Megoldásvázlatok a 2023/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a) Hány olyan, egész számokból álló számhármas van, melyben a három szám szorzata 6? (Két számhármast nem tekintünk különbözőnek, ha csak a számok sorrendjében térnek el egymástól.)* *(4 pont)*

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

b) $(x+1)(x-2)(x-3)=6$; *(5 pont)*

c) $(\sin x\cos x-2\sin x)(2\sin x-1)=0$. *(5 pont)*

Megoldás. *a)* Mivel $6=3\cdot 2$, ezért ha mindhárom szám pozitív, akkor csak a $(6;1;1)$ és a $(3;2;1)$ számhármasok felelnek meg. Ám három szám szorzata akkor is pozitív, ha a számok közül pontosan kettő negatív és egy pozitív, ezért a fentiekből képezhetők még a következő megfelelő számhármasok: $(-6;-1;1)$, $(6;-1;-1)$, $(-3;-2;1)$, $(-3;2;-1)$ és $(3;-2;-1)$.

Összesen 7 megfelelő számhármas van.

b) A bal oldalon elvégezzük a kijelölt szorzásokat és nullára rendezünk: $x^3-4x^2+x=0$, majd kiemelhetünk x-et: $x(x^2-4x+1)=0$. A szorzat valamelyik tényezője nulla kell, hogy legyen, ezért $x_1=0$. Az $x^2-4x+1=0$ egyenlet megoldásai: $x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

c) Kiemelünk $\sin x$-et az első szorzótényezőből: $\sin x(\cos x-2)(2\sin x-1)=0$. A szorzat értéke pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Ha $\sin x = 0$, akkor $x_1=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, továbbá $\cos x=2$ nem lehetséges. Ha $2\sin x-1=0$, akkor $\sin x=\frac{1}{2}$, így $x_2=\frac{\pi}{6}+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$ vagy $x_3=\frac{5\pi}{6}+m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

2. *Az úgynevezett normál zenei A hang frekvenciája* 440 Hz. *Az egy oktávval magasabb A hang frekvenciája éppen kétszer ekkora, azaz* 880 Hz. *Közöttük* 11 *„félhang” van, ld. a* táblázatot.

hang neve	frekvencia (Hz)
A	440
B	
H	
C	
Cisz	
D	
Disz	
E	
F	
Fisz	
G	
Gisz	
A′	880

Két szomszédos félhang frekvenciájának hányadosa állandó, jelölje ezt az állandót q.

a) Igazoljuk, hogy q értéke öt tizedesjegy pontossággal 1,059 46. *(4 pont)*

b) Határozzuk meg a táblázatban az egymás után következő félhangok hiányzó frekvenciáit egész Herzre kerekítve. *(3 pont)*

Ha két hang egyszerre szólal meg, az emberi fül általában azokat a hangközöket hallja „szépnek”, amelyekben a két megszólaló hang frekvenciájának hányadosa minél „egyszerűbb” törttel fejezhető ki. A kvint *hangköz* *például két olyan hang együttes megszólalását jelenti, melyek 7 félhangnyi távolságra vannak egymástól. A két hang frekvenciájának hányadosa ilyenkor nagyon közel van a $\frac{3}{2}$-hez.*

c) Számítsuk ki a két hang frekvenciájának hányadosát három tizedesjegy pontossággal és határozzuk meg, hogy a hányados hány százalékkal tér el a $\frac{3}{2}$-től. *(4 pont)*

d) Tekintsük növekvő sorrendben a félhangok frekvenciáinak pontos értékét, majd ezeknek az értékeknek a kettes alapú logaritmusát. Az ezekből képzett sorozatot jelölje $\{a_n\}$. Válasszuk ki az alábbiak közül az igaz állítás betűjelét. *(2 pont)*

A) *Az $\{a_n\}$ sorozat számtani sorozat, melynek differenciája $\frac{1}{12}$.*

B) *Az $\{a_n\}$ sorozat számtani sorozat, melynek differenciája $\sqrt[12]{2}$.*

C) *Az $\{a_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $\frac{1}{12}$.*

D) *Az $\{a_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $\sqrt[12]{2}$.*

Megoldás. *a)* $880 = 440 \cdot q^{12}$, azaz $2 = q^{12}$, tehát $q = \sqrt[12]{2}$, amely öt tizedesjegy pontossággal valóban 1,059 46.

b) A hiányzó frekvenciák rendre:

466, 494, 523, 554, 587, 622, 659, 698, 740, 784, 831, 880.

c) A két hang frekvenciájának aránya $q^7 \approx 1{,}4983$, ennek az eltérése az 1,5-től 0,0017, amely az 1,5-nek 0,11%-a.

d) A helyes válasz betűjele: A.

3. *A $3x - 2y - 7 = 0$ egyenletű egyenes merőleges az $ax - 6y + 1 = 0$ egyenletű egyenesre.*

a) Határozzuk meg a értékét. *(4 pont)*

A $3x - 2y + k = 0$ egyenletű egyenes az x-tengelyt a P, az y-tengelyt a Q pontban metszi.

b) Határozzuk meg k lehetséges értékeit, ha az OPQ háromszög területe 75 egység (O a koordináta-rendszer origóját jelöli). *(7 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Az első egyenes egy normálvektora $(3; -2)$, a másodiké $(a; -6)$. Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor a két normálvektor is merőleges egymásra, tehát skaláris szorzatuk értéke nulla, vagyis $3a + 12 = 0$, ahonnan $a = -4$.

II. megoldás. Rendezzük y-ra az egyenleteket: $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$, illetve $y = \frac{a}{6}x + \frac{1}{6}$. Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor a meredekségeik szorzata -1, vagyis $\frac{3}{2} \cdot \frac{a}{6} = -1$, ahonnan $a = -4$.

b) A P pontban $y = 0$, így $x = -\frac{k}{3}$, a Q pontban pedig $x = 0$, így $y = \frac{k}{2}$, tehát $P\left(-\frac{k}{3}; 0\right)$, és $Q\left(0; \frac{k}{2}\right)$. Az OPQ háromszög derékszögű, befogóinak hossza $\left|-\frac{k}{3}\right|$, illetve $\left|\frac{k}{2}\right|$, így a háromszög területe

$$T = \frac{\left|-\frac{k}{3}\right| \cdot \left|\frac{k}{2}\right|}{2} = \frac{k^2}{12} = 75,$$

amelyből kapjuk, hogy $k = \pm 30$. (Ezen k értékeknél az egyenes egy 10 és 15 egység befogójú derékszögű háromszöget vág le a II., illetve a IV. síknegyedből, s ezek területe valóban 75 egység.)

4. *A Boci tej* 1 *literes dobozban* 380 *forintba kerül az üzletben,* 2 *deciliteres dobozban pedig dobozonként* 220 *forintba.*

a) Ha 2 *deciliteres dobozokban veszünk összesen* 1 *liter tejet, akkor hány százalékkal fizetünk többet, mint ha egy doboz* 1 *literes tejet vettünk volna?* (*3 pont*)

A 2 dl-*es tejesdoboz – matematikai értelemben – hasonló az* 1 *litereshez. A tejet forgalmazó cég számára a dobozokba tölthető tej ára a tej térfogatával, a tejesdoboz előállítási költsége pedig a doboz felszínével egyenesen arányos. Egy liter dobozba tölthető tej a forgalmazó cég számára* 210 *forintba kerül, az egy literes tejesdoboz előállítása pedig* 80 *forintba.*

b) Hány százalékkal kerül többe az öt darab 2 dl-*es kiszerelésű tej előállítása, mint az egy doboz* 1 *literes kiszerelésű tejé?* (*6 pont*)

Minőségellenőrzéskor a legyártott tejesdobozoknak átlagosan 4%-*át sérültnek találják.*

c) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 10 *véletlenszerűen kiválasztott tejesdoboz közül legfeljebb* 1 *sérültet találnak.* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Öt doboz 2 deciliteres tej ára 1100 forint, ez 720 forinttal több, mint az 1 literes tej ára, így $\frac{720}{380} \cdot 100 \approx 189\%$-kal fizetünk többet.

b) 2 dl tej előállítási költsége 42 Ft. Mivel $1:5=0{,}2$, a dobozok hasonlóságának aránya $\sqrt[3]{0{,}2}$ ($\approx 0{,}585$). A 2 dl-es doboz felszíne az 1 literesének $\left(\sqrt[3]{0{,}2}\right)^2 \approx 0{,}342$-szerese (kb. 34%-a), így a csomagolóanyag előállítási költsége ($\approx 0{,}342 \cdot 80 \approx$) 27,4 Ft. Tehát a 2 dl-es kiszerelésű tej előállítása dobozonként kb. 69,4 Ft. Az öt darab 2 dl-es csomagolású tej előállítási költsége kb. 347 Ft, ami $\frac{347-290}{290} \cdot 100 \approx$ $\approx 20\%$-kal több, mint az 1 literesé.

c) Az $n=10$ és $p=0{,}04$ paraméterű binomiális eloszlást felhasználva:

$$P(\text{legfeljebb 1 sérült}) = P(0\text{ sérült}) + P(1\text{ sérült}) =$$

$$= 0{,}96^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96^9 \approx 0{,}665 + 0{,}277 = 0{,}942.$$

II. rész

5. *a) Hány olyan egyenest határoznak meg egy téglatest csúcsai, melyek nem illeszkednek a téglatest egyik élére sem?* (*3 pont*)

Egy 12 cm *sugarú gömbbe téglalap alapú egyenes hasábot írunk úgy, hogy a hasáb csúcsai a gömb felületén vannak. A hasáb alaplapja éleinek aránya* $1:2$, *a hasáb magassága* 16 cm.

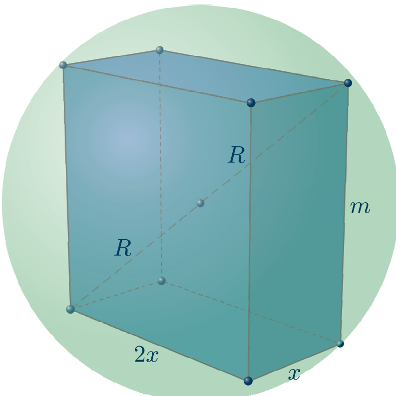
b) Mekkora a hasáb térfogata? (*5 pont*)

Egy 12 cm sugarú gömbből olyan dísztárgyat csiszolnak ki, melynek alakja téglalap alapú egyenes hasáb, és a hasáb alaplapja éleinek aránya $1:2$.

c) Mekkora az így kicsiszolható legnagyobb dísztárgy térfogata? (*8 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* A téglatest csúcsai közül semelyik három nem esik egy egyenesbe, ezért a 8 csúcs összesen $\binom{8}{2}=28$ egyenest határoz meg. A téglatestnek 12 éle van, az ezekre illeszkedő egyenesek nem felelnek meg. A csúcsok tehát összesen $28-12=16$ olyan egyenest határoznak meg, amely nem illeszkedik a téglatest egyik élére sem.

II. megoldás. A téglatest lapátlóira és testátlóira illeszkedő egyenesek felelnek meg a feltételeknek. Minden lapon 2, összesen tehát 12 lapátlója, valamint 4 testátlója van a téglatestnek, ezért $12+4=16$ megfelelő egyenes van.



b) Jelölje a gömb sugarát R, a hasáb magasságát m, a hasáb alapéleinek cm-ben mért hosszát pedig x és $2x$.

Szimmetria okok miatt a hasáb testátlója megegyezik a gömb egy átmérőjével. Ismert, hogy az a, b, c élű téglatest testátlójának hossza $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. A gömbbe írt hasábra tehát $2R=\sqrt{m^2+x^2+(2x)^2}$, azaz $24=\sqrt{16^2+x^2+(2x)^2}$ teljesül, amelyből $x=\sqrt{\frac{24^2-16^2}{5}}=8$ cm.

A hasáb térfogata $V=x\cdot 2x\cdot 16=2048\ \text{cm}^3$.

c) A lehetséges legnagyobb dísztárgyat akkor kapjuk, ha a hasáb csúcsai a gömb felületére illeszkednek. Ekkor az előzőekhez hasonlóan a hasáb testátlója megegyezik a gömb egy átmérőjével, tehát (az *a*) feladat jelöléseit használva)

$$x=\sqrt{\frac{24^2-m^2}{5}}.$$

A hasáb térfogata

$$V=x\cdot 2x\cdot m=2x^2m=2\cdot\frac{24^2-m^2}{5}\cdot m=\frac{1152\,m-2m^3}{5}.$$

Az $f(m):\ ]0;24[\ \to\mathbb{R}$, $f(m)=\frac{1152\,m-2m^3}{5}$ függvénynek ott lehet maximumhelye, ahol a deriváltja 0.

$f'(m)=\frac{1152-6m^2}{5}$, $f'(m)=0$, ha $1152-6m^2=0$, azaz $m=\sqrt{\frac{1152}{6}}=8\sqrt{3}\approx$ $\approx 13{,}86$. Az f deriváltfüggvényének előjele ennél kisebb m értékek esetén pozitív, nagyobb m értékek esetén pedig negatív, ezért ez valóban abszolút maximumhelye az f-nek.

A kicsiszolható legnagyobb dísztárgy térfogata $f\left(8\sqrt{3}\right)\approx 2128\ \text{cm}^3$.

6. *Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a három dobott szám*

a) összege kisebb 5-nél; (*3 pont*)

b) között van 4-nél nagyobb; (*3 pont*)

c) szorzata osztható 6-tal. (*5 pont*)

A három dobott számot balról jobbra egymás mellé írjuk. Azt tapasztaljuk, hogy az így kapott háromjegyű számban a középső számjegy éppen a három számjegy mediánja.

d) Hány ilyen tulajdonságú háromjegyű számot kaphatunk? (*5 pont*)

Megoldás. *a)* 3 vagy 4 lehet az összeg.

$3 = 1 + 1 + 1$, ez 1 kedvező eset.

$4 = 1 + 1 + 2$, ez 3 kedvező esetet jelent, mert bármelyik kockával dobhatjuk a 2-est.

Az összes eset száma $6^3 = 216$.

A keresett valószínűség így $p_a = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} \approx 0{,}019$.

b) I. megoldás. Kedvezőtlen esetek azok, amikor minden dobás értéke legfeljebb 4, ezeknek az eseteknek a száma $4^3 = 64$.

A keresett valószínűség így $p_b = \frac{216-64}{216} = \frac{152}{216} = \frac{19}{27} \approx 0{,}704$.

II. megoldás. Kedvező esetek azok, amikor 1 vagy 2 vagy 3 olyan számot dobunk, amely 4-nél nagyobb. Az ilyen esetek száma rendre $\binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 4^2 (= 96)$, $\binom{3}{2} \cdot 2^2 \cdot 4 (= 48)$ és $\binom{3}{3} \cdot 2^3 (= 8)$.

A keresett valószínűség $p_b = \frac{96+48+8}{216} = \frac{152}{216} = \frac{19}{27} \approx 0{,}704$.

c) I. megoldás. Két diszjunkt esetre bontjuk a vizsgált eseményt.

1. Van 6-os a dobott 3 szám között: ez $6^3 - 5^3 = 91$ eset.

2. Nincs 6-os, de van 2-es és 3-as is a dobott számok között.

Nincs 6-os a dobott számok között 5^3 esetben. Ebből levonjuk azokat az eseteket, amikor nincs 2-es, illetve azokat, amikor nincs 3-as. Mindkettőből 4^3 eset van. Így azonban kétszer vonnánk le azokat az eseteket, amikor sem 2-es, sem 3-as nincs a dobott számok között, ez pedig 3^3 esetben fordul elő. Az olyan esetek száma tehát, amikor nincs 6-os, de van 2-es és 3-as is: $5^3 - 2 \cdot 4^3 + 3^3 = 24$.

A keresett valószínűség $p_c = \frac{91+24}{216} = \frac{115}{216} \approx 0{,}532$.

II. megoldás. A kedvezőtlen esetek számát határozzuk meg. Kedvezőtlenek azok az esetek, amikor nincs 6-os, továbbá a 2-es és a 3-as közül is legalább az egyik hiányzik.

Nincs se 6-os, se 2-es 4^3 esetben és ugyanennyi esetben nincs se 6-os, se 3-as. Így azonban kétszer számoljuk azokat az eseteket, amikor se 6-os, se 2-es, se 3-as nincs a dobott számok között (3^3 eset). A kedvezőtlen esetek száma tehát $2 \cdot 4^3 - 3^3 = 101$.

Ekkor a keresett valószínűség $p_c = \frac{216-101}{216} = \frac{115}{216} \approx 0{,}532$.

d) *I. megoldás.* Egy $\overline{abc}$ háromjegyű szám akkor felel meg a feltételnek, ha $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 6$ vagy $6 \geqslant a \geqslant b \geqslant c \geqslant 1$ teljesül (ekkor lesz a középső számjegy a három számjegy mediánja), tehát monoton dobássorozatokat keresünk. Esetszétválasztást végzünk aszerint, hogy a három számjegy között vannak-e egyformák.

$\overline{aaa}$ típusú számból 6 darab van (a értéke 1 és 6 között bármi lehet).

$\overline{aab}$ és $\overline{abb}$ típusú számból is $6 \cdot 5 = 30$ darab van, hiszen a és (az a-tól különböző) b értéke is tetszőleges lehet.

Végül, $\overline{abc}$ típusú számból $2 \cdot \binom{6}{3} = 40$ darab van, hiszen bármelyik három különböző számjegyet kiválaszthatjuk, és a kiválasztott három számjegyet kétféleképpen rendezhetjük (növekvő vagy csökkenő) sorba.

Összesen $6 + 30 + 30 + 40 = 106$ darab, a feltételeknek megfelelő számot kaphatunk.

II. megoldás. Az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekből a sorrendre való tekintet nélkül válasszunk ki hármat úgy, hogy egy-egy számjegyet többször is kiválaszthatunk. A lehetséges kiválasztások száma megegyezik hat elem harmadosztályú ismétléses kombinációinak számával, azaz $\binom{6+3-1}{3} = 56$. Ha a kiválasztott három számjegy nem egyforma, akkor ezeket kétféleképpen rendezhetjük (növekvő vagy csökkenő) sorba. Abban a hat esetben, amikor a kiválasztott három számjegy egyforma, a sorbarendezés egyértelmű. Ezért összesen $2 \cdot 56 - 6 = 106$ darab, a feltételeknek megfelelő számot kaphatunk.

7. *a*) *Tekintsük az* $a_n = \sin(n \cdot 7^\circ)$ *sorozatot* $(n \in \mathbb{Z}^+)$. *A sorozat első* 100 *tagja közül melyik a három legkisebb?* (*6 pont*)

b) *Igazoljuk, hogy a* $\dfrac{3}{\cos^2 x - \cos x + 1}$ *kifejezés minden valós* x *esetén értelmezhető.* (*3 pont*)

c) *Határozzuk meg az*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{\cos^2 x - \cos x + 1}$$

függvény értékkészletét. Hol veszi fel a függvény a maximumát? (*7 pont*)

Megoldás. *a*) $700^\circ < 2 \cdot 360^\circ$, így elég az első két periódust megvizsgálni. A $\sin x$ minimuma az $x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken van. $39 \cdot 7^\circ = 273^\circ$, így az első periódusban a három legkisebb értékhez tartozó hely: 273°, 266° és 280° ($n = 39$, 38 és 40 esetén).

A második periódusban $90 \cdot 7^\circ = 630^\circ$, így ebben az esetben a három legkisebb értékhez tartozó hely: 630°, valamint 623° és 637° ($n = 90$, 89 és 91 esetén).

Kihasználva a szinuszfüggvény menetét a minimumhelyének környezetében, valamint, hogy $\sin x = \sin(x + k \cdot 360^\circ)$, a három legkisebb értékhez tartozó hely: 630°, 273° és 266°.

Tehát a sorozat első 100 tagja közül a 90., a 39. és a 38. tag a három legkisebb (értékük -1, illetve közelítőleg $-0{,}9986$ és $-0{,}9976$).

b) A kifejezés akkor értelmezhető, ha a nevezője nem nulla. A nevezőt átalakítva:

$$\cos^2 x - \cos x + 1 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4},$$

ezért a nevező semmilyen valós x-re nem nulla, tehát a kifejezés valóban minden valós x-re értelmezhető.

c) Minden valós x-re

$$\begin{aligned}
-1 &\leqslant \cos x \leqslant 1,\\
-\frac{3}{2} &\leqslant \cos x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2},\\
0 &\leqslant \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{3}{2},\\
0 &\leqslant \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{4},\\
\frac{3}{4} &\leqslant \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \frac{12}{4} = 3,\\
4 &\geqslant \frac{3}{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geqslant 1.
\end{aligned}$$

A függvény értékkészlete tehát az $[1;4]$ intervallum (és folytonossága miatt az intervallum minden elemét fel is veszi).

Maximumát ott veszi fel, ahol a tört nevezője minimális, tehát $\cos x - \frac{1}{2} = 0$, azaz $\cos x = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

8. *G egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen* 6 *éle van.*

a) *Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább egy olyan, amelynek a fokszáma legalább* 2? *(2 pont)*

b) *Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább* 2? *(2 pont)*

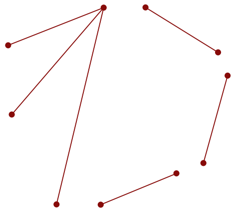
Egy szabályos tízszög legrövidebb átlója egységnyi hosszúságú.

c) *Határozzuk meg a tízszög oldalainak hosszát.* *(3 pont)*

Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen kiszínezünk négyet.

d) *Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf fagráf lesz.* *(9 pont)*

Megoldás. *a*) Igaz. G csúcsainak fokszámösszege (a 6 él miatt) 12. A 10 csúcs között így biztosan kell lennie olyannak, amelynek a fokszáma legalább 2.

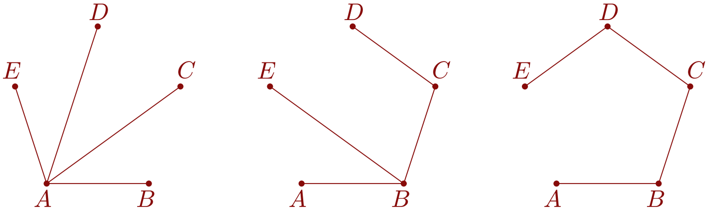


b) Nem igaz. Egy ellenpéldát mutat az *ábra.*

c) A szabályos tízszög egy belső szöge 144°. Jelölje a keresett oldalhosszt x. Tekintsük azt az egyenlő szárú háromszöget, melynek csúcsai a tízszög három szomszédos csúcsa. Ennek a háromszögnek az alapja a tízszög legrövidebb átlóinak egyike, szárai pedig a tízszög oldalai. Ezt a háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. Egy ilyen háromszögben: $\sin 72^\circ = \frac{0{,}5}{x}$, ahonnan $x = \frac{0{,}5}{\sin 72^\circ} \approx 0{,}526$.

A tízszög oldalai (három tizedesjegy pontossággal) 0,526 egység hosszúak.

d) *I. megoldás.* Az ötpontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{5}{2} = 10$. Ezek közül 4-et $\binom{10}{4} = 210$-féleképpen tudunk kiválasztani (összes eset száma). A színezett élekből fagráfot az alábbi háromféle (nem izomorf) gráf esetén kapunk:



Az 1. típus esetén 5-féleképpen választhatjuk meg az ábrán A-val jelölt negyedfokú csúcsot, ilyenből tehát 5 darab van.

A 2. típus esetén az ábrán B-vel jelölt harmadfokú csúcsot 5-féleképpen választhatjuk meg. A B-ből induló 4 él közül $\binom{4}{3} = 4$-féleképpen választhatjuk ki a kiszínezett 3-at, majd 3-féleképpen a negyedik színezett élt (mely az előbb kiválasztott élek egyikének végpontját köti össze az ötödik csúccsal). Ilyenből tehát $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ darab van.

A 3. típus esetén a négy színezett él egy 4 hosszúságú utat alkot. Az út csúcsainak sorrendjét $5! = 120$-féleképpen választhatjuk meg, de minden utat kétszer számoltunk (oda és vissza is), tehát ilyenből $\frac{120}{2} = 60$ darab van. A kedvező esetek száma tehát $5 + 60 + 60 = 125$, a keresett valószínűség pedig

$$p_d = \frac{125}{210} = \frac{25}{42} (\approx 0{,}595).$$

II. megoldás. Az ötpontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{5}{2} = 10$. Ezek közül 4-et $\binom{10}{4} = 210$-féleképpen tudunk kiválasztani (összes eset száma). Mivel a színezett élek száma 4, a színezett élekből álló gráf pontosan akkor lesz fagráf, ha összefüggő. Komplementer módszerrel dolgozunk: megszámoljuk, hány olyan színezés van, amikor a színezett élekből álló gráf nem összefüggő. Ha nem összefüggő a gráf, akkor vagy egy-egy 3 és 2 pontú, vagy egy-egy 4 és 1 pontú komponensre esik szét.

Az első esetben egy 3 hosszúságú kör és egy ettől diszjunkt él van kiszínezve. A kör pontjait $\binom{5}{3}=10$-féleképpen választhatjuk ki, a negyedik színezett él ezek után egyértelműen adott. Ez a típus tehát 10 különböző színezés esetén adódik.

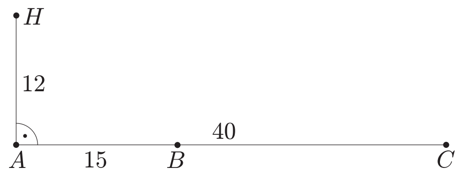
Ha van egy 4 pontból álló komponens, akkor az ötödik, izolált pontot 5-féleképpen választhatjuk ki, majd a maradék 4 csúcs között tetszőlegesen húzhatunk be a 6 lehetséges közül 4 élt. Ebből tehát $5\cdot\binom{6}{4}=75$-féle lehetséges színezés adódik. A kedvezőtlen esetek száma összesen $10+75=85$, a keresett valószínűség pedig

$$p_d=\frac{210-85}{210}=\frac{25}{42}(\approx 0{,}595).$$

Megjegyzés. A kedvező esetek száma az ötpontú „számozott” fák számával egyezik meg. Cayley tétele szerint az n pontú számozott fák száma n^{n-2}, azaz $n=5$ esetén éppen 125.

9. *Két város közti utat egy kamion odafelé* 60 km/h, *visszafelé* 50 km/h *átlagsebességgel tett meg.*

a) Határozzuk meg a kamionnak a két út egészére vonatkozó átlagsebességét. *(4 pont)*



A tengeren lévő (pontszerűnek tekintett) H szigetről árut szállítanak a tengerparton lévő C pontba. Az egyenesnek tekinthető partvonalnak azonban csak az AB szakaszán tud kikötni a hajó ($HA\perp AB$), ezért itt átrakodják a rakományát, és közúton (a part mentén) kamionnal szállítják el C-be. A rakodás egy óráig tart. Az adatok: $HA=12$ km, $AB=15$ km, $AC=40$ km.

A hajó átlagsebessége a vízen 8 km/h, *a kamion átlagsebessége közúton* 40 km/h.

b) Melyik útvonal a gyorsabb: a HAC vagy a HBC? Mennyi a szállítási idő az egyes útvonalakon? *(4 pont)*

c) Az AB szakasz mely D pontján kössön ki a hajó, hogy a szállítmány a lehető leghamarabb eljusson C-be? Mennyi ekkor a szállítási idő? *(8 pont)*

Megoldás. *a)* Ha a két város közötti távolságot (km-ben) s jelöli, akkor odafelé $\frac{s}{60}$, visszafelé pedig $\frac{s}{50}$ óráig tartott az út, összesen tehát $\frac{s}{60}+\frac{s}{50}$ óráig. A két út egészére vonatkozó átlagsebesség

$$\frac{2s}{\frac{s}{60}+\frac{s}{50}}=\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{50}}=\frac{2}{\frac{5}{300}+\frac{6}{300}}=\frac{600}{11}\ \text{km/h}\approx 54{,}5\ \text{km/h}.$$

b) Meghatározzuk a két útvonalhoz tartozó szállítási időt:

$$t_{\text{HAC}}=t_{\text{HA}}+t_{\text{rakodás}}+t_{\text{AC}}=\frac{12\ \text{km}}{8\ \text{km/h}}+1+\frac{40\ \text{km}}{40\ \text{km/h}}=3{,}5\ \text{óra}.$$

Pitagorasz-tétellel $HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = \sqrt{369}$ ($\approx 19{,}2$ km).

$$t_{\mathrm{HBC}} = t_{\mathrm{HB}} + t_{\text{rakodás}} + t_{\mathrm{BC}} = \frac{\sqrt{369}\ \text{km}}{8\ \text{km/h}} + 1 + \frac{25\ \text{km}}{40\ \text{km/h}} \approx 4{,}03\ \text{óra}.$$

A HAC útvonal a gyorsabb.

c) Jelölje az AD távolságot d. Ekkor a hajóval megtett út $HD = \sqrt{12^2 + d^2}$. A HDC út megtételéhez szükséges idő (órában) d függvényében:

$$t_{\mathrm{HDC}}(d) = \frac{\sqrt{144 + d^2}}{8} + 1 + \frac{40 - d}{40}.$$

A $T(d) :]0; 15[\to \mathbb{R}$, $T(d) = \frac{\sqrt{144+d^2}}{8} + 1 + \frac{40-d}{40}$ függvénynek ott lehet minimumhelye, ahol a deriváltja 0. A deriváltfüggvény a következő:

$$T'(d) = \frac{d}{8\sqrt{144 + d^2}} - \frac{1}{40}.$$

$$T'(d) = 0, \quad \text{ha} \quad \frac{d}{8\sqrt{144 + d^2}} = \frac{1}{40}, \quad \text{azaz} \quad 5d = \sqrt{144 + d^2}.$$

Négyzetre emelhetünk $d > 0$ miatt, majd rendezve kapjuk, hogy

$$24d^2 = 144, \quad \text{azaz} \quad d = \sqrt{6} \approx 2{,}45\ \text{km}.$$

Meg kell még vizsgálni, hogy az első derivált zérushelye valóban minimumhelye-e a függvénynek. Ehhez elegendő, ha $d = \sqrt{6}$-ban negatívból pozitívba vált a függvény előjele. Hogy ezt belássuk, alakítsuk át $T'(d)$-t a következőképpen:

$$T'(d) = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{144 + d^2}} - \frac{1}{40} = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{144 + d^2 - 144}{144 + d^2}} - \frac{1}{40} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \sqrt{1 - \frac{144}{144 + d^2}} - \frac{1}{40}.$$

Könnyen végiggondolható, hogy d növelésével $T'(d)$ is nő, tehát $\sqrt{6}$-nál kisebb d értékekre negatív, $\sqrt{6}$-nál nagyobb d értékekre pedig pozitív, ezért $d = \sqrt{6}$ valóban minimumhelye a függvénynek.

(A második derivált előjelét is vizsgálhatjuk:

$$T''(d) = \frac{8\sqrt{144 + d^2} - d \cdot 8 \cdot \frac{d}{\sqrt{144+d^2}}}{64(144 + d^2)} = \frac{\sqrt{144 + d^2} - \frac{d^2}{\sqrt{144+d^2}}}{8(144 + d^2)} = \frac{144}{8(144 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ez minden d-re, így $d = \sqrt{6}$-ra is pozitív, így $d = \sqrt{6}$ valóban minimumhelye a függvénynek.)

Az út megtételéhez szükséges idő ekkor

$$T\big(\sqrt{6}\,\big) = \frac{\sqrt{150}}{8} + 1 + \frac{40 - \sqrt{6}}{40} = 2 + \frac{3\sqrt{6}}{5} \approx 3{,}47\ \text{óra}.$$

Mivel a kapott eredmény a $]0;15[$ intervallumon teljesül, így megállapítható, hogy a D pontra kapott 3,47 óra alacsonyabb az A pontbeli 3,5 óránál, valamint a B pontbeli 4,03 óránál is, vagyis a $[0;15]$ intervallumon, tehát a teljes AB szakaszon a D pontban történő kikötésnél lesz a szállítási idő a legkisebb.

Megjegyzés. Belátható, hogy a minimális idő $v_{\text{hajó}} \geqslant v_{\text{kamion}}$, valamint

$$\arcsin\left(\frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}}\right) \geqslant AHB\sphericalangle$$

esetén a HBC úthoz tartozik, egyébként pedig abban a D pontban érdemes kikötnie a hajónak, amelyre $\frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}} = \sin AHD\sphericalangle$ teljesül. A feladatban szereplő adatokkal $AD = \sqrt{6}$, $HD = \sqrt{150}$, és így valóban

$$\sin AHD\sphericalangle = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = \frac{1}{5} = \frac{8}{40} = \frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}}.$$

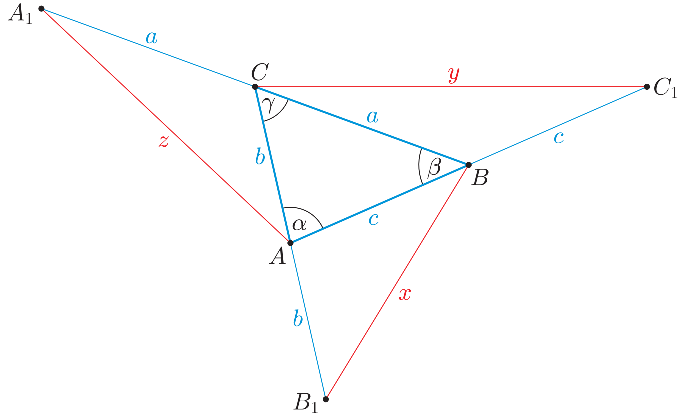
Koncz Levente
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5255. *Tükrözzük középpontosan az ABC háromszög A csúcsát B-re, B csúcsát C-re, és C csúcsát A-ra, így kapjuk rendre a C_1, A_1 és B_1 pontokat. Mutassuk meg, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 hosszúságú oldalakkal háromszög szerkeszthető.*

(3 pont)

I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.



1. ábra