5 pontot 11 versenyző. 4 pontos 4, 3 pontos 2 versenyző dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (764–768.)

K. 764. Hetedhétországban egy hét hetedannyi napig tart, mint a Földön. Náluk egy nap 42 órás, minden óra 77 perces. Hány másodperc telik el két hét alatt Hetedhétországban, ha ott minden perc 33 másodpercig tart?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)