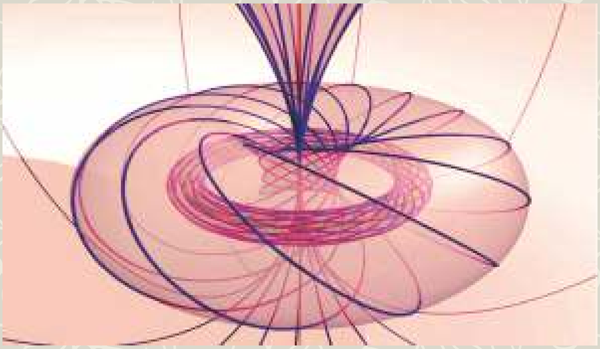
Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok

Informatika rovattal

Támogassa lapunk kiadását adója 1%-ával – 18157444-2-43

Blaise Pascal



A Hopf-fibrálás

Matematika és fizika feladatok mintamegoldásai

A kvantumbit geometriai teréről

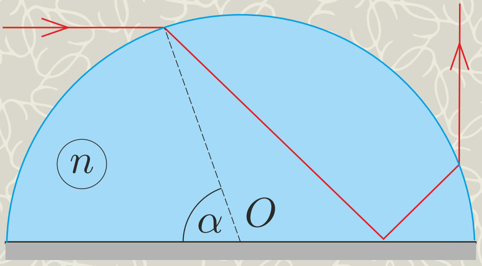
Matek az Utcán

400 éve született Blaise Pascal

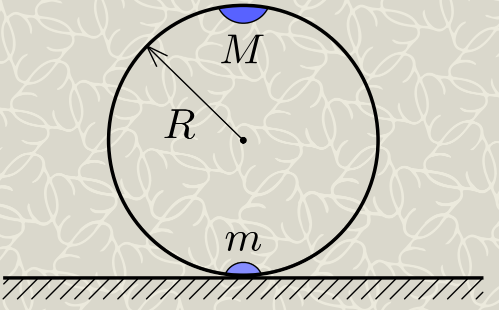
KöMaL

73. évfolyam
4. szám
2023. április

A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

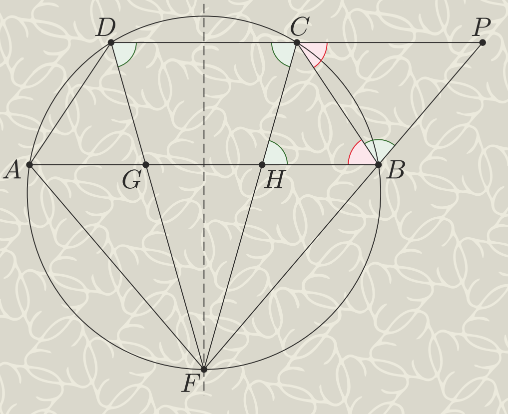


Ábra a P. 5487.feladathoz



Ábra a P. 5483.feladathoz

Kép a fizika pótfeladathoz



Ábra a B. 5260. mintamegoldáshoz

A KöMaL támogatói
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő
Kulturális és Innovációs Minisztérium

KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

73. évfolyam 4. szám — Budapest, 2023. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

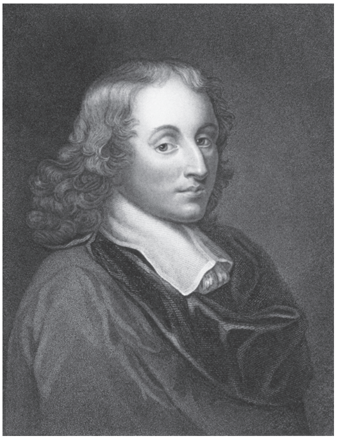
Főszerkesztő: KORÁNDI JÓZSEF
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Szenvedély és kötelesség – 400 éve született Blaise Pascal

1623. június 19-én született Blaise Pascal. Sokoldalú gondolkodó volt, századának és a tudomány történetének egyik legnagyobb formátumú alakja, akinek egész életét a tudományos kíváncsiság, a keresztény hit megélése és az erkölcsi kötelesség hármasa határozta meg.

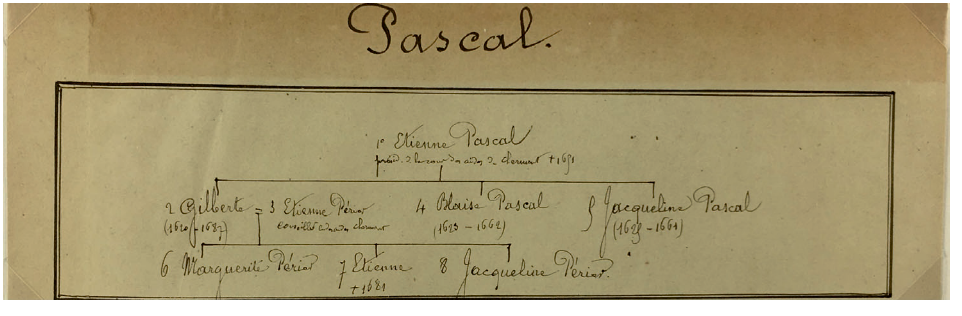


Blaise Pascal

Pascal kiemelkedőt alkotott a geometria és a valószínűségszámítás terén, számológépet épített, a hidrosztatikában is maradandó a teljesítménye, megfogalmazta az omnibusz vagy tágabb értelemben a közösségi közlekedés ötletét, és filozófusként, íróként is hatalmas egyéniség volt.

Édesanyja korán meghalt, így a gyenge fizikumú Pascalt és két lánytestvérét édesapjuk nevelte. Pascal lelkesedésére jellemző, hogy mikor mintegy véletlenül tudomást szerzett a geometriáról, szenvedélyesen vetette magát az elé kerülő problémák megoldásába. Tizenhárom évesen már Mersenne-nel levelezett, és tizenhat éves korában megjelent első nyomtatott munkája *Tanulmány a kúpszeletekről* címmel. Ebben szerepelt annak a tételnek egy megfogalmazása, amelyre máig Pascal-tételként hivatkozunk:

Ha egy hatszög csúcsai egy kúpszeleten (vagy speciálisan egy körön) fekszenek, és a szemközti oldalpárok metszik egymást, akkor ezek a metszéspontok egy egyenesen vannak.



Pascal családfájának egy részlete

1640-ben, mindössze tizenhét évesen megalkotott egy gyorsan működő mechanikus számológépet.

1646-ban találkozott Torricellinek a vákuum létezését igazolandó higanyos kísérletével, amelyet különböző magasságokban és különböző folyadékokkal ismét elvégzett, ezzel jellemezve a légnyomás természetét is.

Pascal mélyen hitt Istenben, de nem az egyházi fősodorhoz, hanem a janzenistákhoz tartozott. Fiktív leveleit, melyekben a korszakot meghatározó jezsuiták tekintélyelvűségét bírálja, a Port Royal des Champs ciszterci kolostorban írta meg *Louis Montalte* néven. Ez az első megtérése után volt, amely apja balesetének hatására történt.

Ekkoriban kezdett foglalkozni a matematikai valószínűség fogalmával, az esélyek, az igazságos osztozások és a szerencsejáték világának matematikai leírásával. Fermat-val is levelezett e témában.

1654-ben írta meg az *Értekezés az aritmetikai háromszögekről* című munkáját. Ebben szerepel a manapság Pascal-háromszögnek nevezett konstrukció és egyebek mellett az $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$ összefüggés is.

1658-ban egy alkalommal hirtelen rátört az elviselhetetlen fogfájás. A kínt Pascal koncentrált és megfeszített gondolkodással csillapította, és egy éjszaka alatt több lényeges állítást is igazolt a cikloissal kapcsolatban. Négy feladat megoldásánál olyan eszközökre volt szükség, amelyek megalkotása során Pascal a differenciál- és integrálszámítás alapjait is vázlatosan kidolgozta. Ezt az utolsó tudományos munkáját *Amos Dettonville* álnéven írta, a név a *Louis Montalte* anagrammája ($u = v$).

1659-től 1662-ben bekövetkezett haláláig már nem foglalkozott se matematikával, se fizikával. Életének utolsó idejéből származó feljegyzéseit *Gondolatok* címen közölték halála után. Ebben fogalmazza meg például azt az állítását, hogy érdemesebb Isten létezésére fogadni, mint a nem létezésére. Nagy hatású filozófiai munka ez, melynek egyik legkarakteresebb jellemzője a világos és szép stílus. Ugyanez jellemezte matematikai szövegeit is, amelyekben idegenkedett a formális leírásoktól.

Miért fontos megemlékeznünk erről az évfordulóról?

Mert Pascal szerteágazó érdeklődése és tudományos munkásságának lényeglátó kérdésfelvetései, valamint a kérdések megválaszolásának önkritikus szigora ma is támpontot jelenthet, hatása ma is érvényesül.

Bibliográfia

[1] Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L., *Az újra felfedezett geometria.* Gondolat (1977).

[2] Gindikin, S., *Blaise Pascal.* In: Történetek fizikusokról és matematikusokról (157–178. o). Typotex (2003).

[3] Pascal, B., *Gondolatok* (L. Pődör, Ford.). Gondolat (1978). `http://www.ppek.hu/k405.htm`

[4] Reisinger, J., Király, I., & Szerdahelyi, I., *Pascal, Blaise.* In: Világirodalmi Lexikon: 10. Köt. Akadémiai Kiadó (1986).

[5] Rényi, A., *Levelek a valószínűségről.* Typotex (1994). `https://mek.oszk.hu/00800/00859/html/#1`

Szmerka Gergely

Hol él a kvantumbit?

Utazás a dimenziók között

A számítástechnikában az információ alapegysége a bit, értéke 0 vagy 1 lehet, igen vagy nem. Technikailag a bit általában egy áramkör, amin vagy átfolyik az áram, vagy nem, ez jelzi a két állapotot. A digitális rendszerek minden adathalmazt 0-kból és 1-esekből álló jelsorozatokra, vagyis voltaképpen kettes számrendszerbeli számokra fordítanak le a szövegektől a videókig. A számítógépek a bitek nyelvét beszélik.

A kvantumszámítógépekben a bitek megfelelői a kvantumbitek (qubitek). Bár a gyakorlati megvalósításuk még gyerekcipőben jár, a kvantumbitek működése, a kvantumszámítógép programozása elméletben már egészen kidolgozott, izgalmas terület. A kvantumbiteknek is két értékük van, de csak akkor, ha megmérjük. Addig, amíg nem történik mérés, a kvantumbit egyszerre igen és nem, értéke egyszerre 0 és 1, de igazából egyik sem: az állapota valahol a két érték között „mozog", úgynevezett szuperpozícióban van.

Jó asszociáció, ha erről *Schrödinger* macskája jut az eszünkbe. Maga Schrödinger, a kvantummechanika egyik kidolgozója az elmélet abszurditását próbálta érzékeltetni egy gondolatkísérlettel, amelyben egy dobozba zárt macska mellett egy fiolában mérges gáz van, és az állat egyszerre élő és halott, mert egy kvantumrendszer állapotától tesszük függővé a mérget tartalmazó fiola kinyílását. Eszerint a kérdés tehát az, hogy hogyan lehet egy macska egyszerre élő és halott, egy válasz egyszerre igen és nem, egy szám egyszerre 1 és 0.

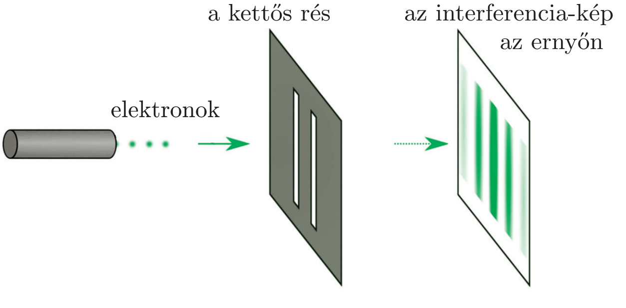
A kvantumbit esetében ez a kérdés úgy szól, hogy milyen térben „mozog" az állapota. Talán meglepő módon a kvantumbiteknek ezt a furcsa viselkedését egy geometriai konstrukcióval lehet jól leírni, ez a cikk erről a konstrukcióról szól. A geometriai alakzat, amit megmutatunk, a négydimenziós térben helyezkedik el, ami mindössze annyit jelent, hogy a pontoknak nem kettő vagy három, hanem négy koordinátájuk van. No meg azt, hogy nehezebb elképzelni őket, hogyan is néznek ki. De egy ügyes trükkel visszavetítve ezt a négydimenziós alakzatot a három dimenzióba lenyűgözően csavargó körvonalakként ábrázolhatjuk. Ezt hívják Hopf-fibrálásnak, *Heinz Hopf* német matematikusról elnevezve. A fibrálás meg nagyjából szálakra bontást jelent, mert – mint ki fog derülni – a kvantumbit állapotait mint egymás melletti vonalakból felépülő alakzatot képzelhetjük el.

Persze kérdés, hogy miért kell egy ilyen jelenséget mint a kvantumbit geometriailag leírnunk, mit segít ez például a kvantumszámítógépek vagy a szupravezetés megértésében. A válasz az, hogy a geometriai kép mindig segít, másfajta rálátást ad a problémára, ugyanúgy, mint egy ábra. Még akkor is, ha több dimenziós, mint ameddig a szemléletünk elér. Az igazi kérdés inkább az lehetne, hogy miért jó az emberiségnek a kvantumszámítógép és a szupravezetés. Ez a kérdés kikerülhetetlen, de nagyon messzire vezet. Ezt most nem részletezzük, de gondolkodnia mindenkinek érdemes rajta!

Minket tehát a geometriai kép érdekel, de mivel fizikai jelenségekről van szó, érdemes az egészet kontextusba helyezni. Aki már találkozott a most megemlítésre kerülő dolgokkal, rájuk ismerhet, és ha valakit jobban érdekelnek, az például az *Az atomoktól a csillagokig*[*] előadássorozat videóiban megtalálja mindegyiket.

A 20. század elején nem csak a művészetekben, de a tudományban is avantgarde irányzatok kaptak szárnyra. A képzeletünk határait súroló, álomszerű világképek léptek az addig egyeduralkodó newtoni „biliárdgolyó-valóság" helyébe. *Albert Einstein* relativitáselmélete szerint nagy sebességek esetén egészen másképpen viselkedik a tér és az idő, mint azt megszoktuk [1].[†] A relativitáselmélethez fűződik a tömeg és az energia kapcsolatát megfogalmazó $E = m \cdot c^2$ formula, vagy a gravitációt újraértelmező görbült téridő koncepciója. Ezekről a továbbiakban nem lesz szó, ugyanis minket most a másik akkoriban kialakuló fizikai irányzat érdekel inkább, a kvantummechanika. A nanométeres mérettartományokban működő, elemi részecskék világát magában foglaló elméletet többek között *Werner Heisenberg,* Erwin Schrödinger és Albert Einstein dolgozta ki a 20. század első felében.

A kvantummechanika legismertebb következtetése a hullám-részecske kettős természet. Kiderült, hogy a fény, amire addig főleg hullámként gondoltak, részecskeként is viselkedik, fotonokból áll. Mindeközben az anyagi részecskék, mint például az elektron, amire addig apró golyóbisként gondoltak, hullámtulajdonságokat is mutat. Például a kétréses kísérletben mindkét résen egyidejűleg átmegy, és az ernyőn hullámok interferenciájára emlékeztető mintázatot mutatnak a becsapódások helyei. A kvantummechanikai leírás ezért nem részecskékről, de nem is hullámokról szól, hanem úgynevezett hullámfüggvényekről. Ezek írják le az elmélet egy másik bizarr jellemzőjét, a részecskék és a történések véletlenszerűségét. Ha meg akarjuk tudni egy részecskének valamilyen tulajdonságát, például a helyét, nem előre meghatározott, hanem véletlenszerű választ kapunk a mérés során. Akkor „találja ki" a részecske, hogy hol van, amikor megmérjük! Említsük még meg azt a jellegzetességet, amiről az egész elmélet a nevét kapta. A „kvantum" adagocskát jelent, és arra utal, hogy olyan mennyiségekről, amiket bár addig folytonosan változtathatónak képzeltek, de kiderült, hogy csak bizonyos meghatározott értékeket vehetnek fel, csak kis kvantumonként változhatnak. Ilyen mennyiség például az energia. A foton voltaképp az energia adagocskája.



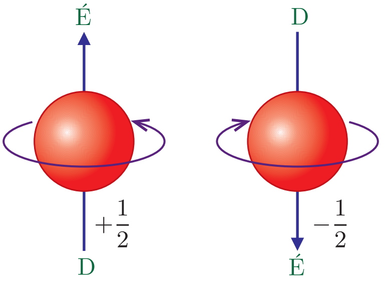
A kétréses kísérlet

[*] `http://atomcsill.elte.hu/NEW/`

[†] A szerző *Új világok teremtése* című könyvében a témáról bővebben is olvashatunk.

De hogyan állnak össze ezek a jelenségek egy elméletté? Röviden arról van szó, hogy a kvantummechanika egy nagyobb térben írja le a jelenségeket, mint amit közvetlenül érzékelni, mérni tudunk.

Képzeljünk el egy tavat, amiben a gyerekek úszkálnak, és tanító néni a partról vigyáz rájuk. Ő nem érzékeli a tavat, nem látja a gyerekeket, de van a tóban néhány bója, azokat – és csak azokat – érzékeli. Ha elkiáltja magát, hogy hol vagy Pistike, akkor Pistike szétnéz, odaúszik egy véletlenszerűen kiválasztott bójához, és ott jelentkezik. A tanító néni pedig megállapítja, hogy Pistike az ötös bójánál van. Pedig nem ott volt, csak a tanító néni kérdése miatt úszott oda. A tó felel meg egy kvantumrendszer állapotainak, azaz a hullámfüggvényeknek, a bóják pedig egy mérés lehetséges kimeneteleinek, mi csupán ennyit érzékelünk a tóból.



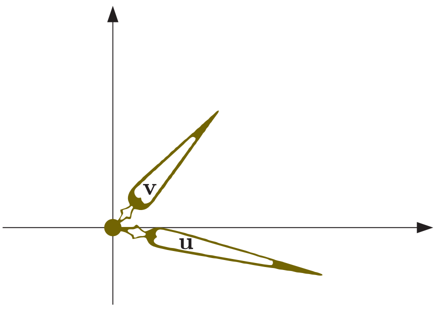
Az elektron spinjének elmagyarázása: „Képzeld el úgy, mint egy forgó golyót, csak ez nem golyó és nem is forog.”

Egy kvantumbit önmagában egy rendszer. Olyan rendszer, aminek csak két bójája van, a mérés két lehetséges kimenetele. A kérdés tehát, hogy milyennek képzelhetjük el azt a tavat, amelyben csak két bója van. Ezek a legegyszerűbb kvantumrendszerek, a legkisebb tavak. De hol vannak ilyen kvantumbitek? A kvantumbit az információ egysége, ez fizikailag többféleképpen is megvalósulhat. A legismertebb az elemi részecskék spinje, ami egy adott irányban mérve állhat felfelé vagy lefelé. Hogy mi is az a spin, azt – mint a mém is utal rá – nem könnyű elképzelni.

A spint történeti okokból forgástengelynek szokták képzelni, de ez a kép nem is pontos, és félrevezető is lenne számunkra a továbbiakban [1].

A 2022-es fizikai Nobel-díjat a kvantumos összefonódással kapcsolatos kísérletekért adták. Ha két részecske összefonódott állapotban van, akkor egyiküknek sem határozott a spinje, de ha az egyikét megmérjük, akkor onnantól már a másiknál csak egyféle spint lehet mérni. Akkor is ezt tapasztaljuk, ha nagyon messze van egymástól a két részecske. De a spinen kívül van sok más kvantumbit is, például a kétréses kísérlet, ahol az a két állapot, hogy melyik résen megy keresztül a részecske. Ugyancsak egy kvantumbit információt hordoznak azok a szupravezető áramkörök is, amikben mindkét irányban egyszerre megy áram, de ha megmérjük, akkor véletlenszerűen beáll az egyik irányba.

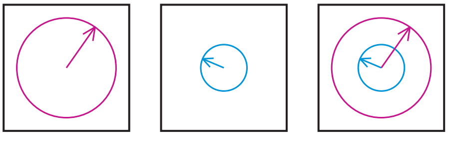
Első megközelítésben a kvantumbit egy még le nem esett pénzérme. Minden pillanatban tartozik hozzá egy valószínűség, hogy ha épp most érné el a talajt, mennyi lenne a fej valószínűsége (pl. 30%, azaz 0,3), és persze ez már meghatározza az írásét is (pl. 70%, azaz 0,7). Ha ez csak ennyi lenne, akkor azt mondanánk, hogy a kvantumbit állapota egy szakaszon „él”, a $[0, 1]$ intervallumon, hiszen a valószínűség egy 0 és 1 közötti szám. De a teljes kvantummechanikai állapot ennél gazdagabb, annak csak egy vetülete ez a valószínűség. A teljes állapotot – jelöljük Ψ-vel – két síkbeli vektor ($\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$) jellemzi, ezeket két óramutatóként is elképzelhetjük. Ám ezek furcsa mutatók, mert nem csak tekergetni lehet őket, méghozzá egymástól függetlenül, de a hosszaik is állíthatóak. Az **u** vektor hosszának a négyzete az *igen*-nek (az 1-nek), a **v** hosszának a négyzete a *nem*-nek (a 0-nak) a valószínűsége. De az állapothoz hozzátartozik a két vektor iránya is. Mindkét vektort tudjuk forgatni és nyújtani, de ha az egyiket nyújtjuk, a másik megrövidül.



Milyen térben mozog tehát a kvantumbit, vagyis mi azon pontok halmaza, amikben előfordulhat? (Megmérni persze továbbra is csak a már említett két „bójánál” tudjuk, az 1 vagy a 0 állapotban.) Egy koordináta-rendszerben a két helyvektor végpontjai $\mathbf{u} = (x,y)$ és $\mathbf{v} = (z,w)$. Vagyis egy konkrét Ψ állapotot ezzel a 4 koordinátával – x, y, z és w – jellemezhetünk, tehát az állapot a négydimenziós tér egy pontja. De hogyan képzeljünk el egy négydimenziós teret? Erre nagyon sok lehetséges válasz van [1], de most számunkra a legpraktikusabb, ha úgy gondolunk rá, mint két síkbeli mutató összes lehetséges állására, amit persze térként elképzelni nem is olyan egyszerű.

Azonban a mutatóknak nem minden állása megengedett, ugyanis az *igen* és a *nem* valószínűsége összesen 1 kell, hogy legyen. Tehát

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = 1,$$



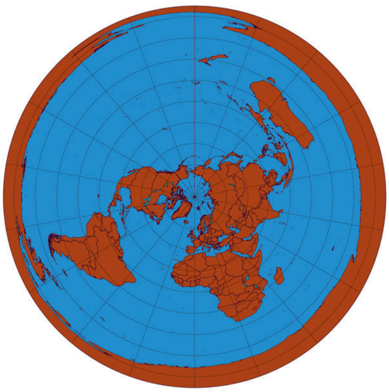
de tekintve, hogy a Pitagorasz-tétel szerint $|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2$ és $|\mathbf{v}|^2 = z^2 + w^2$, azt kapjuk, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ egyenlőségnek kell teljesülnie.

Mit jelent ez? Miképpen a síkon $x^2 + y^2 = 1$ egy origó középpontú 1 sugarú kör egyenlete – hiszen azt fejezi ki, hogy az (x, y) pont az origótól 1 távolságra van –, a térben $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ az origó középpontú 1 sugarú gömbfelület egyenlete, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ a négy dimenziós térbeli – szintén origó középpontú és 1 sugarú – gömb egyenlete, vagyis azt fejezi ki, hogy az (x, y, z, w) pont az origótól 1 távolságra van.

Az a tó tehát, amelyben egy kvantumbit ψ állapota mozoghat, egy négydimenziós térbeli gömbfelület. A gömbök családja a körvonallal kezdődik, ez egydimenziós (1D gömb) és a háromdimenziós térbeli gömbfelülettel folytatódik, ami mint felület, kétdimenziós (2D gömb). A család következő tagja a négydimenziós térbeli gömbfelület, ő maga háromdimenziós (3D gömb) [1].

De van még egy csavar – a szó szoros értelmében is – a dologban! Ugyanis a fizikai tulajdonságok szempontjából csak a két mutató hosszúsága számít (ugye ezek határozzák meg a valószínűségeket) és az általuk bezárt szög. Azaz ha a két vektort egyszerre elforgatjuk ugyanazzal a szöggel, az fizikailag érdemben nem különböző eset. Mi lehet akkor a fizikailag releváns állapotok tere? Az összes lehetséges hossz a hozzájuk tartozó összes lehetséges közbezárt szöggel.

Egy konkrét állapot esetén fix az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ hossza, meg az általuk bezárt szög is. Még nem rögzített viszont ennek az egész rendszernek a helyzete a síkon. Minden állapotot el tudunk forgatni úgy, hogy az $\mathbf{u}$ mutató az $x-y$ síkon az x tengely pozitív irányába mutasson, és ilyenkor a fizikai állapotot meghatározza a $\mathbf{v}$ mutató állása – hiszen az $\mathbf{u}$ hosszúságát meghatározza $\mathbf{v}$ hosszúsága, az irányát meg lefixáltuk. A $\mathbf{v}$ mutató az egységsugarú körlap bármelyik pontjába mutathat, tehát azt mondhatnánk, hogy a fizikailag releváns állapotok tere egy körlap. De vegyük észre, hogy ha a $\mathbf{v}$ hosszúsága 1, vagyis a körlap peremére mutat, akkor az $\mathbf{u}$ összemegy nullvektorrá. Ilyenkor a két mutató egyszerre forgatásával igazából a $\mathbf{v}$ forog a körvonalon, ezek tehát fizikailag ugyanazt az állapotot jelölik, ez az állapot az egyik bója, a *nem,* hiszen az *igen* valószínűsége ilyenkor 0. Tehát a fizikailag releváns állapotok tere egy körlap, aminek a peremköre egyetlen pontnak számít. Olyan, mintha egy körlap alakú batyu peremét összehúznánk egy ponttá. Mit kapunk? Egy 2D gömbfelületet. Ezt talán könnyebb elképzelni, ha rátekintünk az *ábrán* levő térképre, amin a körlap teljes peremköre egyetlen pontot jelöl, a déli sarkot.



Tehát míg az összes állapotok tere a 3D gömbfelület, a fizikailag érdemben különböző állapotok tere a hagyományos 2D gömbfelület. A fizikusok ezt hívják Bloch-gömbnek. A két bója, az *igen* ($\mathbf{v}=(0,0)$) és a *nem* ($\mathbf{u}=(0,0)$), a gömbfelület két pólusa, erre utal az, hogy fel- vagy lefelé áll a spin. A köztük lévő szélességi körök egy-egy konkrét valószínűségnek felelnek meg, például az egyenlítő pontjaiban az *igen* és a *nem* valószínűsége egyaránt 50%.

Ha valaki jóban van a komplex számokkal …

… annak ezt az egészet sokkal tömörebben is el lehet mondani. A mutatók az $\mathbf{u}=x+y\mathrm{i}$ és $\mathbf{v}=z+w\mathrm{i}$ komplex számok, maga az állapot pedig egy kétdimenziós komplex vektor:

$$\Psi=(\mathbf{u},\mathbf{v}).$$

A fizikusok szeretik a két bázisvektort – a bójákat – így jelölni:

$$|1\rangle=(1,0) \quad \text{és} \quad |0\rangle=(0,1),$$

és így az állapot

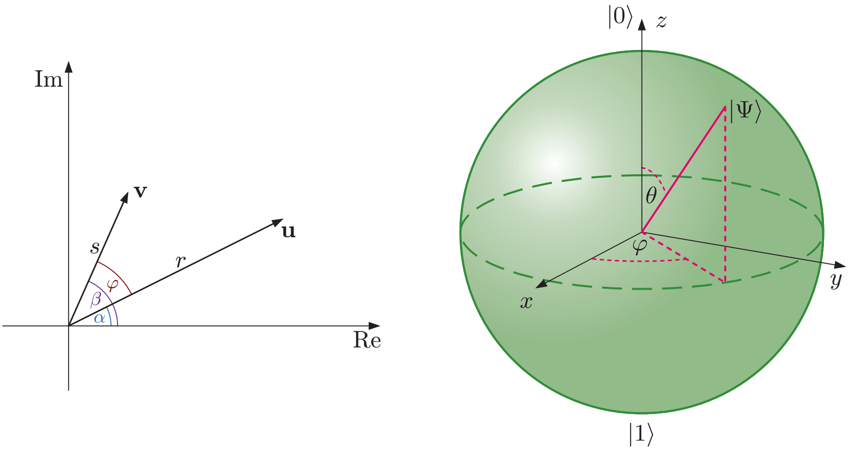
$$\Psi=\mathbf{u}\,|0\rangle+\mathbf{v}\,|1\rangle.$$

Vagyis az állapot a kvantumbit 0 és 1 értékeinek szuperpozíciója, azaz komplex együtthatós lineáris kombinációja. Több állapotú rendszer esetén ugyanez történik, a mérhető állapotok szuperpozíciójaként egy megfelelő dimenziós komplex vektort kapunk.

A Bloch-gömbön a megfelelő pontot úgy kapjuk meg, ha az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ komplex számokat átírjuk trigonometrikus alakba:

$$\mathbf{u} = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\cdot\sin\alpha) \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = s(\cos\beta + \mathrm{i}\cdot\sin\beta),$$

majd a szögek különbségére bevezetjük a $\varphi = \beta - \alpha$ jelölést. Mivel r és s pozitív és $r^2 + s^2 = 1$, ezért van olyan δ szög, amire $\alpha \leqslant \delta \leqslant \pi/2$ és $r = \cos\delta$ és $s = \sin\delta$. Ekkor a Ψ állapothoz hozzárendelhetjük a gömbfelületnek azt a pontját, aminek φ a hosszúsági koordinátája, amelyre így teljesül, hogy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, és $\theta = 2\delta$ a szélességi koordinátája, amire pedig a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ egyenlőtlenség teljesül.

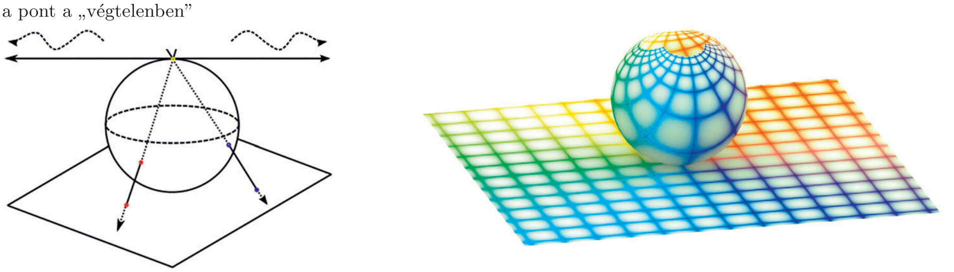


A két komplex szám szöge és hossza, és a Bloch-gömb koordinátái

Feladat: Ellenőrizzük, hogy így valóban egy jóldefiniált pontot adtunk meg a körvonalon, ami csak a Ψ-hez tartozó fizikailag releváns állapottól függ. Mutassuk meg, hogy ez ugyanaz a konstrukció, mint az $\mathbf{u}$ mutató beforgatása, majd a batyu peremének összehúzása.

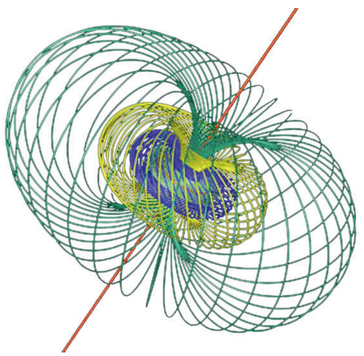
A két mutató együttes körbeforgatása által minden fizikailag különböző állapothoz körvonalnyi sok tényleges állapot tartozik. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a 2D gömbfelület minden pontjához tartozik egy körvonal a 3D gömbfelületen, és ezek a körök kitöltik a 3D gömbfelületet, azaz minden pont pontosan egy ilyen körön van rajta. Ezt nevezik Hopf-fibrálásnak: a 3D gömbfelület 2D gömbfelületnyi sok 1D gömbfelület – azaz körvonal – uniója. (Ezeket a köröket nevezik Hopf-köröknek.) Ezt persze nagyon nem könnyű elképzelni. Vajon meg tudjuk jeleníteni valahogy ezeket a köröket?

Elég reménytelennek tűnik, de meg lehet csinálni! A sztereografikus projekció segítségével egy 2D gömbfelületet egy pontjából ki tudjuk vetíteni a gömböt az átellenes pontjában érintő síkra, ahogy az *ábra* mutatja.



A sztereografikus projekció

Egyedül a vetítési pontnak nem lesz képe, vagy ha úgy tetszik, a végtelenbe vetül. Ugyanezen a módon a 3D gömbfelületet kivetíthetjük a háromdimenziós térbe egyik pontjából. Ezáltal a Hopf-körök képei egymással hurkolódó körök lesznek, a körök mindegyike egy-egy fizikailag releváns állapotot jelenít meg. A középső vízszintes kör az egyik bója (például az *igen*), a középpontján átmenő merőleges egyenes pedig a másik bója (a *nem*). A többiek egyre dagadtabb tóruszfelületeken ferdén futó körök, egyszer megkerülik a tóruszt a meridián irányban (megkerülik a tórusz csövét), és longitúdó irányban is (a tórusz középköre mentén körbe). Az egyre dagadtabb tóruszok felelnek meg a Bloch-gömb szélességi köreinek, tehát a konkrét valószínűségeknek. Ahogy a szélességi kör rászűkül a gömb egyik pólusára, a hozzá tartozó tórusz az *igen*-körré húzódik össze, a másik pólusnál pedig a végtelen méretűvé dagadó tórusz a *nem* egyenesére húzódik rá. Persze a 3D gömbben az összes Hopf-kör ugyanakkora méretű, és a *nem* egyenese is egy ugyanilyen kör, csak a térben a vetítés miatt különböző méretűek lettek, ahogy az árnyékok is megnyúlnak.



Hopf-fibrálás a térben

Összefoglalva, egy kvantumbit állapotait a Hopf-fibrálás szemléltetheti. A teljes állapotok a négydimenziós térbeli 3D gömbfelület pontjai, a fizikailag releváns állapotok a háromdimenziós térbeli 2D gömbfelület pontjai. A 2D gömbfelület minden pontjához tartozik egy kör a 3D gömbfelületen, ezen helyezkednek el az azonos fizikailag releváns állapotok.

Ezek a körök alkotják a Hopf-fibrálást, ami a sztereografikus projekció segítségével a háromdimenziós térben is megjeleníthető. Niles Johnson animációján jól követhetőek ezek a körök: `https://youtu.be/AKotMPGFJYk`.

Irodalom

[1] Pintér Gergő: *Új világok teremtése – Geometriai képzetek és képződmények,* Typotex Kiadó (2020).

Pintér Gergő

Ilyen volt az első magyarországi „Matek az Utcán”

A Bolyai Társulat idén először kapcsolódott be a nemzetközi *Mathematics in the Street* eseménybe a Matematika Világnapja, vagyis a π-nap (3. hó 14.) alkalmából. Az idei világnap azért is különleges, mert az UNESCO 2023-at Bolyai Emlékévnek nyilvánította, hiszen idén lesz Bolyai János „temesvári levelének” 200. évfordulója, amelyben a nem-euklidészi geometria felfedezését jelentette be.

A Matematika Világnapja alkalmából a Bolyai János Matematikai Társulat és 70 önkéntes az ország 7 helyszínén rendezte meg a *Matek az Utcán* eseményt, ahol a járókelők felfedezhették a matematika ezerféle arcát.

Buffon-tűk dobálása és ördöglakatok a Blaha Lujza téren

A tevékenységek változatos közönséget céloztak meg. Azokat, akik eddig nem érdeklődtek a matematika iránt, matematikai művészettel, ördöglakatokkal, matematikatörténeti kvízzel és flashmobokkal szórakoztatták a szervezők, a ceglédi π-flashmobról például látványos drónfelvétel is készült. Ugyanakkor a profi matekosokat is rengeteg gondolkodnivaló várta, többek között:

- Budapesten fraktálok, Buffon-tűk és topológiai kísérletezés;
- Cegléden logikai fejtörők, becslési-mérési feladatok és stratégiás játékok;
- Debrecenben térbeli Galton deszka, csoportos NIM játékok és Kairó ötszögek;
- Nagykanizsán logikai játékok és pível kapcsolatos tevékenységek;
- Szombathelyen pentominók, sakkfeladványok és Gömböc;
- Veszprémben logikai játékok és polydronépítkezés.

Az eseményen változatos formában került elő a π: közelítették az értékét óriási emberkör és hullahoppkarikák segítségével, készült 16 méteres papírkígyó a π első 1260 számjegyével, művészeti alkotások készültek a π-ről, és lehetett lufit nyerni a π egy-egy számjegyével. Találós kérdés: miért kezdődött a ceglédi esemény 9:52 perckor?

Tekergőző π-kígyó Cegléden

Kairó-ötszögek Debrecenben

A π mérése hullahoppkarikával Nagykanizsán

Gyufaszem Szombathelyen

Az eseményeket 70 önkéntes valósította meg. Amikor a társulat meghirdette a tagságának és a matematikatanár közösségekben, hogy önkénteseket keres az esemény megvalósításához, még remélni sem merte, hogy ilyen sok helyszínen ennyire változatos programok lesznek. Az önkéntesek matematikatanárok, matematikusok, egyetemi hallgatók és középiskolai diákok voltak. Ők szervezték meg a helyi eseményeket, töltötték fel tartalommal, és vezették le a tevékenységeket az esemény napján. Sok szakmai kapcsolat is épült, például a ceglédi eseményt szervező matematika-

Polydronépítkezés Veszprémben

tanárok megalapították a Ceglédi Pí Klubot a hosszútávú együttműködés érdekében.

A közönségben minden korosztály előfordult: totyogók dobáltak Buffon-tűket, gyerekek versengtek aszfaltkvízben, felnőttek játszottak a Logifaces és Poliuniverzum készletekkel, és nyugdíjasok lépkedtek életnagyságú sakktáblán. Volt, aki csak ebédelni indult, és úgy botlott az eseménybe, volt, aki tudatosan a programra érkezett, és volt, aki a buszra várva ugrott be egy játékra. Az esemény meggyőzően illusztrálta a 2023-as Matematika Világnapja mottóját: a matematika mindenkié!

Szász Réka

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Három testvér, Dia, Viki és Dávid Keszthelyről Balaton körüli kerékpártúrára egyszerre indul. Dia 20 km/h sebességgel haladva 18 óra 30 perckor, Dávid 35 km/h sebességgel tekerve 14 órakor ért haza. Mekkora sebességgel haladt Viki, ha ő pontosan 15 órakor ért vissza Keszthelyre? (*12 pont*)

2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2+x-2}{-x^2+5x-4}+\frac{-2x^2+9x-4}{2x^2+3x-2}=2. \qquad (\textit{13 pont})$$

3. Az $ABCD$ húrtrapéz D-ből induló magasságának talppontja az AB alapon E, átlóinak metszéspontja M. Tudjuk, hogy $AE=4$, $EB=9$ és $BDA\sphericalangle=90^\circ$.

a) Mekkora a trapéz területe? (*6 pont*)

b) Bizonyítsuk be, hogy az MDA háromszög területe mértani közepe az MAB és MCD háromszögek területének. (*7 pont*)

4. Egy gúla alaplapja egység oldalú négyzet. Egyik oldaléle szintén egységnyi hosszúságú és egybeesik a gúla magasságával. Mekkora a gúla szomszédos lapjai által bezárt szögek közül a legnagyobb? (*13 pont*)

II. rész

5. Blicc úr minden hétköznap villamossal megy dolgozni, de sohasem vesz jegyet. A villamosra minden nap p valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 7000 Ft-ra bünteti meg a jegy nélkül utazókat. Egy villamosjegy 350 Ft. Annak a valószínűsége, hogy Blicc úrnak büntetésmentes hete lesz: 0,1935.

a) Adjuk meg p értékét. (*3 pont*)

b) Mennyi az esélye annak, hogy Blicc urat pontosan kétszer büntetik meg a következő héten? (*3 pont*) *c*) Blicc urat április elsején megbüntették. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Blicc úrnak anyagilag megéri, ha a büntetés után még három hétig jegy nélkül utazik? (*4 pont*)

d) Hány utazás után lesz legalább 99,99% az esélye annak, hogy Blicc úr nem ússza meg a büntetést? (*6 pont*)

6. Számológép használata nélkül határozzuk meg az alábbi kifejezések pontos értékét:

a)
$$\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+$$
$$+\log_2\left(1+\frac{1}{14}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{15}\right);$$
(*3 pont*)

b)
$$\log_{36}1+\log_{36}2+\log_{36}3+\log_{36}4+\log_{36}6+\log_{36}9+$$
$$+\log_{36}12+\log_{36}18+\log_{36}36;$$
(*4 pont*)

c)
$$2^{\lg 2}\cdot(2^{\lg 5}+5^{\lg 2});$$
(*4 pont*)

d)
$$\log_2 25\cdot\log_3 16\cdot\log_5 27.$$
(*5 pont*)

7. Adottak a $k_1: x^2+y^2-6x-4y-3=0$ és $k_2: x^2+y^2-12x+12y+63=0$ egyenletű körök. Tükrözzük k_1-et a $P(1;5)$ pontra, a kapott kört jelölje k_1'.

a) Írjuk fel k_1' egyenletét. (*5 pont*)

Megrajzolva a k_1' és k_2 körök két-két közös belső és külső érintőit, azok rendre a Q és az R pontban metszik egymást.

b) Határozzuk meg a Q és az R pont koordinátáit. (*11 pont*)

8. Egy háromszög oldalainak hossza $a=3$, $b=7$ és $c=8$ egység.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak. (*7 pont*)

b) Adjuk meg a háromszög beírt és körülírt körének területarányát. (*6 pont*)

c) Mekkora részekre osztják a beírt kör érintési pontjai a háromszög oldalait? (*3 pont*)

9. Az $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ másodfokú függvény grafikonja áthalad a $P(1;6)$, $Q(3;8)$ és $R(7;0)$ pontokon.

a) Határozzuk meg az a, b, c együtthatók értékét. (*6 pont*)

b) Írjuk fel a függvénygörbe 5 abszcisszájú pontjában az érintő egyenletét. (*4 pont*)

c) Számítsuk ki ezen érintő, a függvény grafikonja és az x tengely által határolt síkidom területét. (*6 pont*)

Fonyóné Németh Ildikó, Fonyó Lajos
Keszthely

Megoldásvázlatok a 2023/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a) Hány olyan,* egész *számokból álló számhármas van, melyben a három szám szorzata* 6*? (Két számhármast nem tekintünk különbözőnek, ha csak a számok sorrendjében térnek el egymástól.)* *(4 pont)*

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós *számok halmazán:*

b) $(x+1)(x-2)(x-3)=6;$ *(5 pont)*

c) $(\sin x\cos x-2\sin x)(2\sin x-1)=0.$ *(5 pont)*

Megoldás. *a)* Mivel $6=3\cdot 2$, ezért ha mindhárom szám pozitív, akkor csak a $(6;1;1)$ és a $(3;2;1)$ számhármasok felelnek meg. Ám három szám szorzata akkor is pozitív, ha a számok közül pontosan kettő negatív és egy pozitív, ezért a fentiekből képezhetők még a következő megfelelő számhármasok: $(-6;-1;1)$, $(6;-1;-1)$, $(-3;-2;1)$, $(-3;2;-1)$ és $(3;-2;-1)$.

Összesen 7 megfelelő számhármas van.

b) A bal oldalon elvégezzük a kijelölt szorzásokat és nullára rendezünk: $x^3-4x^2+x=0$, majd kiemelhetünk x-et: $x(x^2-4x+1)=0$. A szorzat valamelyik tényezője nulla kell, hogy legyen, ezért $x_1=0$. Az $x^2-4x+1=0$ egyenlet megoldásai: $x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

c) Kiemelünk $\sin x$-et az első szorzótényezőből: $\sin x(\cos x-2)(2\sin x-1)=0$. A szorzat értéke pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Ha $\sin x=$ $=0$, akkor $x_1=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, továbbá $\cos x=2$ nem lehetséges. Ha $2\sin x-1=0$, akkor $\sin x=\frac{1}{2}$, így $x_2=\frac{\pi}{6}+2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$ vagy $x_3=\frac{5\pi}{6}+m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

2. *Az úgynevezett normál zenei A hang frekvenciája* 440 Hz. *Az egy oktávval magasabb A hang frekvenciája éppen kétszer ekkora, azaz* 880 Hz. *Közöttük* 11 *„félhang” van, ld. a* táblázatot.

hang neve	**frekvencia (Hz)**
A	440
B	
H	
C	
Cisz	
D	
Disz	
E	
F	
Fisz	
G	
Gisz	
A′	880

Két szomszédos félhang frekvenciájának hányadosa állandó, jelölje ezt az állandót q.

a) Igazoljuk, hogy q értéke öt tizedesjegy pontossággal 1,059 46. *(4 pont)*

b) Határozzuk meg a táblázatban az egymás után következő félhangok hiányzó frekvenciáit egész Herzre kerekítve. *(3 pont)*

Ha két hang egyszerre szólal meg, az emberi fül általában azokat a hangközöket hallja „szépnek”, amelyekben a két megszólaló hang frekvenciájának hányadosa minél „egyszerűbb” törttel fejezhető ki. A kvint *hangköz* *például két olyan hang együttes megszólalását jelenti, melyek 7 félhangnyi távolságra vannak egymástól. A két hang frekvenciájának hányadosa ilyenkor nagyon közel van a $\frac{3}{2}$-hez.*

c) Számítsuk ki a két hang frekvenciájának hányadosát három tizedesjegy pontossággal és határozzuk meg, hogy a hányados hány százalékkal tér el a $\frac{3}{2}$-től. *(4 pont)*

d) Tekintsük növekvő sorrendben a félhangok frekvenciáinak pontos értékét, majd ezeknek az értékeknek a kettes alapú logaritmusát. Az ezekből képzett sorozatot jelölje $\{a_n\}$. Válasszuk ki az alábbiak közül az igaz állítás betűjelét. *(2 pont)*

A) *Az $\{a_n\}$ sorozat számtani sorozat, melynek differenciája $\frac{1}{12}$.*

B) *Az $\{a_n\}$ sorozat számtani sorozat, melynek differenciája $\sqrt[12]{2}$.*

C) *Az $\{a_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $\frac{1}{12}$.*

D) *Az $\{a_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $\sqrt[12]{2}$.*

Megoldás. *a)* $880 = 440 \cdot q^{12}$, azaz $2 = q^{12}$, tehát $q = \sqrt[12]{2}$, amely öt tizedesjegy pontossággal valóban 1,059 46.

b) A hiányzó frekvenciák rendre:

466, 494, 523, 554, 587, 622, 659, 698, 740, 784, 831, 880.

c) A két hang frekvenciájának aránya $q^7 \approx 1{,}4983$, ennek az eltérése az 1,5-től 0,0017, amely az 1,5-nek 0,11%-a.

d) A helyes válasz betűjele: A.

3. *A $3x - 2y - 7 = 0$ egyenletű egyenes merőleges az $ax - 6y + 1 = 0$ egyenletű egyenesre.*

a) Határozzuk meg a értékét. *(4 pont)*

A $3x - 2y + k = 0$ egyenletű egyenes az x-tengelyt a P, az y-tengelyt a Q pontban metszi.

b) Határozzuk meg k lehetséges értékeit, ha az OPQ háromszög területe 75 egység (O a koordináta-rendszer origóját jelöli). *(7 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Az első egyenes egy normálvektora $(3; -2)$, a másodiké $(a; -6)$. Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor a két normálvektor is merőleges egymásra, tehát skaláris szorzatuk értéke nulla, vagyis $3a + 12 = 0$, ahonnan $a = -4$.

II. megoldás. Rendezzük y-ra az egyenleteket: $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$, illetve $y = \frac{a}{6}x + \frac{1}{6}$. Ha a két egyenes merőleges egymásra, akkor a meredekségeik szorzata -1, vagyis $\frac{3}{2} \cdot \frac{a}{6} = -1$, ahonnan $a = -4$.

b) A P pontban $y = 0$, így $x = -\frac{k}{3}$, a Q pontban pedig $x = 0$, így $y = \frac{k}{2}$, tehát $P\left(-\frac{k}{3}; 0\right)$, és $Q\left(0; \frac{k}{2}\right)$. Az OPQ háromszög derékszögű, befogóinak hossza $\left|-\frac{k}{3}\right|$, illetve $\left|\frac{k}{2}\right|$, így a háromszög területe

$$T = \frac{\left|-\frac{k}{3}\right| \cdot \left|\frac{k}{2}\right|}{2} = \frac{k^2}{12} = 75,$$

amelyből kapjuk, hogy $k=\pm 30$. (Ezen k értékeknél az egyenes egy 10 és 15 egység befogójú derékszögű háromszöget vág le a II., illetve a IV. síknegyedből, s ezek területe valóban 75 egység.)

4. *A Boci tej* 1 *literes dobozban* 380 *forintba kerül az üzletben,* 2 *deciliteres dobozban pedig dobozonként* 220 *forintba.*

a) Ha 2 *deciliteres dobozokban veszünk összesen* 1 *liter tejet, akkor hány százalékkal fizetünk többet, mint ha egy doboz* 1 *literes tejet vettünk volna?* (*3 pont*)

A 2 dl*-es tejesdoboz – matematikai értelemben – hasonló az* 1 *litereshez. A tejet forgalmazó cég számára a dobozokba tölthető tej ára a tej térfogatával, a tejesdoboz előállítási költsége pedig a doboz felszínével egyenesen arányos. Egy liter dobozba tölthető tej a forgalmazó cég számára* 210 *forintba kerül, az egy literes tejesdoboz előállítása pedig* 80 *forintba.*

b) Hány százalékkal kerül többe az öt darab 2 dl*-es kiszerelésű tej előállítása, mint az egy doboz* 1 *literes kiszerelésű tejé?* (*6 pont*)

Minőségellenőrzéskor a legyártott tejesdobozoknak átlagosan 4%*-át sérültnek találják.*

c) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 10 *véletlenszerűen kiválasztott tejesdoboz közül legfeljebb* 1 *sérültet találnak.* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Öt doboz 2 deciliteres tej ára 1100 forint, ez 720 forinttal több, mint az 1 literes tej ára, így $\frac{720}{380}\cdot 100\approx 189\%$-kal fizetünk többet.

b) 2 dl tej előállítási költsége 42 Ft. Mivel $1:5=0{,}2$, a dobozok hasonlóságának aránya $\sqrt[3]{0{,}2}$ ($\approx 0{,}585$). A 2 dl-es doboz felszíne az 1 literesének $\left(\sqrt[3]{0{,}2}\right)^2\approx 0{,}342$-szerese (kb. 34%-a), így a csomagolóanyag előállítási költsége ($\approx 0{,}342\cdot 80\approx$) 27,4 Ft. Tehát a 2 dl-es kiszerelésű tej előállítása dobozonként kb. 69,4 Ft. Az öt darab 2 dl-es csomagolású tej előállítási költsége kb. 347 Ft, ami $\frac{347-290}{290}\cdot 100\approx$ $\approx 20\%$-kal több, mint az 1 literesé.

c) Az $n=10$ és $p=0{,}04$ paraméterű binomiális eloszlást felhasználva:

$$P(\text{legfeljebb 1 sérült})=P(0\text{ sérült})+P(1\text{ sérült})=$$

$$=0{,}96^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}04\cdot 0{,}96^{9}\approx 0{,}665+0{,}277=0{,}942.$$

II. rész

5. *a*) *Hány olyan egyenest határoznak meg egy téglatest csúcsai, melyek nem illeszkednek a téglatest egyik élére sem?* (*3 pont*)

Egy 12 cm *sugarú gömbbe téglalap alapú egyenes hasábot írunk úgy, hogy a hasáb csúcsai a gömb felületén vannak. A hasáb alaplapja éleinek aránya* $1:2$*, a hasáb magassága* 16 cm*.*

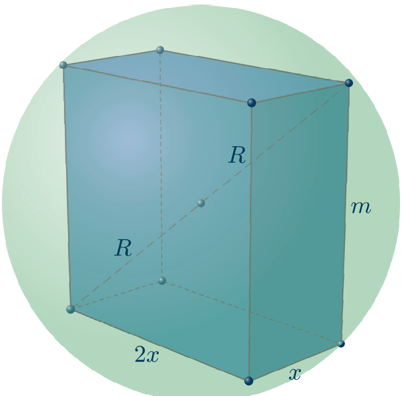
b) Mekkora a hasáb térfogata? (*5 pont*)

Egy 12 cm sugarú gömbből olyan dísztárgyat csiszolnak ki, melynek alakja téglalap alapú egyenes hasáb, és a hasáb alaplapja éleinek aránya 1 : 2.

c) Mekkora az így kicsiszolható legnagyobb dísztárgy térfogata? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A téglatest csúcsai közül semelyik három nem esik egy egyenesbe, ezért a 8 csúcs összesen $\binom{8}{2}=28$ egyenest határoz meg. A téglatestnek 12 éle van, az ezekre illeszkedő egyenesek nem felelnek meg. A csúcsok tehát összesen $28-12=16$ olyan egyenest határoznak meg, amely nem illeszkedik a téglatest egyik élére sem.

II. megoldás. A téglatest lapátlóira és testátlóira illeszkedő egyenesek felelnek meg a feltételeknek. Minden lapon 2, összesen tehát 12 lapátlója, valamint 4 testátlója van a téglatestnek, ezért $12+4=16$ megfelelő egyenes van.



b) Jelölje a gömb sugarát R, a hasáb magasságát m, a hasáb alapéleinek cm-ben mért hosszát pedig x és $2x$.

Szimmetria okok miatt a hasáb testátlója megegyezik a gömb egy átmérőjével. Ismert, hogy az a, b, c élű téglatest testátlójának hossza $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. A gömbbe írt hasábra tehát $2R=\sqrt{m^2+x^2+(2x)^2}$, azaz $24=\sqrt{16^2+x^2+(2x)^2}$ teljesül, amelyből $x=\sqrt{\frac{24^2-16^2}{5}}=8$ cm.

A hasáb térfogata $V=x\cdot 2x\cdot 16=2048\text{ cm}^3$.

c) A lehetséges legnagyobb dísztárgyat akkor kapjuk, ha a hasáb csúcsai a gömb felületére illeszkednek. Ekkor az előzőekhez hasonlóan a hasáb testátlója megegyezik a gömb egy átmérőjével, tehát (az *a*) feladat jelöléseit használva)

$$x=\sqrt{\frac{24^2-m^2}{5}}.$$

A hasáb térfogata

$$V=x\cdot 2x\cdot m=2x^2m=2\cdot\frac{24^2-m^2}{5}\cdot m=\frac{1152\,m-2m^3}{5}.$$

Az $f(m): \left]0;24\right[\to\mathbb{R}$, $f(m)=\frac{1152\,m-2m^3}{5}$ függvénynek ott lehet maximumhelye, ahol a deriváltja 0.

$f'(m)=\frac{1152-6m^2}{5}$, $f'(m)=0$, ha $1152-6m^2=0$, azaz $m=\sqrt{\frac{1152}{6}}=8\sqrt{3}\approx$ $\approx 13{,}86$. Az f deriváltfüggvényének előjele ennél kisebb m értékek esetén pozitív, nagyobb m értékek esetén pedig negatív, ezért ez valóban abszolút maximumhelye az f-nek.

A kicsiszolható legnagyobb dísztárgy térfogata $f\left(8\sqrt{3}\right)\approx 2128\text{ cm}^3$.

6. *Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a három dobott szám*

a) összege kisebb 5-nél; (*3 pont*)

b) között van 4-nél nagyobb; (*3 pont*)

c) szorzata osztható 6-tal. (*5 pont*)

A három dobott számot balról jobbra egymás mellé írjuk. Azt tapasztaljuk, hogy az így kapott háromjegyű számban a középső számjegy éppen a három számjegy mediánja.

d) Hány ilyen tulajdonságú háromjegyű számot kaphatunk? (*5 pont*)

Megoldás. *a*) 3 vagy 4 lehet az összeg.

$3 = 1 + 1 + 1$, ez 1 kedvező eset.

$4 = 1 + 1 + 2$, ez 3 kedvező esetet jelent, mert bármelyik kockával dobhatjuk a 2-est.

Az összes eset száma $6^3 = 216$.

A keresett valószínűség így $p_a = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} \approx 0{,}019$.

b) *I. megoldás.* Kedvezőtlen esetek azok, amikor minden dobás értéke legfeljebb 4, ezeknek az eseteknek a száma $4^3 = 64$.

A keresett valószínűség így $p_b = \frac{216-64}{216} = \frac{152}{216} = \frac{19}{27} \approx 0{,}704$.

II. megoldás. Kedvező esetek azok, amikor 1 vagy 2 vagy 3 olyan számot dobunk, amely 4-nél nagyobb. Az ilyen esetek száma rendre $\binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 4^2 (= 96)$, $\binom{3}{2} \cdot 2^2 \cdot 4 (= 48)$ és $\binom{3}{3} \cdot 2^3 (= 8)$.

A keresett valószínűség $p_b = \frac{96+48+8}{216} = \frac{152}{216} = \frac{19}{27} \approx 0{,}704$.

c) *I. megoldás.* Két diszjunkt esetre bontjuk a vizsgált eseményt.

1. Van 6-os a dobott 3 szám között: ez $6^3 - 5^3 = 91$ eset.

2. Nincs 6-os, de van 2-es és 3-as is a dobott számok között.

Nincs 6-os a dobott számok között 5^3 esetben. Ebből levonjuk azokat az eseteket, amikor nincs 2-es, illetve azokat, amikor nincs 3-as. Mindkettőből 4^3 eset van. Így azonban kétszer vonnánk le azokat az eseteket, amikor sem 2-es, sem 3-as nincs a dobott számok között, ez pedig 3^3 esetben fordul elő. Az olyan esetek száma tehát, amikor nincs 6-os, de van 2-es és 3-as is: $5^3 - 2 \cdot 4^3 + 3^3 = 24$.

A keresett valószínűség $p_c = \frac{91+24}{216} = \frac{115}{216} \approx 0{,}532$.

II. megoldás. A kedvezőtlen esetek számát határozzuk meg. Kedvezőtlenek azok az esetek, amikor nincs 6-os, továbbá a 2-es és a 3-as közül is legalább az egyik hiányzik.

Nincs se 6-os, se 2-es 4^3 esetben és ugyanennyi esetben nincs se 6-os, se 3-as. Így azonban kétszer számoljuk azokat az eseteket, amikor se 6-os, se 2-es, se 3-as nincs a dobott számok között (3^3 eset). A kedvezőtlen esetek száma tehát $2 \cdot 4^3 - 3^3 = 101$.

Ekkor a keresett valószínűség $p_c = \frac{216-101}{216} = \frac{115}{216} \approx 0{,}532$.

d) I. megoldás. Egy $\overline{abc}$ háromjegyű szám akkor felel meg a feltételnek, ha $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 6$ vagy $6 \geqslant a \geqslant b \geqslant c \geqslant 1$ teljesül (ekkor lesz a középső számjegy a három számjegy mediánja), tehát monoton dobássorozatokat keresünk. Esetszétválasztást végzünk aszerint, hogy a három számjegy között vannak-e egyformák.

$\overline{aaa}$ típusú számból 6 darab van (a értéke 1 és 6 között bármi lehet).

$\overline{aab}$ és $\overline{abb}$ típusú számból is $6 \cdot 5 = 30$ darab van, hiszen a és (az a-tól különböző) b értéke is tetszőleges lehet.

Végül, $\overline{abc}$ típusú számból $2 \cdot \binom{6}{3} = 40$ darab van, hiszen bármelyik három különböző számjegyet kiválaszthatjuk, és a kiválasztott három számjegyet kétféleképpen rendezhetjük (növekvő vagy csökkenő) sorba.

Összesen $6 + 30 + 30 + 40 = 106$ darab, a feltételeknek megfelelő számot kaphatunk.

II. megoldás. Az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számjegyekből a sorrendre való tekintet nélkül válasszunk ki hármat úgy, hogy egy-egy számjegyet többször is kiválaszthatunk. A lehetséges kiválasztások száma megegyezik hat elem harmadosztályú ismétléses kombinációinak számával, azaz $\binom{6+3-1}{3} = 56$. Ha a kiválasztott három számjegy nem egyforma, akkor ezeket kétféleképpen rendezhetjük (növekvő vagy csökkenő) sorba. Abban a hat esetben, amikor a kiválasztott három számjegy egyforma, a sorbarendezés egyértelmű. Ezért összesen $2 \cdot 56 - 6 = 106$ darab, a feltételeknek megfelelő számot kaphatunk.

7. *a) Tekintsük az $a_n = \sin(n \cdot 7^\circ)$ sorozatot ($n \in \mathbb{Z}^+$). A sorozat első 100 tagja közül melyik a három legkisebb?* *(6 pont)*

b) Igazoljuk, hogy a $\dfrac{3}{\cos^2 x - \cos x + 1}$ kifejezés minden valós x esetén értelmezhető. *(3 pont)*

c) Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{\cos^2 x - \cos x + 1}$$

függvény értékkészletét. Hol veszi fel a függvény a maximumát? *(7 pont)*

Megoldás. *a)* $700^\circ < 2 \cdot 360^\circ$, így elég az első két periódust megvizsgálni. A $\sin x$ minimuma az $x = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) helyeken van. $39 \cdot 7^\circ = 273^\circ$, így az első periódusban a három legkisebb értékhez tartozó hely: 273°, 266° és 280° ($n = 39$, 38 és 40 esetén).

A második periódusban $90 \cdot 7^\circ = 630^\circ$, így ebben az esetben a három legkisebb értékhez tartozó hely: 630°, valamint 623° és 637° ($n = 90$, 89 és 91 esetén).

Kihasználva a szinuszfüggvény menetét a minimumhelyének környezetében, valamint, hogy $\sin x = \sin(x + k \cdot 360^\circ)$, a három legkisebb értékhez tartozó hely: 630°, 273° és 266°.

Tehát a sorozat első 100 tagja közül a 90., a 39. és a 38. tag a három legkisebb (értékük -1, illetve közelítőleg $-0{,}9986$ és $-0{,}9976$).

b) A kifejezés akkor értelmezhető, ha a nevezője nem nulla. A nevezőt átalakítva:

$$\cos^2 x - \cos x + 1 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4},$$

ezért a nevező semmilyen valós x-re nem nulla, tehát a kifejezés valóban minden valós x-re értelmezhető.

c) Minden valós x-re

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1,$$

$$-\frac{3}{2} \leqslant \cos x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2},$$

$$0 \leqslant \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{3}{2},$$

$$0 \leqslant \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{4},$$

$$\frac{3}{4} \leqslant \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \frac{12}{4} = 3,$$

$$4 \geqslant \frac{3}{\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geqslant 1.$$

A függvény értékkészlete tehát az $[1;4]$ intervallum (és folytonossága miatt az intervallum minden elemét fel is veszi).

Maximumát ott veszi fel, ahol a tört nevezője minimális, tehát $\cos x - \frac{1}{2} = 0$, azaz $\cos x = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

8. *G egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen 6 éle van.*

a) Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább egy olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? *(2 pont)*

b) Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? *(2 pont)*

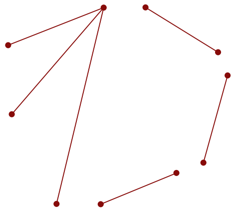
Egy szabályos tízszög legrövidebb átlója egységnyi hosszúságú.

c) Határozzuk meg a tízszög oldalainak hosszát. *(3 pont)*

Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen kiszínezünk négyet.

d) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf fagráf lesz. *(9 pont)*

Megoldás. *a*) Igaz. G csúcsainak fokszámösszege (a 6 él miatt) 12. A 10 csúcs között így biztosan kell lennie olyannak, amelynek a fokszáma legalább 2.

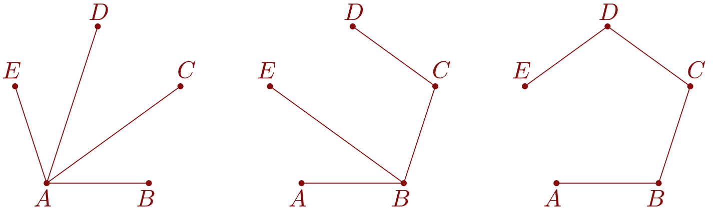


b) Nem igaz. Egy ellenpéldát mutat az *ábra.*

c) A szabályos tízszög egy belső szöge 144°. Jelölje a keresett oldalhosszt x. Tekintsük azt az egyenlő szárú háromszöget, melynek csúcsai a tízszög három szomszédos csúcsa. Ennek a háromszögnek az alapja a tízszög legrövidebb átlóinak egyike, szárai pedig a tízszög oldalai. Ezt a háromszöget az alaphoz tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. Egy ilyen háromszögben: $\sin 72° = \frac{0{,}5}{x}$, ahonnan $x = \frac{0{,}5}{\sin 72°} \approx 0{,}526$.

A tízszög oldalai (három tizedesjegy pontossággal) 0,526 egység hosszúak.

d) *I. megoldás.* Az ötpontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{5}{2} = 10$. Ezek közül 4-et $\binom{10}{4} = 210$-féleképpen tudunk kiválasztani (összes eset száma). A színezett élekből fagráfot az alábbi háromféle (nem izomorf) gráf esetén kapunk:



Az 1. típus esetén 5-féleképpen választhatjuk meg az ábrán A-val jelölt negyedfokú csúcsot, ilyenből tehát 5 darab van.

A 2. típus esetén az ábrán B-vel jelölt harmadfokú csúcsot 5-féleképpen választhatjuk meg. A B-ből induló 4 él közül $\binom{4}{3} = 4$-féleképpen választhatjuk ki a kiszínezett 3-at, majd 3-féleképpen a negyedik színezett élt (mely az előbb kiválasztott élek egyikének végpontját köti össze az ötödik csúccsal). Ilyenből tehát $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ darab van.

A 3. típus esetén a négy színezett él egy 4 hosszúságú utat alkot. Az út csúcsainak sorrendjét $5! = 120$-féleképpen választhatjuk meg, de minden utat kétszer számoltunk (oda és vissza is), tehát ilyenből $\frac{120}{2} = 60$ darab van. A kedvező esetek száma tehát $5 + 60 + 60 = 125$, a keresett valószínűség pedig

$$p_d = \frac{125}{210} = \frac{25}{42} (\approx 0{,}595).$$

II. megoldás. Az ötpontú teljes gráf éleinek száma: $\binom{5}{2} = 10$. Ezek közül 4-et $\binom{10}{4} = 210$-féleképpen tudunk kiválasztani (összes eset száma). Mivel a színezett élek száma 4, a színezett élekből álló gráf pontosan akkor lesz fagráf, ha összefüggő. Komplementer módszerrel dolgozunk: megszámoljuk, hány olyan színezés van, amikor a színezett élekből álló gráf nem összefüggő. Ha nem összefüggő a gráf, akkor vagy egy-egy 3 és 2 pontú, vagy egy-egy 4 és 1 pontú komponensre esik szét.

Az első esetben egy 3 hosszúságú kör és egy ettől diszjunkt él van kiszínezve. A kör pontjait $\binom{5}{3} = 10$-féleképpen választhatjuk ki, a negyedik színezett él ezek után egyértelműen adott. Ez a típus tehát 10 különböző színezés esetén adódik.

Ha van egy 4 pontból álló komponens, akkor az ötödik, izolált pontot 5-féleképpen választhatjuk ki, majd a maradék 4 csúcs között tetszőlegesen húzhatunk be a 6 lehetséges közül 4 élt. Ebből tehát $5 \cdot \binom{6}{4} = 75$-féle lehetséges színezés adódik. A kedvezőtlen esetek száma összesen $10 + 75 = 85$, a keresett valószínűség pedig

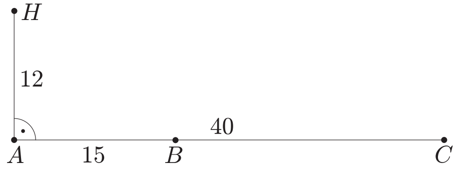
$$p_d = \frac{210 - 85}{210} = \frac{25}{42} (\approx 0{,}595).$$

Megjegyzés. A kedvező esetek száma az ötpontú „számozott” fák számával egyezik meg. Cayley tétele szerint az n pontú számozott fák száma n^{n-2}, azaz $n = 5$ esetén éppen 125.

9. *Két város közti utat egy kamion odafelé* 60 km/h, *visszafelé* 50 km/h *átlagsebességgel tett meg.*

a) Határozzuk meg a kamionnak a két út egészére vonatkozó átlagsebességét. *(4 pont)*

A tengeren lévő (pontszerűnek tekintett) H szigetről árut szállítanak a tengerparton lévő C pontba. Az egyenesnek tekinthető partvonalnak azonban csak az AB szakaszán tud kikötni a hajó ($HA \perp AB$), ezért itt átrakodják a rakományát, és közúton (a part mentén) kamionnal szállítják el C-be. A rakodás egy óráig tart. Az adatok: $HA = 12$ km, $AB = 15$ km, $AC = 40$ km.



A hajó átlagsebessége a vízen 8 km/h, *a kamion átlagsebessége közúton* 40 km/h.

b) Melyik útvonal a gyorsabb: a HAC vagy a HBC? Mennyi a szállítási idő az egyes útvonalakon? *(4 pont)*

c) Az AB szakasz mely D pontján kössön ki a hajó, hogy a szállítmány a lehető leghamarabb eljusson C-be? Mennyi ekkor a szállítási idő? *(8 pont)*

Megoldás. *a)* Ha a két város közötti távolságot (km-ben) s jelöli, akkor odafelé $\frac{s}{60}$, visszafelé pedig $\frac{s}{50}$ óráig tartott az út, összesen tehát $\frac{s}{60} + \frac{s}{50}$ óráig. A két út egészére vonatkozó átlagsebesség

$$\frac{2s}{\frac{s}{60} + \frac{s}{50}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{50}} = \frac{2}{\frac{5}{300} + \frac{6}{300}} = \frac{600}{11} \text{ km/h} \approx 54{,}5 \text{ km/h}.$$

b) Meghatározzuk a két útvonalhoz tartozó szállítási időt:

$$t_{\text{HAC}} = t_{\text{HA}} + t_{\text{rakodás}} + t_{\text{AC}} = \frac{12 \text{ km}}{8 \text{ km/h}} + 1 + \frac{40 \text{ km}}{40 \text{ km/h}} = 3{,}5 \text{ óra}.$$

Pitagorasz-tétellel $HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = \sqrt{369}$ ($\approx 19{,}2$ km).

$$t_{\mathrm{HBC}} = t_{\mathrm{HB}} + t_{\mathrm{rakodás}} + t_{\mathrm{BC}} = \frac{\sqrt{369}\ \mathrm{km}}{8\ \mathrm{km/h}} + 1 + \frac{25\ \mathrm{km}}{40\ \mathrm{km/h}} \approx 4{,}03\ \text{óra}.$$

A HAC útvonal a gyorsabb.

c) Jelölje az AD távolságot d. Ekkor a hajóval megtett út $HD = \sqrt{12^2 + d^2}$. A HDC út megtételéhez szükséges idő (órában) d függvényében:

$$t_{\mathrm{HDC}}(d) = \frac{\sqrt{144 + d^2}}{8} + 1 + \frac{40 - d}{40}.$$

A $T(d) :]0; 15[\to \mathbb{R}$, $T(d) = \frac{\sqrt{144+d^2}}{8} + 1 + \frac{40-d}{40}$ függvénynek ott lehet minimumhelye, ahol a deriváltja 0. A deriváltfüggvény a következő:

$$T'(d) = \frac{d}{8\sqrt{144 + d^2}} - \frac{1}{40}.$$

$$T'(d) = 0, \quad \text{ha} \quad \frac{d}{8\sqrt{144 + d^2}} = \frac{1}{40}, \quad \text{azaz} \quad 5d = \sqrt{144 + d^2}.$$

Négyzetre emelhetünk $d > 0$ miatt, majd rendezve kapjuk, hogy

$$24d^2 = 144, \quad \text{azaz} \quad d = \sqrt{6} \approx 2{,}45\ \mathrm{km}.$$

Meg kell még vizsgálni, hogy az első derivált zérushelye valóban minimumhelye-e a függvénynek. Ehhez elegendő, ha $d = \sqrt{6}$-ban negatívból pozitívba vált a függvény előjele. Hogy ezt belássuk, alakítsuk át $T'(d)$-t a következőképpen:

$$T'(d) = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{d^2}{144 + d^2}} - \frac{1}{40} = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{144 + d^2 - 144}{144 + d^2}} - \frac{1}{40} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \sqrt{1 - \frac{144}{144 + d^2}} - \frac{1}{40}.$$

Könnyen végiggondolható, hogy d növelésével $T'(d)$ is nő, tehát $\sqrt{6}$-nál kisebb d értékekre negatív, $\sqrt{6}$-nál nagyobb d értékekre pedig pozitív, ezért $d = \sqrt{6}$ valóban minimumhelye a függvénynek.

(A második derivált előjelét is vizsgálhatjuk:

$$T''(d) = \frac{8\sqrt{144 + d^2} - d \cdot 8 \cdot \frac{d}{\sqrt{144+d^2}}}{64(144 + d^2)} = \frac{\sqrt{144 + d^2} - \frac{d^2}{\sqrt{144+d^2}}}{8(144 + d^2)} = \frac{144}{8(144 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ez minden d-re, így $d = \sqrt{6}$-ra is pozitív, így $d = \sqrt{6}$ valóban minimumhelye a függvénynek.)

Az út megtételéhez szükséges idő ekkor

$$T\left(\sqrt{6}\,\right) = \frac{\sqrt{150}}{8} + 1 + \frac{40 - \sqrt{6}}{40} = 2 + \frac{3\sqrt{6}}{5} \approx 3{,}47\ \text{óra}.$$

Mivel a kapott eredmény a $]0;15[$ intervallumon teljesül, így megállapítható, hogy a D pontra kapott 3,47 óra alacsonyabb az A pontbeli 3,5 óránál, valamint a B pontbeli 4,03 óránál is, vagyis a $[0;15]$ intervallumon, tehát a teljes AB szakaszon a D pontban történő kikötésnél lesz a szállítási idő a legkisebb.

Megjegyzés. Belátható, hogy a minimális idő $v_{\text{hajó}} \geqslant v_{\text{kamion}}$, valamint

$$\arcsin\left(\frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}}\right) \geqslant AHB\sphericalangle$$

esetén a HBC úthoz tartozik, egyébként pedig abban a D pontban érdemes kikötnie a hajónak, amelyre $\frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}} = \sin AHD\sphericalangle$ teljesül. A feladatban szereplő adatokkal $AD = \sqrt{6}$, $HD = \sqrt{150}$, és így valóban

$$\sin AHD\sphericalangle = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}} = \frac{1}{5} = \frac{8}{40} = \frac{v_{\text{hajó}}}{v_{\text{kamion}}}.$$

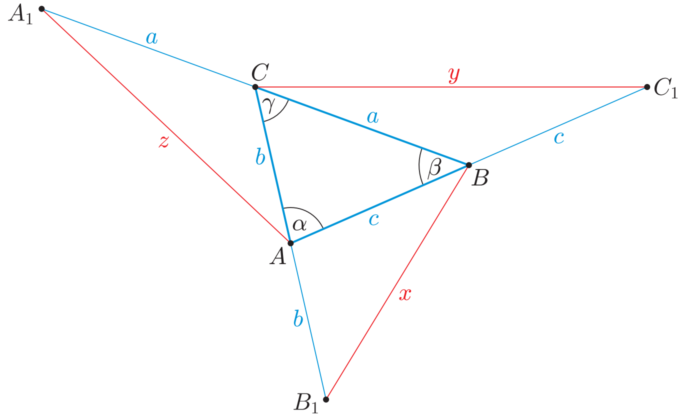
Koncz Levente
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5255. *Tükrözzük középpontosan az ABC háromszög A csúcsát B-re, B csúcsát C-re, és C csúcsát A-ra, így kapjuk rendre a C_1, A_1 és B_1 pontokat. Mutassuk meg, hogy AA_1, BB_1 és CC_1 hosszúságú oldalakkal háromszög szerkeszthető.*

(3 pont)

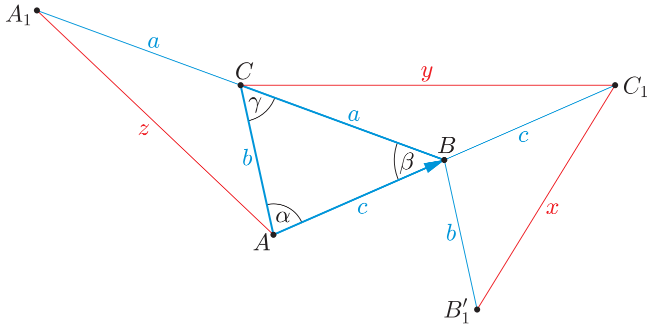
I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.



1. ábra

Mivel kiegészítőszögek, ezért $BAB_1\sphericalangle = 180° - \alpha$, $CBC_1\sphericalangle = 180° - \beta$, illetve $ACA_1\sphericalangle = 180° - \gamma = \alpha + \beta$.

Toljuk el az AB_1B háromszöget a $\overrightarrow{BC_1}$ vektorral. Ekkor az A csúcs B-be, a B csúcs pedig C_1-be kerül.



2. ábra

A fentiek alapján: $ABB_1'\sphericalangle = 180° - BAB_1\sphericalangle = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

Mivel két oldal ($A_1C = CB = a$ és $BB_1' = AC = b$) és az általuk bezárt szög ($CBB_1'\sphericalangle = A_1CA'\sphericalangle = \alpha + \beta$) egyenlő, ezért az $A_1CA\triangle \approx CBB1'\triangle$, amiből következik, hogy $CB_1' = z$. Az x, y és z oldalakkal tehát szerkeszthető háromszög ($CB_1'C_1\triangle$).

Geretovszky Márton (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Többen oldották meg hasonló módszerrel: az ábrából különféle geometriai transzformációkkal eljutottak egy másik ábrába, ahol megjelenik egy háromszög a három szükséges oldallal. Általában eltolásokat vagy tükrözéseket alkalmaztak. Sokan hiányosan indokolták meg, hogy különböző transzformációk a különböző pontokat miért viszik ugyanabba a pontba.

II. megoldás. Használjuk az 1. ábra jelöléseit. A háromszög-egyenlőtlenség alapján a BC_1C háromszögben $a + c > y$, valamint az ABA_1 háromszögben $c + z > 2a$.

A súlyvonalak hosszáról ismert egyenlőtlenség szerint pl. az a oldalhoz tartozó súlyvonal hosszára $s_a < \frac{b+c}{2}$, így a B_1BC háromszögben felírható, hogy $c < \frac{a+x}{2}$.

A három egyenlőtlenség rendezve:

$$a + c > y,$$
$$2a - c < z,$$
$$2c - a < x.$$

Az utolsó két egyenlőtlenséget összeadva:

$$2a - c + 2c - a < z + x,$$
$$a + c < z + x.$$

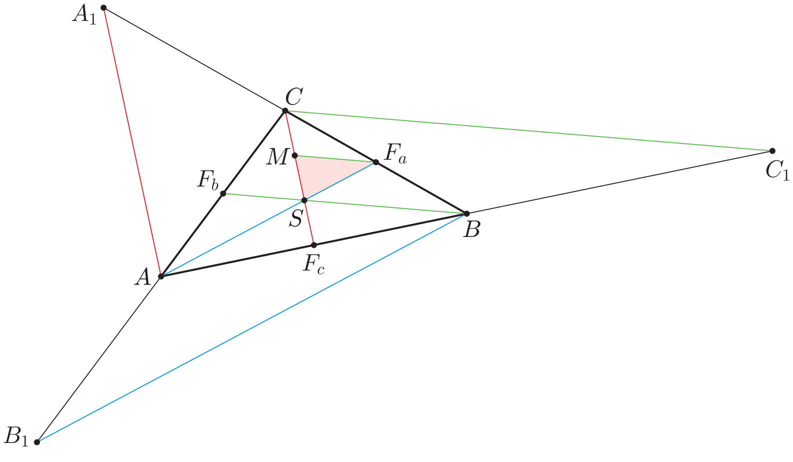
Mivel $a+c>y$, ezért $y<a+c<z+x$, és így $y<z+x$.

Hasonlóan belátható, hogy $x<y+z$ és $z<x+y$, vagyis az x, y és z szakaszokra érvényes a háromszög-egyenlőtlenség, tehát a három szakasszal szerkeszthető háromszög.

Borsos Balázs(Brüsszel, European School of Brussels I, 11. évf.)

Megjegyzés. Ennél a módszernél a legtöbb megoldás hibás volt, az esetek zömében a megoldók rosszul kezelték az egyenlőtlenségrendszereket, és olyan következtetésekre jutottak, melyek nem feltétlenül igazak (pl.: egyenlőtlenségnél a nagyobb oldalt csökkentették); vagy olyan részmegoldást adtak, amely csak hegyesszögű háromszögre érvényes.

III. megoldás. Használjuk a *3. ábra* jelöléseit, ahol F_a, F_b, F_c a megfelelő oldalak felezőpontját, S pedig a súlypontot jelöli.



3. ábra

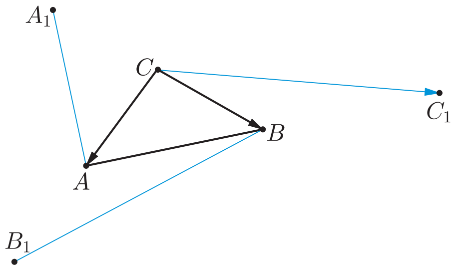
Rajzoljuk meg az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalát. Ez a B_1BC háromszög középvonala lesz, mert a tükrözés miatt A felezőpont, F_a pedig szintén felezőpont. Tehát BB_1 kétszer olyan hosszú, mint AF_a, és a két szakasz párhuzamos.

Hasonlóan belátható, hogy AA_1 kétszer olyan hosszú, mint CF_c, és párhuzamos vele; illetve CC_1 kétszer akkora, mint BF_b, és párhuzamos vele.

Legyen a CS szakasz felezőpontja M. Tekintsük most az MSF_a háromszöget. Ebben az MS szakasz harmada a CF_c szakasznak (hiszen a súlyvonalak harmadolják egymást, M pedig CS felezőpontja). F_aS harmada AF_a-nak (ugyanezen ok miatt). Az F_aM szakasz középvonala a BSC háromszögnek, mert F_a és M is felezőpont. Mivel az SB szakasz $\frac{2}{3}$-szorosa az F_bB szakasznak, ezért F_aM harmada lesz F_bB-nek.

Mivel az MSF_a háromszög oldalai harmadai a súlyvonalaknak, ezért ha ezt a háromszöget a háromszorosára nagyítjuk, akkor a kapott háromszög oldalainak hossza éppen a három súlyvonal lesz. Korábban megmutattuk, hogy a súlyvonalak fele olyan hosszúak, mint a hozzájuk tartozó XX_1 szakaszok, vagyis ha a súlyvonalakból szerkesztett háromszöget még a kétszeresére nagyítjuk, akkor olyan háromszöget kapunk, amelyben az oldalak hossza éppen az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok hosszával egyezik meg. Ezzel megmutattuk, hogy ilyen háromszög szerkeszthető.

Juhász-Molnár Erik (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)



4. ábra

IV. megoldás. A felezőpontra ismert formula szerint

$$\overrightarrow{CB}=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC_1}}{2},$$

amiből $\overrightarrow{CC_1}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$. Hasonlóan láthatjuk, hogy $\overrightarrow{BB_1}=2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{AA_1}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Ezeket összeadva

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=(2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})+(2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})+(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=$$
$$=3(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC})=\mathbf{0}.$$

Továbbá vegyük észre, hogy

$$\overrightarrow{AA_1}+4\overrightarrow{BB_1}-2\overrightarrow{CC_1}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CA}=9\overrightarrow{BA}.$$

Hasonlóan,

$$\overrightarrow{BB_1}+4\overrightarrow{CC_1}-2\overrightarrow{AA_1}=9\overrightarrow{CB}\quad \text{és}\quad \overrightarrow{CC_1}+4\overrightarrow{AA_1}-2\overrightarrow{BB_1}=9\overrightarrow{AC}.$$

Így az $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ és $\overrightarrow{CC_1}$ vektorok nem lehetnek egymással párhuzamosak, mert akkor ABC oldalvektorai is párhuzamosak lennének.

Így $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ és $\overrightarrow{CC_1}$ egy nem elfajuló háromszög oldalvektorai, amiből az állítás azonnal következik.

Megjegyzés. Negatív osztási arányt is értelmezve az osztópontba mutató vektorra vonatkozó ismert formula általánosítható arra az esetre, ha az osztópont nem belső pontja a pontok által meghatározott szakasznak, de illeszkedik az egyenesükre. Tulajdonképpen ezt használtuk a megoldásban.

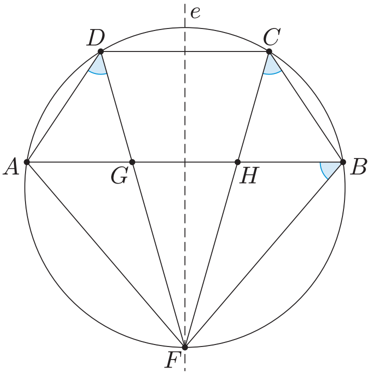
191 dolgozat érkezett. 3 pontos 94, 2 pontos 15, 1 pontos 5, 0 pontos 62 dolgozat. Nem versenyszerű: 6 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 3 dolgozat.

Megjegyzés. A viszonylag sok 0 pontos megoldás annak köszönhető, hogy sokan nem olvasták el rendesen a szöveget, és pl. A tükörképét A_1-gyel jelölték. Így azonban egy lényegesen egyszerűbb feladatot oldottak meg.

B. 5260. *A k kör AB húrjának G és H pontjaira $AG=GH=HB=1$. A kör egyik AB ívének felezőpontja legyen F. Az FH és FG szelők a kört másodszor a C, illetve D pontban metszik. Mutassuk meg, hogy $CD=BC^2$.*

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

I. megoldás. Legyen AB felezőmerőlegese az e egyenes.



Az e-re vonatkozó tengelyes tükrözés után A képe B, G képe H, F a tengely pontja, továbbá a k kör képe is önmaga. Látjuk, hogy $FG = FH$, az FGH háromszög egyenlő szárú. A szimmetria alapján D pont képe a C lesz, hiszen FG képe FH és k a helyén marad. Az eddigiek alapján GH és CD is merőleges e-re, tehát párhuzamosak. $FHG\sphericalangle = FGH\sphericalangle = FDC\sphericalangle = FCD\sphericalangle$. Az FGH és FDC egyenlőszárú háromszögek hasonlók:

$$\frac{CD}{GH} = \frac{FC}{FH}. \tag{1}$$

A szimmetria és a kerületi szögek tétele alapján $BCF\sphericalangle = ADF\sphericalangle = ABF\sphericalangle$. Emiatt $FCB\triangle \sim FHB\triangle$ (van két egyforma és egy közös szögük), így az egymásnak megfelelő oldalak aránya megegyezik.

$$\frac{FC}{FB} = \frac{FB}{FH} = \frac{BC}{HB}.$$

Az ebben szereplő arányokból kifejezhető FC és FH, amelyekkel felírható e két oldal aránya:

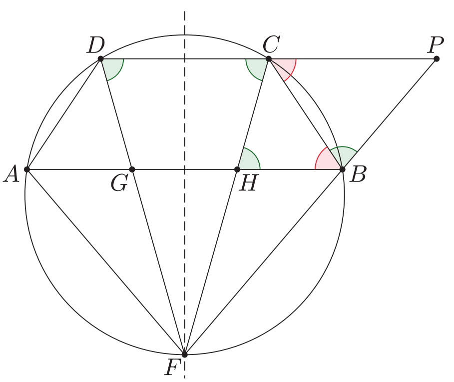
$$\frac{FC}{FH} = \frac{\frac{FB\cdot BC}{HB}}{\frac{FB\cdot HB}{BC}} = \frac{BC^2}{HB^2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) alapján, felhasználva, hogy GH és HB egységnyi hosszúságúak kapjuk, hogy

$$\frac{FC}{FH} = CD = BC^2.$$

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Az első megoldásban leírtak szerint, a tengelyes tükrözés alapján $GH \parallel CD$ és $FDC\sphericalangle = FCD\sphericalangle$. Kapjuk azt is, hogy $CHB\sphericalangle = FCD\sphericalangle$, mivel váltószögek. E kettőből $FDC\sphericalangle = CHB\sphericalangle$.



Legyen FB és DC félegyenesek metszéspontja a P pont. A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján

$$\frac{GH}{DC} = \frac{FH}{FC} = \frac{HB}{CP}.$$

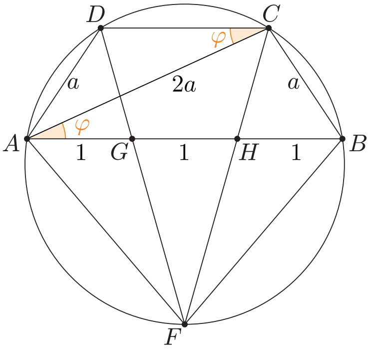
A GH és HB szakaszok egyenlősége miatt $DC = CP$.

Most belátjuk, hogy $PCB\triangle \sim CBH\triangle$. $PCB\sphericalangle = CBH\sphericalangle$, mert váltószögek. Az $FBCD$ húrnégyszög szemközti szögeinek összege $180°$, a $PBC\sphericalangle$ az $FBC\sphericalangle$ mellékszöge, tehát $PBC\sphericalangle = FDC\sphericalangle$. Korábban láttuk, hogy $FDC\sphericalangle = CHB\sphericalangle$, így $= PBC\sphericalangle = CHB\sphericalangle$. PCB és CBH háromszögek két-két szöge megegyezik, a két háromszög valóban hasonló. A megfelelő oldalak arányából

$$\frac{BC}{HB} = \frac{CP}{BC}.$$

Rendezés után $HB = 1$ és $CP = CD$ ismeretében a bizonyítandó állítást kapjuk: $CD = BC^2$.

Zömbik Barnabás (Budapest, V. ker. Eötvös József Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján



III. megoldás. Az F pont felezi az AB ívet, így az ACB háromszögben CF belső szögfelező. A szögfelezőtételből $AC : CB = AH : HB = 2$, tehát ha $BC = a$, akkor $AC = 2a$.

Az *ábra* szimmetrikus az F-en átmenő átmérőre, az $ABCD$ húrnégyszög szimmetrikus trapéz. Legyen $CD = b$ hosszúságú. Az $ACD\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ szögek váltószögek, jelöljük ezek nagyságát φ-vel.

Most írjuk fel a koszínusztételt az ACD és CAB háromszögekben a φ-vel szemközti a hosszúságú oldalakra:

$$a^2 = 4a^2 + b^2 - 2 \cdot 2a \cdot b \cdot \cos\varphi,$$

$$a^2 = 4a^2 + 9 - 2 \cdot 2a \cdot 3 \cdot \cos\varphi.$$

A $\cos\varphi$-t mindkét egyenletből kifejezve és egyenlővé téve:

$$\frac{3a^2 + b^2}{4ab} = \frac{3a^2 + 9}{12a}.$$

Rendezéssel és szorzattá alakítással:

$$\frac{3a^2 + b^2}{b} = \frac{3a^2 + 9}{3} = a^2 + 3,$$

$$3a^2 + b^2 = a^2 b + 3b,$$

$$a^2 b - 3a^2 - b^2 + 3b = 0,$$

$$(a^2 - b)(b - 3) = 0.$$

A szorzat valamelyik tényezője nulla.

Ha $a^2 = b$, akkor éppen a feladatban szereplő állítást kapjuk.

Ha $b=3$, akkor a húrtrapéz téglalap, átlói a kör középpontjában felezik egymást, tehát AC átmérő, a kör sugara a. Az ABC háromszög félszabályos, $AB=a\sqrt{3}$, azaz $a=\sqrt{3}$. Ekkor is teljesül, hogy $b=3=\sqrt{3}^{\,2}=a^2$.

Mindkét esetben igaz a feladat állítása.

Melján Dávid Gergő (Kecskeméti Katona József Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

IV. megoldás. Az F pont felezi az ívet, H, G harmadolópontok, így az ábra szimmetrikus, $AD=BC$.

Számoljuk ki az $(AHGB)$ kettősviszony értékét:

$$(AHGB)=\frac{AG}{GH}:\frac{AB}{BH}=\frac{1}{1}:\frac{3}{-1}=-\frac{1}{3}.$$

Vetítsük az A, H, G, B pontokat az F pontból a körre. Ekkor A és B pontok a helyükön maradnak, a H pont a C-be, a G pont a D-be kerül. A vetítés kettősviszonytartó, ezért

$$(AHGB)=(ACDB)=\frac{AD}{DC}:\frac{AB}{BC}=-\frac{1}{3}.$$

Az AD és BC ellentétes irányításúak, továbbá $AB=3$. Ezeket felhasználva:

$$-\frac{BC}{CD}\cdot\frac{BC}{3}=-\frac{1}{3},$$

$$\frac{BC^2}{3\cdot CD}=\frac{1}{3},$$

$$BC^2=CD.$$

Chrobák Gergő (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. A honlapon két további megoldás olvasható. Az egyik Ptolemeiosz tételét, a másik háromszögek hasonlóságát használja fel.

Összesen 61 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 44, 5 pontot 11 versenyző. 4 pontos 4, 3 pontos 2 versenyző dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (764–768.)

K. 764. Hetedhétországban egy hét hetedannyi napig tart, mint a Földön. Náluk egy nap 42 órás, minden óra 77 perces. Hány másodperc telik el két hét alatt Hetedhétországban, ha ott minden perc 33 másodpercig tart?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

K. 765. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja D, a CD szakasz felezőpontja E. Hol kell felvenni a CD szakaszon az F pontot, hogy az AEC és BFC háromszögek területének összege az ABC háromszög területének pontosan 40%-a legyen?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

K. 766. Anna, Lili és Zéta bankszámláján egyaránt 1000 forintnál nagyobb összeg van. Lili pénze egyenlő Anna pénzének 35 százalékával. Zéta pénze ugyanannyi, mint Lili pénzének $\frac{12}{7}$ része. Mennyi Anna, Lili és Zéta összes pénze, ha Zétának 10 110 forinttal több pénze van, mint Lilinek?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

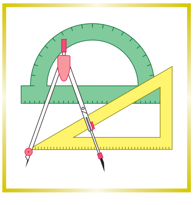
K/C. 767. Adott a síkban az $ABCD$ négyzet. A k körvonal áthalad az A, B pontokon és érinti a CD oldalt. Legyen M a k körvonal és a BC oldal B-vel nem azonos metszéspontja. Határozzuk meg a $\frac{CM}{BM}$ arány pontos értékét.

Javasolta: *Keszegh István* (1950–2019)

K/C. 768. A 2023 számjegyei között pontosan egyszer szerepel a 0. Hány olyan négyjegyű, pozitív, páratlan szám van, amelyre ez a tulajdonság nem teljesül?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

Beküldési határidő: 2023. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (767–768., 1763–1767.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 767. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 768. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1763. Igazoljuk, hogy a $4^{52} + 52^{2023} + 2023^{52}$ szám osztható 15-tel.

C. 1764. Oldjuk meg az

$$x(2x+6)(3x+5y) = 64;$$

$$2x^2 + 9x + 5y = 16$$

egyenletrendszert, ha x, y pozitív valós számok.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1765. A szabályos négyoldalú $ABCDE$ gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, a gúla minden éle 32 egység hosszúságú. Egy csiga az E csúcsból az A pontba igyekszik a következő módon: először az EA élen abba a P pontba jut el, amelyre $EP=2$. Innen az ABE lap felületén haladva az EB él Q pontjába érkezik, ahol $EQ=4$. Ezután a BCE lap felületén az EC él azon R pontjába mászik, amelyre $ER=8$, innen pedig a CDE lapon az ED élen levő S pontba, ahol $ES=16$. Végül az S-ből az A pontba mászik a DAE lap felületén. Legalább mekkora távolságot tesz meg összesen a csiga?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1766. Mutassuk meg, hogy minden háromszögben (a szokásos jelöléseket használva) teljesül, hogy

$$\sqrt{a\sin\alpha}+\sqrt{b\sin\beta}+\sqrt{c\sin\gamma}=\sqrt{(a+b+c)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}.$$

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

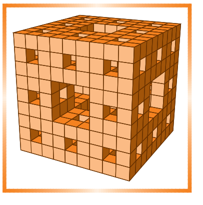
C. 1767. Adott 2 darab 7-es, 3 darab 17-es, 5 darab 119-es, 7 darab 289-es, 11 darab 2023-as és n darab 1-es érme. Az érmék közül véletlenszerűen kiválasztunk egyszerre kettőt, amelyeknek az értékét összeszorozzuk és így éppen 2023-at kapunk. Határozzuk meg n értékét, ha tudjuk, hogy a megfelelő kiválasztás valószínűsége $\frac{12}{55}$.

Javasolta: *Teleki Olivér* (Tököl)

Beküldési határidő: 2023. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5310–5317.)



B. 5310. Egy stratégiai játékot négy csapat játszik egy $n\times n$-es négyzetrácsra rajzolt térképen ($n\geqslant 3$). Minden négyzet alakú mező *víz* vagy *szárazföld*. A négy csapat bázisa a térkép négy sarkában, szárazföldön van. Tudjuk, hogy a térképen egyetlen nagy, összefüggő vízfelület van, és hogy semelyik két bázis között nem vezet út végig szárazföldön haladva. Legalább hány mezőt foglal el víz? (Egy út során akkor léphetünk egyik mezőről a másikra, ha közös élen találkoznak. A vízfelület olyan értelemben összefüggő, hogy bármely mezőjéről bármelyikre vezet ilyen út csak vizes mezőkön keresztül.)

(*4 pont*) Javasolta: *Williams Kada* (Cambridge)

B. 5311. Igaz-e, hogy ha egy háromszög mindhárom szögének szinusza racionális, akkor mindhárom szög koszinusza is racionális?

(*3 pont*) Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5312. Jelölje F_k a k-adik Fibonacci-számot ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$). Bizonyítsuk be, hogy

$$2\sum_{k=1}^{n} F_k^2 F_{k+1} = F_n F_{n+1} F_{n+2}$$

teljesül minden pozitív egész n számra.

(*3 pont*) Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5313. Az ABC hegyesszögű háromszögben $AC < AB < BC$. A körülírt kör középpontja O, a magasságpont M. Az AB oldal felezőmerőlegese az AM egyenest a P pontban, az OMP kör a BM egyenest másodszor az M-től különböző Q pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a BC egyenes érinti az ABQ kört.

(*4 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

B. 5314. Legyen S egy n-elemű halmaz, $1 \leqslant k \leqslant n$ pedig páratlan egész szám. Legfeljebb hány részhalmaza választható ki S-nek úgy, hogy semelyik kettő szimmetrikus differenciája ne legyen pontosan k-elemű?

(*5 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5315. Tekintsünk egy ABC háromszöget. Az AB oldal meghosszabbításán, B-n túl vegyük fel a B' pontot, továbbá az AC oldal meghosszabbításán, C-n túl vegyük fel a C' pontot úgy, hogy $BB' = CC'$ teljesüljön. Jelölje k, illetve k' az ABC' háromszög, illetve az $AB'C$ háromszög körülírt körét. Bizonyítandó, hogy k és k' közös húrja az A-ból induló szögfelezőre esik.

(*5 pont*) Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5316. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < a, b < 1$, akkor

$$(a + b - ab)\big(a^b + b^a\big) > a + b.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Bencze Mihály* (Brassó)

B. 5317. A zárt pozitív ortánsban fekvő, $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ fókuszú ellipszis a koordináta-tengelyeket a p abszcisszájú, illetve a q ordinátájú pontokban érinti. Mutassuk meg, hogy a $(p; q)$ pont kollineáris az origóval és az ellipszis centrumával, és számítsuk ki az ellipszis numerikus excentricitását.

(*6 pont*) Javasolta: *László Lajos* (Budapest)

Beküldési határidő: 2023. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (851–853.)

A. 851. Legyenek k, l és m pozitív egész számok. Legyen $ABCDEF$ egy olyan középpontosan szimmetrikus hatszög, melynek szögei mind 120°-osak, oldalainak hosszai pedig $AB=k$, $BC=l$ és $CD=m$. Jelölje $f(k,l,m)$ azt, hogy hányféle módon lehet az $ABCDEF$ hatszöget átfedés nélkül lefedni olyan egységoldalú rombuszokkal, melyek egyik szöge 120°.

Bizonyítsuk be, hogy rögzített l és m mellett létezik olyan $g_{l,m}$ polinom, melyre minden pozitív egész k esetén $f(k,l,m)=g_{l,m}(k)$, és állapítsuk meg $g_{l,m}$ fokát l és m függvényében.

Javasolta: *Gyenes Zoltán* (Budapest)

A. 852. Legyenek (a_i,b_i) páronként különböző számpárok, ahol $1\leqslant i\leqslant n$-re a_i és b_i pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)>\frac{2}{9}n^3,$$

és mutassuk meg, hogy az állítás éles, azaz bármilyen $c>\frac{2}{9}$ esetén lehetséges, hogy

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)<cn^3.$$

Javasolta: OKTV feladat alapján *Pach Péter Pál* (Budapest)

A. 853. Az általános helyzetű A, B, C, A', B', C' pontokról tudjuk, hogy az AA', BB', CC' egyenesek mind érintik ugyanazt az egyenlő szárú hiperbolát rendre az A, B és C pontokban, továbbá hogy az $A'B'C'$ háromszög körülírt köre megegyezik az ABC háromszög Feuerbach-körével. Jelölje $s(A')$ az A' pontnak az ABC háromszög talpponti háromszögéhez tartozó Simson-egyenesét, A^* pedig legyen az A-ból az $s(A')$-re állított merőlegesnek és a $B'C'$ egyenesnek a metszéspontja. Hasonlóan definiáljuk a B^* és C^* pontokat. Mutassuk meg, hogy az A^*, B^* és C^* pontok egy egyenesen vannak.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 589. Egy számjegyekből álló sorozat néhány statisztikai mutatóját határozzuk meg.

Készítsünk programot `i589` néven, amellyel előállítunk egy számjegy-sorozatot a következő leírás szerint, majd ennek átlagát, móduszát és mediánját kiszámítjuk. A program megírásakor a felhasználó által megadott adatok helyességét, érvényességét nem kell ellenőrizni, és feltételezhetjük, hogy a rendelkezésre álló adatok a leírtaknak megfelelnek.

1. A program olvasson be egy időpontot óra, perc ($0 \leqslant \text{ora} \leqslant 23$ és $0 \leqslant \text{perc} \leqslant 59$) formátumban és egy időtartamot ($1 \leqslant \text{delta} \leqslant 1440$) percben, majd az időponttól kiindulva állítsa elő az időtartam minden percét időrendben a mintának megfelelő formátumban.

Az időpontok meghatározásánál vegyük figyelembe, hogy az órák és percek vezető 0 számjegyeit elhagyjuk, nem tároljuk, ha azok nem szükségesek. A percenkénti időpont növelésnél figyelembe vesszük az óra és a nap váltást is.

2. Minden időpont óra és perc értékét tároljuk számjegyekké alakítva egy sorozatban.
3. Írjuk ki a sorozatot úgy, hogy az adatok között ne legyen semmilyen elválasztójel.
4. Határozzuk meg és írjuk ki az így kapott sorozat számjegyeinek átlagát két tizedesjegy pontosan.
5. Számítsuk ki és írjuk ki a sorozat mediánját két tizedesjegy pontosan.
6. Írjuk ki a sorozat móduszát vagy móduszait.

Minta a szöveges kimenet kialakításához:

```
óra= 23
perc= 55
időtartam= 9
23552356235723582359000102 03
Átlag= 3.25
Medián= 3.00
Módusz= 2, 3
```

Beküldendő egy tömörített `i589.zip` állományban a program forráskódja és dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 590 (É). Egy vállalkozás vezetője online időpont-egyeztetést kért a munkatársaktól egy munkanapra, hogy megbeszélést tudjon tartani. A munkatársak elfoglaltsága rendkívül változó. Előfordul, hogy a munkaidőn belül is mozdíthatatlan elfoglaltságuk van, máskor jobban ráérnek, munkájuk átszervezhető. A vállalkozásban, a pihenőidőkkel együtt, 9 óra a munkaidő.

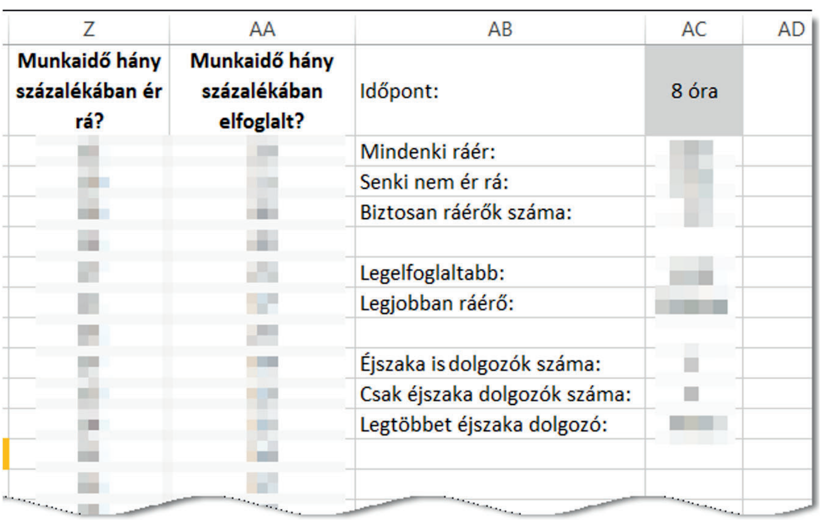
A munkatársak elfoglaltságának óránkénti adatai állnak rendelkezésre az `egyeztetes.txt` állományban. Az elfoglaltságuk jelölése:

T	távol van, nem munkaidő
J	jó, munkaidő, amely alkalmas megbeszélésre
F	foglalt, amely munkaidő, de nem áthelyezhető elfoglaltság

Táblázatkezelő program segítségével oldjuk meg a következő feladatokat.

A megoldás során segédszámításokat az AC *oszloptól jobbra végezhetünk. A megoldáshoz képletet, függvényt, hivatkozást használjunk, de ne készítsünk makrót vagy saját programot.*

1. Töltsük be a tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású `egyeztetes.txt` szövegfájlt a táblázatkezelőbe az A1-es cellától kezdődően. Munkánkat `i590` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Egészítsük ki a táblázatot az 1. sor és az AB oszlop celláiban a szükséges feliratokkal.



Z	AA	AB	AC	AD
Munkaidő hány százalékában ér rá?	**Munkaidő hány százalékában elfoglalt?**	Időpont:	8 óra	
		Mindenki ráér:		
		Senki nem ér rá:		
		Biztosan ráérők száma:		
		Legelfoglaltabb:		
		Legjobban ráérő:		
		Éjszaka is dolgozók száma:		
		Csak éjszaka dolgozók száma:		
		Legtöbbet éjszaka dolgozó:		

3. A Z oszlop celláiban adjuk meg, hogy a munkavállalók a munkaidő hány százalékában érnek rá egy megbeszélésre. A dolgozó akkor ér rá, ha a jelölése „J” egy adott órában.
4. Az AA oszlop celláiban írassuk ki, hogy a munkavállalók a munkaidő hány százalékában elfoglaltak. A dolgozó akkor elfoglalt, ha a jelölése „F” egy adott órában.

5. A szemléletes tervezéshez színes megjelenítést, feltételes formázást alkalmazzunk. Ha a cella tartalma „T”, akkor fehér, ha „J”, akkor zöld és ha „F”, akkor okkersárga háttérszínnel jelenjen meg.
6. A vállalkozás vezetőjének munkáját azzal segítjük, hogy az AC1-es cellába írt időpontra (egészkor kezdődő óra) néhány munkaidő-elemző feladatot elvégzünk az alatta levő cellákban:
   a. az adott órában minden munkavállaló biztosan ráér-e (igen/nem);
   b. az adott órában garantáltan senki nem ér rá a megbeszélésre (igen/nem);
   c. hányan érnek rá biztosan az adott órában?
7. A vezető a munkavégzés szélsőségeire is kíváncsi:
   a. ki a legjobban elfoglalt ezen a napon;
   b. ki ér rá leginkább? Ha többen is vannak, akkor elég az egyikük nevét megadni.
8. Különösen megbecsültek az éjszakai munkát vállalók. Éjszakai dolgozónak számítanak a reggel 6 előtt és este 8 után dolgozók. Határozzuk meg:
   a. az éjszaka dolgozók számát;
   b. a csak éjszaka dolgozó munkatársak számát;
   c. valamint a legtöbb időt éjszaka dolgozó kolléga nevét.
9. A táblázatot formázzuk meg a *mintának* megfelelően.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
1	**Névsor**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**Munkaidő hány százalékában ér rá?**	**Munkaidő hány százalékában elfoglalt?**	Időpont:	8 óra	
2	Marci	T	T	T	T	T	T	T	T	T	J	F	F	J	J	J	F	F	F	T	T	T	T	T	T			Mindenki ráér:		
3	Julianna	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	J	J	J	F	F	F	J	J	J	T	T	T			Senki nem ér rá:		
4	Ricsi	T	T	T	T	T	T	T	T	T	J	F	F	J	J	J	J	J	J	T	T	T	T	T	T			Biztosan ráérők száma:		
5	Antal	T	T	T	T	T	T	T	T	T	J	J	J	F	F	F	J	J	F	T	T	T	T	T	T					
6	Patrik	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	J	J	F	F	F	J	J	J	J	T	T	T			Legelfoglaltabb:		
7	Rebeka	T	T	T	T	T	T	T	T	T	J	J	J	J	J	F	F	F	J	T	T	T	T	T	T			Legjobban ráérő:		
8	Csenge	T	T	T	T	T	T	J	J	J	J	F	F	F	J	J	T	T	T	T	T	T	T	T	T					
9	Vince	T	T	T	T	T	T	J	J	J	J	J	J	J	J	J	T	T	T	T	T	T	T	T	T			Éjszaka is dolgozók száma:		
10	Attila	T	T	T	T	T	T	T	T	J	F	F	F	F	J	J	F	F	T	T	T	T	T	T	T			Csak éjszaka dolgozók száma:		
11	Panni	T	T	T	T	T	T	T	J	J	J	J	J	J	J	J	J	T	T	T	T	T	T	T	T			Legtöbbet éjszaka dolgozó:		
12	Evelin	F	F	J	J	T	T	T	T	T	T	T	T	T	J	J	T	T	T	T	T	T	T	F	F					
13	Kata	T	T	T	T	T	T	J	J	J	J	T	T	T	J	J	T	T	T	T	T	T	T	T	T					

Beküldendő egy tömörített `i590.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, illetve egy rövid dokumentáció, amelyben szerepel a megoldáskor alkalmazott táblázatkezelő neve, verziószáma.

A megoldáshoz szükséges letölthető állomány: `egyeztetes.txt`

I. 591. A mesterséges intelligencia egyre inkább szerepet játszik életünkben, sok helyen helyettesíti vagy kiegészíti az emberi gondolkodást. Az OpenAI által készített ChatGPT ennek egyik szép példája. Az alkalmazás segítségével összetett kérdésekre kaphatunk több szempontot figyelembe vevő válaszokat. Használata megváltoztatja egy-egy probléma feldolgozásának módját az oktatásban, és hatással lesz a tudást, képességeket mérő online versenyekre is. Tegyünk egy próbát az alkalmazással:

Oldjuk meg a most kitűzött **I. 589.** feladatot úgy, hogy a megoldást adó algoritmust és programot nem mi készítjük el, hanem azt az alkalmazásra bízzuk. A megoldás készüljön az ADA programozási nyelven, online programozási környezetben. A megoldás minden lépését folyamatosan dokumentáljuk úgy, hogy az alapján bárki, aki nem tud programozni és nem ismeri az ADA nyelvet, meg tudja adni a megoldást. A ChatGPT segítségével történő megoldás teljes folyamatának bemutatása készülhet képernyővideó segítségével, amelynek megértését kiemelésekkel, aláírásokkal vagy hangalámondással tegyük érthetővé, vagy készülhet szöveges dokumentációval, amelyben lépések formájában szerepelnek a megoldás egy lehetséges módját mutató utasítások és képernyőképek.

Beküldendő egy tömörített `i591.zip` állományban a megoldást adó ADA forrásprogramra mutató hivatkozás egy online programozási környezetben, valamint a képernyővideó vagy szöveges dokumentáció online elérhetősége.

I/S. 71. Egy étterem N asztallal rendelkezik, az i-edik asztal $A[i]$ férőhelyes. Egy nap az étterembe M csoport érkezik, a k-adik csoport $B[k]$ főből áll. Az étterem egy furcsa ültetési szokással rendelkezik: nem ülhet egy asztalnál két olyan ember, akik egy csoportból érkeztek. Adjuk meg, hogy legfeljebb hány csoport ültethető le teljesen az M csoport közül, ha egy asztalnál nem ülhet két azonos csoportból érkezett ember.

A bemenet első sorában az N és M számok találhatóak szóközzel elválasztva, az asztalok és a csoportok száma. A második sorban N darab szám található szóközökkel elválasztva: a férőhelyek száma az egyes asztaloknál. A harmadik sorban M darab szám található szóközökkel elválasztva: az egyes csoportok létszáma.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen: a maximálisan leültethető csoportok száma.

Minták:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`3 3 / 3 1 1 / 2 3 2`	`2`
`2 4 / 1 3 / 2 2 2 1`	`2`

Magyarázat (1. példa): az első csoport embereit ültessük le az 1. és 2. asztalhoz; a 3. csoport embereit az 1. és 3. asztalhoz.

Korlátok: $1 \leqslant N, M, A[i], B[i] \leqslant 100$. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható arra a programra, amely helyes megoldást ad $N = 2$ esetén.

Beküldendő egy `is71.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

S. 170. Bergengóciában télen minden éjszaka leesik valamennyi hó, nappal viszont az összes meglévő hó fele elolvad. Ki szeretnénk számolni minden nap, hogy egy Bergengóciát átszelő egyenes út egy szakaszán mennyi hó található. Tudjuk, hogy kezdetben nincs hó az úton és ismerjük, hogy minden éjszaka mennyi hó esett. Bergengócia hófelhői éjszaka nem mozognak, így minden felhő egyenletesen terít be hóval egy útszakaszt. Tudjuk még, hogy minden éjszaka csak egy felhőből esett hó. Számítsuk ki, mennyi hó maradt egy-egy nap estéjére a kérdezett szakaszon, miután a reggel még meglévő hó fele elolvadt, de még nem esett új hó.

A bemenet első sorában a napok száma, N szerepel. A következő N sorban az egyes napok havazásainak adatai és a vizsgált intervallum adatai szerepelnek. Az úton a k kezdő és v végpont, melyek között hó esett, illetve a leesett hó h mennyisége (ennyivel nő a hótakaró vastagsága az intervallumon). A következő két szám $q1$ és $q2$ a kérdezett útszakasz határa, amelyen kíváncsiak vagyunk a hótakaró térfogatára.

A kimenet N sort tartalmazzon: az i-edik sorba az i-edik nap estéjén az úton maradt hó térfogatát kell írni, ha az út szélessége egységnyi. Figyelem! Habár a bemenetben egész számok szerepelnek, az eredmény lehet tört érték, így azt legalább két tizedesjegy pontossággal kell kiírni.

Minta (a `/` jel sortörést helyettesít):

Bemenet	**Kimenet**
`3 / 1 4 2 1 5 / 2 4 1 1 3 / 5 7 1 1 9`	`3.00 / 1.50 / 2.25`

Magyarázat (a napok éjjel kezdődnek): első éjjel leesik $3 \cdot 2 = 6$ egység hó, aminek a fele elolvad, így estére 3 egység hó lesz. A második éjszaka esik $2 \cdot 1 = 2$ egység hó, így a második nap reggelére 5 egység hó marad, mely estére a felére olvad. A kérdezett intervallumba ebből csak 1,5 esik. A harmadik éjjelen $2 \cdot 1 = 2$ egység hó esik, és marad még a korábbi hó fele, azaz 2,5 egység. A harmadik nap estéjére mindennek a fele marad, azaz 2,25 egység.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10\,000$, $0 \leqslant k, v, h, q1, q2 \leqslant 108$. Időkorlát: 1 mp.

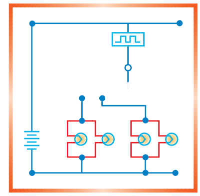
Értékelés: a pontok 40%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad az $N \leqslant 100$ esetekben.

Beküldendő egy `s170.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2023. május 15.

❄



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 799. *Legalább mekkora sebességgel és legfeljebb mekkora szög alatt kell indítani egy testet, hogy átrepüljön egy* 100 *méter hosszú,* 5 *méter magas, egyenes alagúton?*

A légellenállás elhanyagolható.

(*3 pont*) Közli: *Ringler András*, Szeged

Megoldás. Ha a talajszintről v_0 kezdősebességgel α szögben elhajítunk egy testet, akkor az emelkedési magassága

$$h=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha, \tag{1}$$

és a vízszintes talajra

$$L=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \tag{2}$$

távolságban esik vissza. (1) négyszeresét (2)-vel elosztva kapjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4h}{L}.$$

A test akkor jut át az alagúton, ha $h\leqslant 5$ m és $L\geqslant 100$ m, vagyis

$$\operatorname{tg}\alpha\leqslant\frac{4h_{\max}}{L_{\min}}=\frac{4\cdot 5}{100}=\frac{1}{5},$$

azaz $\alpha\leqslant\alpha_{\max}=11{,}3^\circ$. A test eldobásának szöge tehát legfeljebb $11{,}3^\circ$ lehet.

A test kezdősebessége legalább akkora kell legyen, hogy $\alpha_{\max}$ indítási szög esetén éppen elérje az alagút $h_{\max}=5$ m-es magasságát. (1) szerint ilyenkor

$$v_0=v_{\min}=\frac{\sqrt{2gh_{\max}}}{\sin\alpha_{\max}}=50{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Khưu Gia Bảo (Vietnám, Ho Si Minh-város, Ngo Quyen High School, 10. évf.) dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes 25 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 3, hibás 8, nem versenyszerű 7 dolgozat.

G. 802. *Körülbelül hány perccel később delel a Nap Sopronban, mint Mátészalkán?*

(*3 pont*) Közli: *Németh László*, Fonyód

Megoldás. *I. módszer.* A delelési időpontok eltérését a két város hosszúsági koordinátájának különbsége határozza meg. Sopron a keleti hosszúság $16^\circ 35'$-nél fekszik, Mátészalka pedig a $22^\circ 19'$-nél. A két érték különbsége 5 fok és 44 szögperc, vagyis $5{,}73^\circ$.

A Nap (a Földhöz viszonyítva) 24 h alatt tesz meg 360°-ot, tehát 1°-nyi elfordulás 4 perc ideig tart. A két város delelési időpontjának különbsége tehát

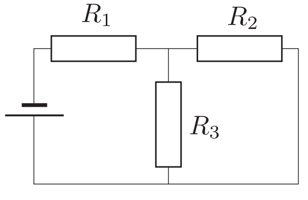
$$\Delta t = 5{,}73 \cdot 4 \text{ perc} = 22{,}9 \text{ perc}.$$

Ezek szerint a Nap kb. 23 perccel később delel Sopronban, mint Mátészalkán.

II. módszer. Az interneten megtalálhatjuk, hogy a napfelkelte időpontja 2023. február 16-án Sopronban 6:59, Mátészalkán pedig 6:36 volt; az eltérés 23 perc. Ugyancsak megtalálhatjuk, hogy a naplemeték időpontja 17:18 és 16:54, ezek különbsége 24 perc. A delelési időpontok eltérése a napfeltelték és a naplementék időponteltolódásának számtani közepével közelíthető, ez 23,5 perc.

Tajta Sára (Budapest, Városmajori Gimn., 9. évf.)

45 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 3, hibás 7, nem versenyszerű 7 dolgozat.



G. 806. *Az ábrán látható kapcsolásban ismert az R_1, R_2 és az R_3 ellenállás, valamint az R_3 ellenálláson átfolyó áram I_3 erőssége.*

Határozzuk meg

a) a másik két ellenálláson átfolyó I_1 és I_2 áramok erősségét;

b) a telep elektromotoros erejét!

c) Mennyi hő fejlődik összesen t idő alatt a rendszerben?

(Adatok: $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $I_3 = 2$ A, $t = 30$ s.)

(*3 pont*)

Megoldás. *a*) R_2 és R_3 párhuzamosan vannak kapcsolva, rajtuk ugyanakkora a feszültség:

$$R_2 I_2 = R_3 I_3, \qquad \text{tehát} \qquad I_2 = \frac{R_3}{R_2} I_3 = 4 \cdot 2 \text{ A} = 8 \text{ A}.$$

Az R_1 ellenálláson folyó áram erőssége a csomóponti törvény szerint

$$I_1 = I_2 + I_3 = 10 \text{ A}.$$

b) Az egyes ellenállások feszültsége:

$$U_1 = R_1 I_1 = 20\ \Omega \cdot 10\ \mathrm{A} = 200\ \mathrm{V},$$
$$U_2 = U_3 = R_2 I_2 = 10\ \Omega \cdot 8\ \mathrm{A} = 80\ \mathrm{V}.$$

A telep kapocsfeszültsége

$$U = U_1 + U_3 = 280\ \mathrm{V},$$

és ha a telep belső ellenállása elhanyagolhatóan kicsi (vagyis a feszültségforrás ideális), akkor ugyanekkora a telep elektromotoros ereje (üresjárati feszültsége).

c) A telepen $I = I_1$ erősségű áram folyik, a leadott teljesítmény tehát

$$P = U \cdot I = 280\ \mathrm{V} \cdot 10\ \mathrm{A} = 2800\ \mathrm{W}.$$

A rendszerben (a három ellenálláson) $t = 30$ s alatt összesen

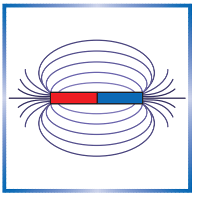
$$Q = P \cdot t = 2800\ \mathrm{W} \cdot 30\ \mathrm{s} = 84\ \mathrm{kJ}$$

hő fejlődik.

Tóth Hanga Katalin (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 9. évf.)

49 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 12, nem versenyszerű 16 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5432. *Egy függőleges helyzetben rögzített, vékony szigetelőpálcára három egyforma tömegű és egyenlő töltésű szigetelőgyöngyöt fűztünk fel. Az alsó gyöngy rögzített, a fölötte lévő másik kettő szabadon elcsúszhat a pálcán. Egyensúlyi helyzetben hányszor messzebb van a legfelső gyöngy a középsőtől, mint a középső a legalsótól?*

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Legyen a gyöngyök tömege m, töltésük Q. Az alsó ($\mathcal{A}$) és középső ($\mathcal{K}$) gyöngy távolságát jelöljük R-rel. A felső ($\mathcal{F}$) gyöngy és $\mathcal{K}$ távolsága legyen λR. A felfelé mutató vektorokat tekintsük pozitívnak.

$\mathcal{A}$ rögzített, így semmilyen erőhatásra nem tud elmozdulni. A másik két gyöngy is nyugalomban van, így a rájuk ható erők eredője *nulla.* A gyöngyök azonos töltésűek, így taszítják egymást. $\mathcal{K}$-ra hat a gravitációs erő lefelé, $\mathcal{F}$ taszítóereje is lefelé, továbbá $\mathcal{A}$ taszítóereje felfelé. Ezek előjeles összege nulla:

$$k\frac{Q^2}{R^2} - mg - k\frac{Q^2}{(\lambda R)^2} = 0.$$

$\mathcal{F}$-re hat a gravitációs erő lefelé, $\mathcal{K}$ taszítóereje felfelé és $\mathcal{A}$ taszítóereje ugyancsak felfelé. Az erőegyensúly feltétele:

$$k\frac{Q^2}{(\lambda R+R)^2}+k\frac{Q^2}{(\lambda R)^2}-mg=0.$$

Ebből a két egyenletből (mg kiküszöbölése után) kapjuk, hogy

$$k\frac{Q^2}{R^2}-k\frac{Q^2}{(\lambda R)^2}=k\frac{Q^2}{(\lambda R+R)^2}+k\frac{Q^2}{(\lambda R)^2},$$

vagyis

$$1-\frac{1}{(\lambda+1)^2}-\frac{2}{\lambda^2}=0.$$

Közös nevezőre hozva a

$$\lambda^2(\lambda+1)^2-\lambda^2-2(\lambda+1)^2=0$$

negyedfokú egyenletet kapjuk, amelynek egyetlen valós, pozitív gyöke van: $\lambda\approx 1{,}54$ (lásd pl. a `WolframAlpha` vagy a `GeoGebra` számítógépes alkalmazásokat).

Egyensúlyi helyzetben tehát kb. másfélszer messzebb van a legfelső gyöngy a középsőtől, mint a középső a legalsótól.

Dancsák Dénes (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 11. évf.)

47 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 7, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5436. *Két, egymást merőlegesen keresztező egyenes autópályán egy-egy pontszerűnek tekinthető autó a kereszteződési pont felé tart állandó nagyságú sebességgel. Az A jelű autó sebessége* $v_A=50$ km/h, *a B jelű autóé* $v_B=40$ km/h. *Egy adott időpontban a két autó a kereszteződési ponttól mért távolsága* $d_A=20$ km, *illetve* $d_B=36$ km.

a) Mekkora lesz köztük a minimális távolság?

b) Mennyi idő múlva lesznek egymáshoz legközelebb?

(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

Megoldás. Számoljunk km, h és km/h egységekben. Az adott pillanat után t idő elteltével az A jelű autó $20-50t$, a B jelű pedig $36-40t$ távolságra lesz a kereszteződéstől. A két autó közötti távolság ebben az időpontban (a Pitagorasz-tétel szerint)

$$d(t)=\sqrt{(20-50t)^2+(36-40t)^2}=\sqrt{4100\,t^2-4880\,t+1696}.$$

A legkisebb távolság a gyök alatti másodfokú kifejezés minimumánál lesz. Ha ezt a kifejezést at^2+bt+c alakban írjuk, akkor a minimum időpontja

$$t_{\min}=-\frac{b}{2a}=\frac{4880}{8200}\approx 0{,}60\text{ óra}=36\text{ perc},$$

a minimális távolság pedig

$$d_{\min} = d\,(t_{\min}) \approx 15{,}6\ \mathrm{km}.$$

A Könyv gyermekei csapat:
Farkas László, Dobák Bálint, Ferencz Hunor
(Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

91 dolgozat érkezett. Helyes 65 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 11, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5437. *Egy kettőscsillag egyik tagja háromszor nagyobb tömegű, mint a másik csillag. A két égitest (amelyek mérete sokkal kisebb, mint a távolságuk) közelítőleg kör alakú pályákon keringenek a közös tömegközéppontjuk körül. Melyik csillagnak és hányszor nagyobb a mozgási energiája a tömegközépponti koordináta-rendszerben?*

(*3 pont*) Tankönyvi feladat

Megoldás. Jelöljük a nagyobb tömegű csillag adatait 1-es, a kisebb tömegűét 2-es indexekkel. Ismert, hogy a tömegek aránya:

$$\frac{m_1}{m_2} = 3,$$

a tömegközépponttól mért távolságukra pedig

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \qquad \text{alapján} \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$$

teljesül. A csillagok keringési ideje megegyezik, így a szögsebességük (ω) is ugyanakkora.

A csillagok mozgási energiája:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2,$$

illetve

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2,$$

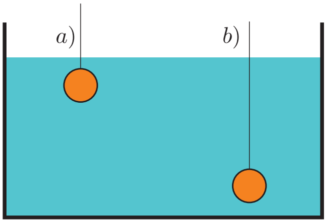
így a keresett arány

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Ezek szerint a kisebb tömegű csillagnak háromszor nagyobb a mozgási energiája (a tömegközépponti koordináta-rendszerben), mint a nagyobb tömegű társáé.

Tomesz László Gergő (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.)

59 dolgozat érkezett. Helyes 45 megoldás. Hiányos (1 pont) 8, hibás 3, nem versenyszerű 3 dolgozat.



P. 5439. *Egy gömb alakú, kezdetben 20 °C hőmérsékletű rézgolyót vékony, hőszigetelő szál segítségével nagy mennyiségű, 80 °C-os vízbe merítünk. A fémgolyó t_1 idő elteltével melegszik fel 50 °C-ra. Ezután a kísérletet megismételjük úgy, hogy a víz hőmérséklete 20 °C, a golyóé pedig 80 °C. A rézgolyó most t_2 idő alatt hűl le 50 °C-ra. Melyik idő rövidebb, t_1 vagy t_2, ha a golyót*

a) éppen csak belemerítjük a vízbe,

b) majdnem az edény aljáig engedjük le?

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. A réz jó hővezető, a víz viszont rosszul vezeti a hőt. A Fourier-féle hővezetési törvényben szereplő hővezetési együttható rézre 400 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$, míg ugyanez a tényező vízre csupán 0,6 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$. Ez a nagy különbség csak akkor mutatkozik meg, ha a víz nem mozog, hanem az egymás melletti meleg és hideg vízrétegek között történik a hőátadás. Ha a víz áramlik (mint ahogy a központi fűtés csöveiben), akkor a hőátadás lényegesen felgyorsul. Ezt a fajta hőátadást hőáramlásnak (konvekciónak) nevezik.

a) A vízfelszín közelében tartott, eredetileg 20 °C-os golyónak hőt átadó vízréteg hőmérséklete csökken, így a sűrűsége nagyobb lesz, mint a környező, meleg folyadék sűrűsége. Ennek hatására a nagyobb sűrűségű folyadék lefelé, az edény aljához áramlik, helyére pedig melegebb folyadék kerül. Ez a meleg folyadék folyamatosan melegíti a rézgolyót, annak hőmérséklete viszonylag gyorsan emelkedik.

Az eredetileg 80 °C-os golyó hőt ad át a környező vízrétegnek, így annak sűrűsége csökken. A kisebb sűrűségű, fokozatosan melegedő folyadék nem tud az edény aljára süllyedni, nem indul el a konvekció, emiatt a rézgolyó lehűlése viszonylag lassan történik.

A réz hőmérséklete mindkét esetben ugyanannyit (30 °C-ot) változik, de a változás sebességének különbözősége miatt a felmelegedés t_1 ideje rövidebb, mint a lehűlés t_2 időtartama.

b) Az edény aljának közelében tartott rézgolyónál hasonló folyamatok mennek végbe, de a helyzet megfordul. A hideg golyó által lehűtött, tehát a környezetéhez képest sűrűbbé váló víz a golyó közelében marad, nem emelkedik fel, nem indul be a konvekció. A meleg golyó által felmelegített víz viszont a kisebb sűrűsége miatt felemelkedik, konvektív áramlás indul be. Az edény aljánál tartott rézgolyónál tehát a golyó felmelegedése a lassúbb, a lehűlése pedig a gyorsabb folyamat, vagyis $t_1 > t_2$.

Nemeskéri Dániel (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

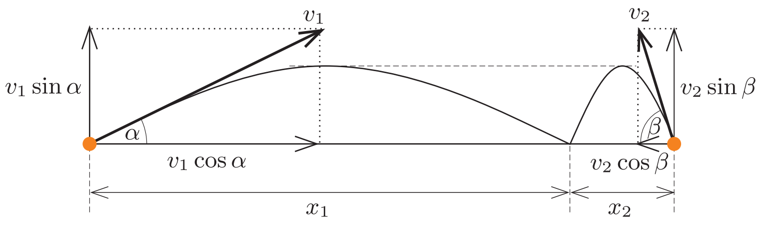
18 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 2, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5446. *Két diák egy mutatványra készül. A sportpályán egymástól bizonyos d távolságra lévő focilabdákat egyszerre megrúgják úgy, hogy a labdák a levegőben találkozzanak. Az egyik diák $v_1 = 20$ m/s, a másik $v_2 = 10$ m/s sebességgel lövi el a labdát, de a kezdősebesség irányát szabadon megválaszthatják. Legfeljebb mekkora kezdeti $d_{\max}$ távolságra lehet egymástól a két labda ahhoz, hogy a mutatvány sikerüljön?*

(A légellenállás hatását hanyagoljuk el.)

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Megoldás. Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket. Az $x_1 + x_2$ távolság úgy lesz a legnagyobb, ha a diákok egymás felé rúgják el a labdákat, és azok közvetlenül a földet érés előtt találkoznak.



A találkozási pontig mindkét labda ugyanannyi ideig mozgott, és a függőleges irányú elmozdulásuk is megegyezik:

$$v_1 \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2 = v_2 \sin\beta \cdot t - \frac{g}{2}t^2,$$

vagyis

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta. \tag{1}$$

A mozgás t idejének fele alatt a labdák függőleges irányú sebessége nullára csökken:

$$v_1 \sin\alpha - g\frac{t}{2} = 0 \qquad \text{és} \qquad v_2 \sin\beta - g\frac{t}{2} = 0,$$

vagyis

$$t = \frac{2v_1 \sin\alpha}{g} = \frac{2v_2 \sin\beta}{g}. \tag{2}$$

A labdák vízszintes irányú elmozdulásának összege, vagyis a labdák kezdeti távolsága:

$$d = x_1 + x_2 = v_1 \cos\alpha \cdot t + v_2 \cos\beta \cdot t.$$

Helyettesítsük be t helyébe x_1 képleténél (2) második alakját, x_2-nél pedig az első alakot:

$$d = \frac{2v_1v_2}{g}\cos\alpha\sin\beta + \frac{2v_2v_1}{g}\cos\beta\sin\alpha = \frac{2v_1v_2}{g}\sin(\alpha+\beta).$$

Mivel $\sin(\alpha+\beta) \leqslant 1$, a labdák kezdeti távolságának maximuma

$$d_{\max} = \frac{2v_1v_2}{g} \approx \frac{2\cdot(20\ \mathrm{m/s})\cdot(10\ \mathrm{m/s})}{10\ \mathrm{m/s}^2} = 40\ \mathrm{m}.$$

(Ha g pontosabb értékével, 9,81 $\mathrm{m/s}^2$-tel számolunk, a $d_{\max} \approx 41$ m-es eredményt kapjuk.)

Jóllehet nem volt kérdés a labdák kezdősebességének iránya, de ezeket is meghatározhatjuk. A legnagyobb d távolság esetén $\alpha+\beta = 90^\circ$, így (1) szerint

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \cos\alpha,$$

tehát

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = 26{,}6^\circ \qquad \text{és} \qquad \beta = 90^\circ - \alpha = 63{,}4^\circ.$$

Osváth Emese (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

53 dolgozat érkezett. Helyes 23 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 8, hibás 9, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5452. *Egy egyenes pályán haladó fotonrakéta tömege induláskor m_0. Adjuk meg a rakéta sebességét a nyugalmi tömeg pillanatnyi értékének a függvényében!*

(Lásd még a P. 5426. *feladatot a* KöMaL *2022. szeptemberi számában.)*

(4 pont) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

Megoldás. Legyen a v sebességgel haladó rakéta nyugalmi tömege egy tetszőleges pillanatban m_0^*, „látszólagos” tömege

$$m = \frac{m_0^*}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ha eddig a pillanatig a rakétából kiáramlott fotonok összes lendülete $\boldsymbol{p}$, akkor a rakéta lendülete $-\boldsymbol{p}$. A rakéta (relativisztikus) energiája

$$E_{\text{rakéta}} = mc^2 = \frac{m_0^* c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

lendületének nagysága ($p = |\boldsymbol{p}|$) pedig

$$p = mv = \frac{m_0^* v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

A fotonok energiája

$$E_{\text{foton}} = pc = \frac{m_0^* vc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Felírható az energiamegmaradás törvénye:

$$m_0c^2 = pc + mc^2,$$

azaz

$$m_0c^2 = \frac{m_0^* vc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_0^* c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

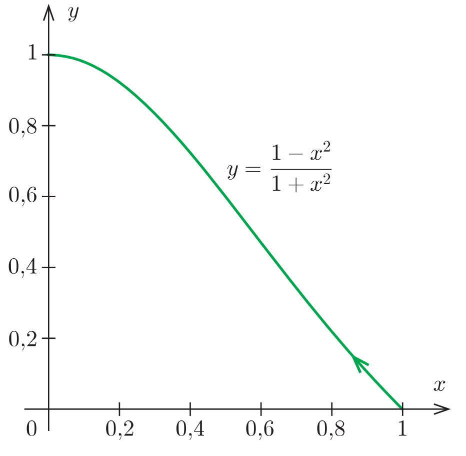
Innen

$$m_0 = \frac{c+v}{\sqrt{c^2-v^2}}\, m_0^* = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\, m_0^*$$

következik, amiből (négyzetre emelés és rendezés után) megkapjuk a keresett sebességet:

$$v(m_0^*) = \frac{m_0^2 - (m_0^*)^2}{m_0^2 + (m_0^*)^2}.$$

Ezt a kapcsolatot – bevezetve az $y = \frac{v}{c}$ és $x = \frac{m_0^*}{m_0}$ dimenziótlan változókat – grafikusan is ábrázolhatjuk.



Klement Tamás (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

19 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Bernhardt Dávid, Klement Tamás és Nemeskéri Dániel megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 12, hibás 2 dolgozat.

P. 5454. *Az autógumik javítása után a kerekeket nagy fordulatszámra pörgetik, és az esetleges „ütést" kicsiny nehezékekkel kiegyensúlyozzák (centrírozzák a kereket). Az egyik kereket álló helyzetből állandó szöggyorsulással forgásba hozzák. Egy bizonyos pillanatban a tengelytől* $R = 20$ cm *távolságban lévő szelepsapka gyorsulásának nagysága kétszer akkora, mint az induláskor, és a sebessége ekkor* $v = 1$ m/s.

a) Mennyi idő telt el az indulásától számítva?

b) Mennyi volt a szelepsapka gyorsulása induláskor?

c) Mennyi utat tett meg a szelepsapka ezalatt?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Mivel a kerék szöggyorsulása állandó, ezért a szelepsapka érintőirányú (tangenciális) gyorsulása is időben állandó. Jelöljük ezt a gyorsulást (amely megegyezik az induláskori gyorsulással) a_t-vel.

Az idő múltával a szelepsapka sebessége egyre nő, és emiatt a sugárirányú a_cp centripetális gyorsulás is növekszik. A tangenciális és a centripetális gyorsulás egymásra merőleges vektorok, így az eredőjük nagysága a Pitagorasz-tétel szerint

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{cp}^2}.$$

A kérdéses pillanatban $a = 2a_\mathrm{t}$, ekkor

$$\sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{cp}^2} = 2a_\mathrm{t},$$

vagyis

$$a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{cp}^2 = 4a_\mathrm{t}^2,$$

tehát

$$a_\mathrm{cp} = \sqrt{3}\, a_\mathrm{t}.$$

b) Másrészt a szelepsapka centripetális gyorsulása kifejezhető a sebességével és a kerék sugarával:

$$a_\mathrm{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{1\ \mathrm{m^2/s^2}}{0{,}2\ \mathrm{m}} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}},$$

így

$$a_\mathrm{t} = \frac{5}{\sqrt{3}}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \approx 2{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}.$$

a) Az indulástól számítva a kérdéses pillanatig

$$t = \frac{v}{a_\mathrm{t}} = 0{,}35\ \mathrm{s}$$

idő telt el.

c) A szelepsapka által megtett út az egyenletesen változó mozgás út-idő összefüggése szerint

$$s = \frac{a_\mathrm{t}}{2} t^2 = 0{,}17\ \mathrm{m}.$$

Lévai Dominik Márk (Tata, Eötvös J. Gimn., 12. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 14, hiányos (1–2 pont) 13, hibás 4, nem versenyszerű 5 dolgozat.

P. 5456. *A képen azt láthatjuk, hogy munkások egy kútgyűrűt raknak fel (vagy esetleg engednek le) pallókon egy teherautóról. A kútgyűrű tömege* 300 kg, *átmérője* 1 m, *a pallók hossza* 5 m, *a teherautó platójának magassága* 1 m. *Tegyük fel, hogy a munkások kezei által kifejtett erők eredője párhuzamos a pallókkal, valamint a kezük és a kútgyűrű között 0,8 a tapadási súrlódási együttható, továbbá a kútgyűrű nem csúszik meg a pallón.*

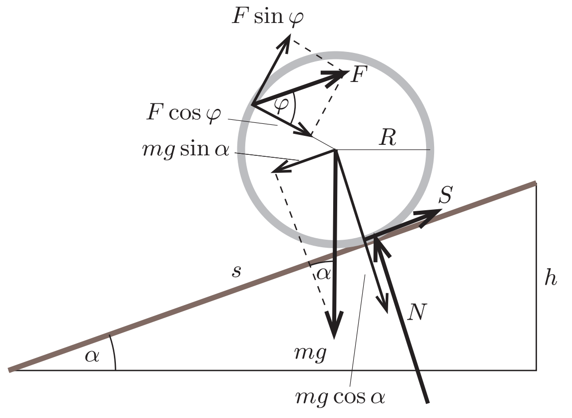
Határozzuk meg, hogy a pallókkal párhuzamosan legalább mekkora erőt kell a betongyűrűre kifejteni, ha egyenletes mozgással, megcsúszás nélkül akarjuk görgetni

a) *felfelé;*

b) *lefelé!*

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. A kútgyűrű egyenletesen mozog, tehát a rá ható erők eredője is és a forgatónyomatékok eredője is *nulla.* Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket.



A kútgyűrűre a pallókkal párhuzamos irányban ható erők egyensúlyi feltétele $F+S=mg\sin\alpha$, amit

(1) $$F+S=mg\frac{h}{s}$$

alakban is felírhatunk. (Látni fogjuk, hogy az ábrán jelölt irányítás mellett $S>0$, tehát a kútgyűrű és a pallók közötti súrlódás csökkenti a munkások által kifejtendő F erő nagyságát.)

Az F erőt felbonthatjuk $F\sin\varphi$ nagyságú tangenciális (érintőirányú) és $F\cos\varphi$ nagyságú radiális (sugárirányú) komponens összegére. A kútgyűrű szimmetriatengelyére vonatkoztatva csak az F erő tangenciális komponensének, valamint a pallók és a kútgyűrű közötti S súrlódási erőnek van forgatónyomatéka. Így a forgatónyomatékok egyensúlyi feltétele:

(2) $$F\sin\varphi\cdot R-SR=0,\qquad \text{vagyis}\qquad S=F\sin\varphi.$$

Az (1) és (2) egyenletekből kapjuk, hogy

$$F=\frac{mgh}{s(1+\sin\varphi)}.$$

Mivel a szinuszfüggvény $0<\varphi<\pi/2$ intervallumon monoton növekvő, F legkisebb értékét φ legnagyobb értéke adja meg:

$$F_{\min}=\frac{mgh}{s(1+\sin\varphi_{\max})}.$$

A φ szög legnagyobb értékét az a feltétel határozza meg, hogy a munkások keze és a kútgyűrű közötti (érintőirányú) súrlódási erő nem lehet nagyobb, mint az általuk kifejtett, sugárirányú nyomóerő $\mu=0{,}8$-szerese:

$$F\sin\varphi\leqslant\mu F\cos\varphi,\quad \text{vagyis}\quad \operatorname{tg}\varphi\leqslant\mu.$$

Ezek szerint

$$\varphi \leqslant \varphi_{\max} = \operatorname{arctg} \mu = 38{,}7^\circ,$$

és így

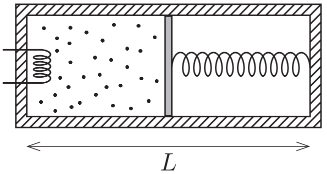
$$F_{\min} = \frac{mgh}{s(1+\sin\varphi_{\max})} \approx 362 \text{ N}.$$

(Érdekes, hogy ez az eredmény *nem függ* a kútgyűrű R sugarától.)

A megoldás során sehol nem hivatkoztunk a mozgás irányára, tehát az eredmény egyaránt érvényes a felfelé lassan görgetett, illetve az óvatosan leeresztett kútgyűrűre is.

Halász Henrik (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

27 dolgozat érkezett. Helyes Bencz Benedek, Csilling Dániel, Csiszár András és Halász Henrik megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 17, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.



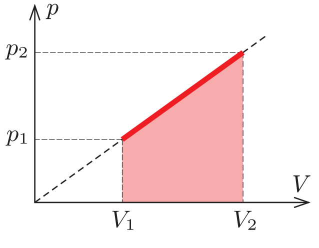
P. 5457. *Hőszigetelt, hengeres tartály belső hossza L. A tartályt egy hőszigetelő dugattyú két részre osztja; a bal oldali térfélben egyatomos ideális gáz, a jobb oldaliban vákuum van (lásd az ábrát). A dugattyút a tartály jobb oldali végével rugó köti össze, melynek feszítetlen hossza L. A gázt a bal oldali térfélben lévő fűtőszál segítségével lassan melegíteni kezdjük.*

Határozzuk meg a gáz mólhőjét ebben a folyamatban!

(*5 pont*) Oroszországi feladat nyomán

I. megoldás. Legyen a dugattyú keresztmetszete A, a rugóállandó pedig D. A rugó összenyomódása megegyezik a gáztér hosszával; jelöljük ezt a távolságot $\Delta\ell$-lel. A dugattyúra a gáz ugyanakkora erőt fejt ki, mint az összenyomott rugó:

$$pA = D\,\Delta\ell.$$



A gáz nyomása tehát egyenesen arányos $\Delta\ell$-lel. Mivel a gáz $V = A\Delta\ell$ térfogata is egyenesen arányos $\Delta\ell$-lel, megállapíthatjuk, hogy p egyenesen arányos V-vel:

$$\frac{p}{V} = \text{állandó}.$$

A gáz állapotváltozása a $p-V$ grafikonon egy – az origóból induló – egyenessel szemléltethető.

A hőtan I. főtétele szerint a gázzal közölt Q hő a gáz E_b belső energiáját növeli és a tágulási munkát fedezi:

$$Q = \Delta E_\mathrm{b} + W'_{\text{tágulási}}. \tag{1}$$

Legyenek a leírt folyamatban a gáz két különböző állapotának állapotjelzői (p_1, V_1) és (p_2, V_2). Ekkor a tágulási munka (ami a piros vonal alatti rózsaszínű trapéz területével egyezik meg) két derékszögű háromszög területének különbségeként kapható meg:

$$W'_{\text{tágulási}} = \frac{p_2 V_2}{2} - \frac{p_1 V_1}{2} = \Delta\left(\frac{pV}{2}\right).$$

Az f szabadsági fokú molekulákból álló ideális gáz belső energiája így számítható ki:

$$E_{\mathrm{b}} = \frac{f}{2} pV.$$

Jelen esetben egyatomos gázról van szó, így $f = 3$, tehát

$$\Delta E_{\mathrm{b}} = \frac{3}{2}\,\Delta(pV).$$

Ezek szerint a közölt hő (1)-nek megfelelően

$$Q = 2 \cdot \Delta(pV).$$

Tudjuk még, hogy az ideális gáz állapotegyenlete:

$$pV = nRT, \qquad \text{vagyis} \qquad \Delta(pV) = nR \cdot \Delta T,$$

és így a mólhő (mólnyi mennyiség hőkapacitása) ebben a folyamatban

$$C_{\mathrm{m}} = \frac{Q}{n\,\Delta T} = 2R.$$

Klement Tamás (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Miközben a gáz belső energiáját megnöveljük, a rugót is össze kell nyomjuk, ezért a fűtőszál által közölt hő egyenlő a gáz belső energiájának és a rugó rugalmas energiájának együttes megváltozásával:

$$Q = \Delta E_{\text{belső}} + \Delta E_{\text{rugalmas}}. \tag{1}$$

Legyen a rugó pillanatnyi összenyomódása ℓ, a rugóállandó D, a dugattyú keresztmetszete A, a gáz állapotjelzői pedig a szokásos p, V és T. Tekintsük a rendszer 1-es és a 2-es állapota közötti változásokat. Az erőegyensúly feltétele:

$$p_1 A = D\ell_1 \qquad \text{és} \qquad p_2 A = D\ell_2,$$

a gáztérfogatok pedig

$$V_1 = A\ell_1 \qquad \text{és} \qquad V_2 = A\ell_2.$$

A rugóenergia megváltozása kifejezhető a nyomásokkal, a térfogatokkal és a hőmérsékletekkel is:

$$\Delta E_{\text{rugalmas}} = \frac{1}{2}D\ell_2^2 - \frac{1}{2}D\ell_1^2 = \frac{1}{2}p_2 A\ell_2 - \frac{1}{2}p_1 A\ell_1 = \frac{1}{2}p_2 V_2 - \frac{1}{2}p_1 V_1 = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}nRT_2 - \frac{1}{2}nRT_1 = \frac{1}{2}nR\Delta T,$$

az egyatomos ($f=3$ szabadsági fokú) gáz belső energiájának megváltozása pedig

$$\Delta E_{\text{belső}} = \frac{f}{2}nRT_2 - \frac{f}{2}nRT_1 = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}nR\Delta T. \tag{3}$$

A rendszerrel közölt hő (1), (2) és (3) szerint

$$Q = 2nR\Delta T,$$

így a folyamatban a mólhő:

$$C_{\text{m}} = \frac{Q}{n\,\Delta T} = 2R = 16{,}63\ \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}.$$

Beke Botond (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

45 dolgozat érkezett. Helyes 31 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5458. *Három telep mindegyike* 12 V *üresjárási feszültségű és* 3 Ω *belső ellenállású. A telepek milyen kapcsolása esetén kapjuk az R külső ellenálláson a legnagyobb teljesítményt, és mekkora ez a teljesítmény, ha*

a) $R = 1\ \Omega$;

b) $R = 3\ \Omega$;

c) $R = 3{,}5\ \Omega$;

d) $R = 6\ \Omega$?

(*4 pont*) Közli: *Székely György,* Budapest

Megoldás. Három egyforma telepet négyféle módon kapcsolhatunk össze. (Nem foglalkozunk azokkal az esetekkel, amikor nem mindegyik telepet használjuk, illetve az eltérő polaritással összekapcsolt telepekkel.)

A eset: a három telepet sorosan kapcsoljuk;

B eset: mindhárom telepet párhuzamosan kapcsoljuk;

C eset: két telepet sorosan kapcsolunk, a harmadikat velük párhuzamosan kötjük be;

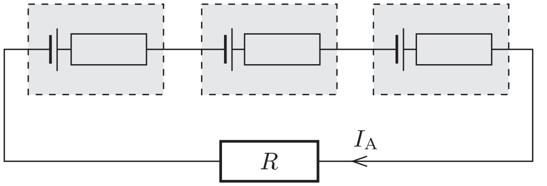
D eset: két telepet párhuzamosan kapcsolunk, majd a harmadikat sorosan kötjük hozzájuk.

Számítsuk ki mind a négy esetben, hogy mekkora áram folyik egy R nagyságú külső ellenálláson. (A feszültséget volt, az ellenállásokat ohm, az áramokat amper, a teljesítményt pedig watt egységekben mérjük, de a mértékegységeket nem írjuk ki.)

A eset.

A telepek üresjárati feszültsége összeadódik (tehát 36 lesz), a belső ellenállások ugyancsak összeadódnak (tehát a nagyságuk 9 lesz), így az áramerősség a külső terhelésen

$$I_{\text{A}} = \frac{36}{R+9},$$



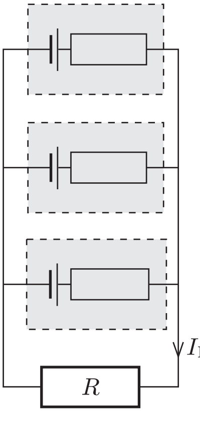
az R ellenállásra jutó teljesítmény pedig

$$P_A = I_A^2 R = \left(\frac{36}{R+9}\right)^2 R.$$

R helyébe rendre 1; 3; 3,5 és 6-ot helyettesítve (két jegy pontossággal számolva) kapjuk, hogy $P_A^a = 13$, $P_A^b = 27$, $P_A^c = 29$, $P_A^d = 35$.

B eset.

A párhuzamosan kapcsolt telepek üresjárati feszültsége marad 12, de a belső ellenállásuk harmadolódik (hiszen a főág áramának $\frac{1}{3}$ része folyik csak át rajtuk), tehát 1 lesz. Ennek megfelelően



$$I_B = \frac{12}{R+1}$$

és

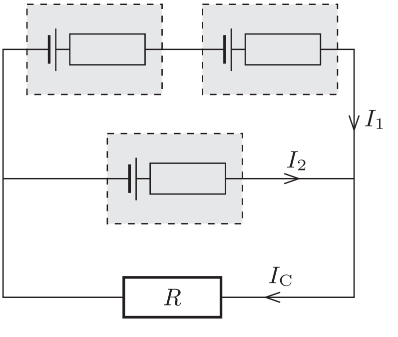
$$P_B = I_B^2 R = \left(\frac{12}{R+1}\right)^2 R,$$

vagyis $P_B^a = 36$, $P_B^b = 27$, $P_B^c = 25$, $P_B^d = 18$.

Kicsit bonyolultabban számolhatók a vegyes kapcsolások.

C eset.

Az *ábra* jelöléseinek megfelelően Kirchhoff I. és II. törvénye szerint



(1) $$I_C = I_1 + I_2,$$

(2) $$24 - 6I_1 = 12 - 3I_2,$$

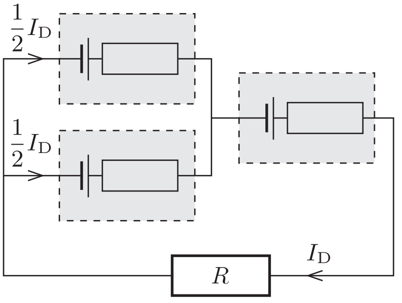
(3) $$12 - 3I_2 - RI_C = 0.$$

Az (1)–(3) lineáris egyenletrendszert megoldva kapjuk:

$$I_C = \frac{16}{R+2}, \quad P_C = I_C^2 R = \left(\frac{16}{R+2}\right)^2 R,$$

és ennek megfelelően

$$P_C^a = 28, \qquad P_C^b = 31, \qquad P_C^c = 30, \qquad P_C^d = 24.$$



D eset.

Ha a főág áramerőssége I_D, akkor a párhuzamosan kapcsolt telepek mindegyikén $\frac{1}{2}I_D$ erősségű áram folyik. Kirchhoff huroktörvényét alkalmazva:

$$12 - \frac{3}{2}I_D + 12 - 3I_D - RI_D = 0,$$

vagyis

$$I_D = \frac{24}{R + 4{,}5},$$

a teljesítmény pedig

$$P_D = I_D^2 R = \left(\frac{24}{R + 4{,}5}\right)^2 R,$$

azaz $P_D^a = 19$, $P_D^b = 31$, $P_D^c = 32$, $P_D^d = 31$.

A kapott eredményeket a külső ellenállás nagysága szerint rendezve látjuk, hogy

a) az 1 Ω-os ellenállásra a párhuzamos kapcsolásnál jut a legnagyobb teljesítmény, 36 W;

b) a 3 Ω-os ellenállásra a vegyes kapcsolásoknál jut a legnagyobb teljesítmény, egyaránt 31 W;

c) a 3,5 Ω-os ellenállásnál a D esetnek megfelelő kapcsolásban legnagyobb a teljesítmény, nevezetesen 32 W;

d) a 6 Ω-os ellenállásnál a telepek soros kapcsolásánál legnagyobb a teljesítmény, nagysága 35 W.

Fórizs Borbála (Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)

49 dolgozat érkezett. Helyes a „bármi jó” csapat (Esztinka Anna Karolina, Szalóki Szonja), Bunford Luca, Fórizs Borbála, Molnár Kristóf és Tatár Ágoston megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 16, hiányos (1–2 pont) 23, nem versenyszerű 5 dolgozat.

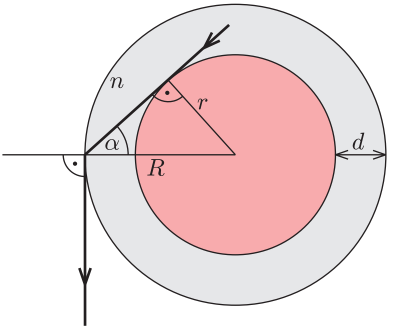
P. 5460. *Színes parfümöt* 4 cm *külső átmérőjű,* 10 cm *magas, állandó falvastagságú, henger alakú,* $n = 1{,}5$ *törésmutatójú üvegben hoznak forgalomba. A parfümöt a polcon szemmagasságban helyezik el, és hátulról világítják meg. A távoli vásárlók úgy látják, mintha a hengerpalást falvastagsága nulla lenne*. Legalább hány* ml *parfüm lehet az üvegben?*

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A hengerpalástot akkor látjuk nulla vastagságúnak, ha az üveg külső széléről olyan fénysugár érkezik a szemünkbe, amelyik áthaladt az üveg belsejében lévő színes folyadékon, vagy legalább érintette azt.

* A fénykép csak illusztráció, az üveg alakja és a falvastagsága eltér a feladatban leírtaktól.

Az *ábra* a határesetnek megfelelő fénysugarat mutatja. Az üvegedény külső sugara $R=2$ cm, a belső sugara pedig legyen r. A geometriai viszonyok miatt



$$\sin\alpha = \frac{r}{R},$$

továbbá a Snellius–Descartes-törvény szerint

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}.$$

Ennek megfelelően az edény belső sugara

$$r = \frac{R}{n} = \frac{2{,}0 \text{ cm}}{1{,}5} = 1{,}33 \text{ cm},$$

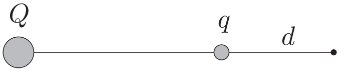
az üveghenger falvastagsága pedig $d=R-r=0{,}67$ cm. Ugyanilyen vastag a $H=10$ cm magas henger alsó és felső körlapja is, tehát az üvegedény belső térfogata legalább

$$V = (H-2d)\, r^2\pi \approx 48 \text{ ml}.$$

Szabó Zsombor (Esztergomi Dobó Katalin Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

6 dolgozat érkezett. Teljes értékű megoldás nem volt. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (2 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

P. 5469. *Súlytalanságban egy rögzített* $Q=6\cdot10^{-7}$ C *értékű ponttöltés elektromos mezejében egy* $q=4\cdot10^{-7}$ C *töltésű,* $m=3$ g *tömegű pontszerű test mozog. Kezdősebesség nélkül indulva* $d=0{,}8$ m *távolság megtétele közben sebessége* $v=2$ m/s *értékre növekedett.*



Mekkora volt a két töltés távolsága kezdetben?

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. A kisebb töltés Coulomb-energiájának egy része átalakul mozgási energiává:

$$k\frac{Qq}{r} = k\frac{Qq}{r+d} + E_\mathrm{m}, \tag{1}$$

ahol r a két töltés kezdeti távolsága.

Tudjuk, hogy

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 = 6\cdot10^{-3}\ \text{J}, \quad \text{továbbá} \quad kQq \equiv a = 2{,}15\cdot10^{-3}\ \text{Jm}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{a}{r} = \frac{a}{r+d} + E_{\mathrm{m}},$$

$$ad = r^2 E_m + rdE_{\mathrm{m}},$$

$$E_{\mathrm{m}} r^2 + E_{\mathrm{m}} dr - ad = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a pozitív megoldása $r = 0{,}268\ \mathrm{m} \approx 27\ \mathrm{cm}$, ekkora volt tehát a két töltés kezdeti távolsága.

Fajszi Karsa (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

62 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 8, hibás 18, nem versenyszerű 4 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 422. Tartsunk egy rúdmágnest merőlegesen egy viszonylag nagy méretű vaslaphoz közel. Mérjük meg a rúdmágnesre ható mágneses erőt a fémlaptól mért távolság függvényében!

(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

G. 813. Egy toronyház tetejéről sorozatfelvételt készítettünk a ház melletti utca forgalmáról. A kiválasztott két felvétel egymást követően 4/15 másodperc időkülönbséggel készült az egyenletesen haladó gépkocsikról. Becsüljük meg a gépkocsik úttesthez viszonyított sebességét, ha az úttestet kettéosztó fehér, szaggatott választóvonal egy szakaszának hossza kb. 2 méter.

(*3 pont*) *Öveges József Országos Fizikaverseny* feladata nyomán

G. 814. Egy nagy tömegű, nyitott vasúti kocsi vízszintes, egyenes pályán halad v sebességgel. A kocsin lévő könnyű játékágyúval az ágyúhoz képest $2v$ sebességgel tudunk lövedékeket kilőni. A vízszinteshez képest milyen szögben lője ki az ágyú a lövedékét, hogy az visszaessen a vasúti kocsira? A kilövés után mennyi idővel esik vissza a lövedék a kocsira? (A légellenállástól tekintsünk el.)

(*3 pont*)

G. 815. Egy 100 g tömegű, 0 °C-os, 920 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű jégdarab közepébe 2 g tömegű, 11 300 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű ólomgolyót fagyasztottunk. A jégdarabot 0 °C-os vízbe tesszük. A szobahőmérsékletű levegő miatt percenként 5 g jég olvad el. Mennyi idő múlva kezd lesüllyedni a jégdarab?

(*4 pont*)

G. 816. Van három ohmos ellenállásunk, melyek értéke 1 kΩ, 2 kΩ és 4 kΩ. Ezek közül kettőt vagy hármat sorba kötünk, és 230 V-ra kapcsolunk. Hányféle feszültséget mérhetünk az egyes áramkörökben két tetszőleges pont között, és mekkorák ezek az értékek?

(*4 pont*)

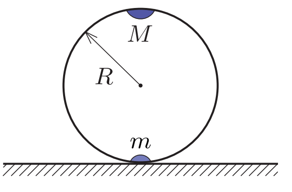
P. 5481. Egy jármű álló helyzetből indulva egyenletesen gyorsul. A jármű kerekének (egyik legszélső) P pontja induláskor éppen a talajtól legtávolabbi helyzetében van. Hányszorosára nő a P pont gyorsulásának nagysága a kerék n fordulata után?

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5482. Egy L hosszúságú fonálingát vízszintesig kitérítünk, majd elengedünk. Amikor az inga fonala függőleges lesz, akkor az ingatest tökéletesen rugalmasan ütközik egy ugyanakkora tömegű másik kicsiny testtel, amely kezdetben egy asztal szélén van. Az ütközést követően az asztal szélén lévő test vízszintes hajítást végez, tehát parabolapályán mozog. Hol van ennek a parabolának a fókusza és a vezéregyenese?

(*5 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5483. Egy elhanyagolható tömegű, R sugarú abroncs egyik átmérőjének két végpontjába egy m, illetve egy $M = 2m$ tömegű, pontszerű nehezéket erősítettünk. A függőleges síkú abroncsot súrlódásmentes asztallapra helyezzük úgy, hogy kezdetben a két nehezék azonos függőleges egyenesen helyezkedik el (a nehezebb van felül). Az abroncsot ebből az instabil egyensúlyi állapotból elengedjük.



a) Mekkora az abroncs középpontjának sebessége, amikor az M tömegű nehezék eléri pályájának legalsó pontját?

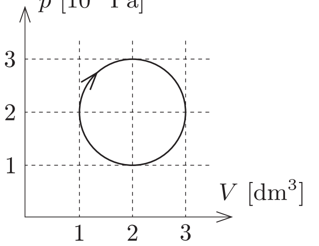
b) Mekkora az *a*) esetben az asztalra ható nyomóerő?

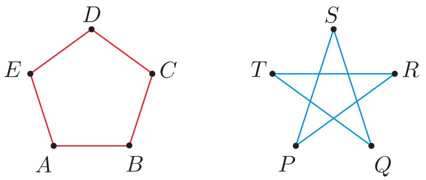
(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

P. 5484. Kétatomos gázzal egy olyan körfolyamatot valósítunk meg, melynek képe a p–V síkon, a tengelyek megfelelő skálázása esetén, éppen az *ábrán* látható kör.

Határozzuk meg numerikus módszerekkel egy így elkészített hőerőgép hatásfokát!

(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest



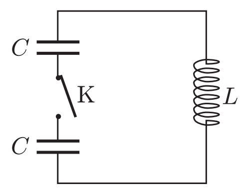


P. 5485. Egy szabályos ötszög csúcsait az oldalak mentén az *ábrán* látható módon egyforma ellenálláshuzalokkal összekötjük. Egy másik szabályos ötszögbe az átlók mentén helyezünk el ellenálláshuzalokat, így azok egy ötágú csillagot képeznek. (Az ellenálláshuzalok szigeteltek és csak az ötszög csúcsaiban érintkeznek.)

Az ötszögek szomszédos csúcsai között mérhető eredő ellenállás (R_{AB}, illetve R_{PQ}) a két kapcsolásban ugyanakkora. Melyik kapcsolásban és hányszor nagyobb az átlók végpontjai között mérhető eredő (R_{AC}, illetve R_{PR}) ellenállás?

(*4 pont*) Közli: *Bertalan Zoltán,* Békéscsaba

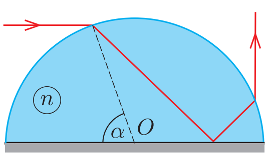
P. 5486. Az *ábrán* látható áramkör alkotóelemei ideálisak. Kezdetben az egyik kondenzátor töltése q_0, a másik kondenzátor töltetlen.



a) Mekkora az áramerősség maximuma a K kapcsoló zárását követően?

b) A kapcsoló zárása után mennyi idővel éri el először a maximumát az áramerősség?

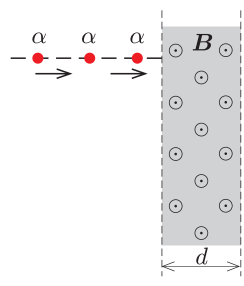
(*5 pont*) Közli: *Kovács Zoltán,* Kolozsvár



P. 5487. Egy n törésmutatójú félhenger síklapját befoncsorozzuk. Az *ábrának* megfelelően a félhengert egy lézersugárral vízszintesen megvilágítjuk. Mekkora α értéknél lesz a kilépő fénysugár éppen függőleges? Mennyi legyen n minimális értéke, hogy ilyen sugármenet lehetséges legyen?

(*5 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest

P. 5488. α-részecskéket 10^6 V feszültséggel felgyorsítunk, majd a nyalábot az *ábrának megfelelően* merőlegesen egy $B = 1{,}5$ T indukciójú, $d = 7$ cm szélességű, homogén mágneses mezőbe irányítjuk.

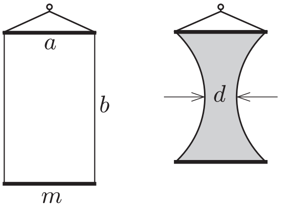


a) Milyen szögben térülnek el a részecskék?

b) Mennyi időt töltenek a részecskék a mágneses térben?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5489. Egy olyan téglalap alakú keretet készítettünk, amelynek a hosszúságú vízszintes oldalai merev, egyenes, m tömegű drótszálak, b hosszúságú függőleges oldalai pedig vékony, elhanyagolható tömegű cérnaszálak.



A keretet az egyik drótszálnál fogva mosogatószeres oldatba mártottuk, majd kiemeltük. A kialakuló hártya mérete a közepénél d értékre csökkent. Mekkora a folyadék felületi feszültsége?

Adatok: $a = 5$ cm, $b = 8$ cm, $d = 3{,}6$ cm, $m = 2{,}6$ g.

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

Áprilisi pótfeladat.* Ha szeretnénk kipróbálni, hogy milyen az ejtőernyős ugrás, akkor ezt az úgynevezett tandemugrással tehetjük meg. A tandemugrást bemutató képen az oktató felül helyezkedik el, alatta pedig az ejtőernyőzést kipróbáló érdeklődő látható.

Az érdeklődő és az oktató teste egymáshoz szorul, vagy éppen ellenkezőleg, távolodni akar egymástól, ha

a) az ejtőernyő még nincs nyitva, az ugrók „szabadon” zuhannak;

b) az ejtőernyő már huzamosabb ideig nyitva van?

❄

Beküldési határidő: 2023. május 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 73. No. 4. April 2023)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 223): **K. 764.** In the Seventh Kingdom in the back of beyond, a week lasts one seventh as many days as on the Earth, a day consists of 42 hours, and there are 77 minutes in an hour and 33 seconds in a minute. How many seconds elapse during the course of two weeks there? (Proposed

* A feladat megoldása beküldhető, de nem számít bele a pontversenybe.

by *K. A. Kozma,* Győr) **K. 765.** The midpoint of side AB of a triangle ABC is D, and the midpoint of CD is E. Which point of the line segment CD should be marked F so that the sum of the areas of triangles AEC and BFC is exactly 40% of the area of triangle ABC? (Proposed by *B. Bálint,* Eger) **K. 766.** Alpha, Lambda and Zeta each have more than 1000 forints (HUF, Hungarian currency) on their bank accounts. Lambda's money equals 35 percent of Alpha's money, and Zeta's money equals $\frac{12}{7}$ of Lambda's money. How much money do Alpha, Lambda and Zeta have altogether if Zeta has 10 110 forints more than Lambda? (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr) **K/C. 767.** The circle k passes through vertices A, B of a given square $ABCD$ in the plane, and touches the side CD. Let M denote the intersection of circle k and side BC which is different from B. Find the exact value of the ratio $\frac{CM}{BM}$. (Proposed by *I. Keszegh,* Révkomárom) **K/C. 768.** The number 2023 has exactly one digit of 0. How many four-digit positive odd numbers are there for which this property does not hold? (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr)

New exercises for practice – competition C (see page 224): **Exercises up to grade 10: K/C. 767.** See the text at Exercises **K. K/C. 768.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1763.** Prove that the number $4^{52}+52^{2023}+2023^{52}$ is divisible by 15. **C. 1764.** Solve the simultaneous equations $x(2x+6)(3x+5y)=64$; $2x^2+9x+5y=16$, where x, y are positive real numbers. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1765.** The base of a regular four-sided pyramid $ABCDE$ is the square $ABCD$, and each edge of the pyramid is 32 units long. A snail starts at vertex E and crawls to vertex A as follows: first moves along edge EA to the point P for which $EP=2$. Then continues to cross the face ABE and arrives at point Q of edge EB, where $EQ=4$. Then crosses the face BCE to reach that point R of edge EC for which $ER=8$, and continues along face CDE to point S on edge ED, with $ES=16$. Finally, it crawls on the surface of face DAE, from S to point A. What is the minimum distance covered by the snail altogether? (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **Exercises upwards of grade 11: C. 1766.** Show that in every triangle (with conventional notations), $\sqrt{a\sin\alpha}+\sqrt{b\sin\beta}+\sqrt{c\sin\gamma}=\sqrt{(a+b+c)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}$. (Proposed by *G. Holló,* Budapest) **C. 1767.** Given are 2 coins of 7, 3 coins of 17, 5 coins of 119, 7 coins of 289, 11 coins of 2023 and n coins of 1. Two coins are selected at random, and their values are multiplied together, and a result of 2023 is obtained. Find the value of n, given that the probability of obtaining that result is $\frac{12}{55}$. (Proposed by *O. Teleki,* Tököl)

New exercises – competition B (see page 225): **B. 5310.** A game of strategy is played by four teams on a map represented by an $n\times n$ square grid ($n\geqslant 3$). Every square field is either *sea* or *land.* The bases of the four teams are in the four corners of the map, on land. Given that there is one large connected region of sea on the map and no two bases are connected by a path on land, determine the minimum possible number of fields that represent the sea. (A path consists of adjacent fields. Two fields are adjacent if they have an edge in common. The region of sea is connected in this sense: any two sea squares can be connected by a path consisting of sea squares.) (*4 points*) (Proposed by *K. Williams,* Cambridge) **B. 5311.** Is it true that if the sine of each angle of a triangle is rational then the cosine of each angle is rational, too? (*3 points*) (Proposed by *M. Hujter,* Budapest) **B. 5312.** Let F_k denote the kth Fibonacci number ($F_1=F_2=1,\ F_{k+1}=F_k+F_{k-1}$). Prove that $2\sum_{k=1}^{n}F_k^2F_{k+1}=F_nF_{n+1}F_{n+2}$ for all positive integers n. (*3 points*) (Proposed by *M. Bencze,* Brassó) **B. 5313.** Triangle ABC is acute angled, and $AC<AB<BC$. The centre of the circumscribed circle is O, the orthocentre is M. The perpendicular bisector of side AB intersects line AM at point P, and the circle OMP intersects line BM again at a point Q, different from M. Prove that line BC is tangent to the circle ABQ. (*4 points*)

(Proposed by *G. Kós,* Budapest) **B. 5314.** Let S be an n-element set, and let $1 \leqslant k \leqslant n$ be an odd integer. What is the largest number of subsets of S that can be selected so that the symmetric difference of no pair of subsets should have exactly k elements? (*5 points*) (Proposed by *P. P. Pach,* Budapest) **B. 5315.** Consider a triangle ABC. Let B' be a point on the extension of side AB beyond B, and let C' be the point on the extension of side AC beyond C such that $BB' = CC'$. Let k and k' denote the circumscribed circles of triangles ABC' and $AB'C$, respectively. Prove that the common chord of k and k' lies on the angle bisector drawn from A. (*5 points*) (Proposed by *M. Hujter,* Budapest) **B. 5316.** Prove that if $0 < a, b < 1$ then $(a+b-ab)\left(a^b + b^a\right) > a+b$. (*6 points*) (Proposed by *M. Bencze,* Brassó) **B. 5317.** An ellipse lies in the closed positive orthant, its foci are $(x_1; y_1)$ and $(x_2; y_2)$, and it touches the coordinate axes at the points of abscissa p, and ordinate q, respectively. Show that the point $(p; q)$ is collinear with the origin and the centre of the ellipse, and calculate the numerical eccentricity of the ellipse. (*6 points*) (Proposed by *L. László,* Budapest)

New problems – competition A (see page 227): **A. 851.** Let k, l and m be positive integers. Let $ABCDEF$ be a hexagon that has a center of symmetry, and let its sidelengths be $AB = k$, $BC = l$ and $CD = m$. Let $f(k, l, m)$ denote the number of ways we can partition hexagon $ABCDEF$ into rhombi with unit sides and an angle of $120°$. Prove that by fixing l and m, there exists polynomial $g_{l,m}$ such that $f(k, l, m) = g_{l,m}(k)$ for every positive integer k, and find the degree of $g_{l,m}$ in terms of l and m. (Submitted by *Zoltán Gyenes,* Budapest) **A. 852.** Let (a_i, b_i) be pairwise distinct pairs of positive integers for $1 \leqslant i \leqslant n$. Prove that $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) > \frac{2}{9}n^3$, and show that the statement is sharp, i.e. for an arbitrary $c > \frac{2}{9}$ it is possible that $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n) < cn^3$. (Submitted by *Péter Pál Pach,* Budapest, based on an OKTV problem) **A. 853.** Let points A, B, C, A', B', C' be chosen in the plane such that no three of them are collinear, and let lines AA', BB', CC' be tangent to a given equilateral hyperbole at points A, B and C, respectively. Assume that the circumcircle of $A'B'C'$ is the same as the nine-point circle of triangle ABC. Let $s(A')$ be the Simson line of point A' with respect to the pedal triangle of ABC. Let A^* be the intersection of line $B'C'$ and the perpendicular of $s(A')$ through point A. Points B^* and C^* are defined in a similar manner. Prove that points A^*, B^* and C^* are collinear. (Submitted by *Áron Bán-Szabó,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 250)

M. 422. Hold a bar magnet close to a relatively large sheet of iron perpendicular to the sheet. Measure the magnetic force exerted on the bar magnet as a function of the distance from the metal plate.

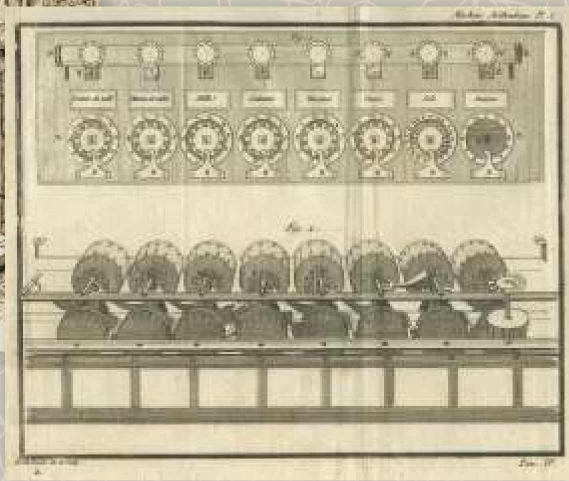
G. 813. From the top of a tower block, we took a series of photos of the traffic on the street next to the house. Two selected shots were taken with a time difference of 4/15 seconds, and show cars travelling at a constant speed. Estimate the speed of the cars relative to the roadway if the length of a white line segment of the white, dashed road marking, which divides the lanes of the street, is about 2 metres. **G. 814.** A heavy, open (railway) wagon is travelling on a horizontal, straight track at a speed of v. A light toy cannon on the wagon can fire projectiles at a speed of $2v$ with respect to the to the cannon. At what angle to the horizontal should the projectile be fired so that it falls back onto the wagon? How long after firing does the projectile fall back onto the wagon? (Neglect air drag.) **G. 815.** A lead ball of mass 2 g, and of density 11 300 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ was frozen into a 100 g, 0 °C piece of ice of density 920 $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. The ice was put into water of temperature 0 °C. Due to the room temperature air around the ice-water system, 5 g of ice to melts in every minute. How long will it take for the ice to start sinking? **G. 816.** We have three resistors with resistance values of 1 kΩ, 2 kΩ and 4 kΩ. Two or three of these are connected in series and connected to 230 V voltage supply. In this way how many different values of voltage can we obtain across them, and what are they?

P. 5481. A vehicle starts from rest and accelerates uniformly. Point P, one of the outermost point on the rim of the vehicle wheel, is initially at its furthest position from the ground. By what factor does the acceleration of point P increase after n turns of the wheel? **P. 5482.** The thread of a simple pendulum of length L is stretched horizontally and then released. When the thread of the pendulum becomes vertical, the pendulum bob collides perfectly elastically with another small body, which has the same mass as the pendulum bob, and which is initially on the edge of a table. After the collision, the body on the edge of the table is projected horizontally, i.e. it will move in a parabolic path. Where is the focus and the directrix of this parabola? **P. 5483.** Two point-like weights of mass m and $M=2m$ are attached to the two endpoints of a diameter of a tire of radius R and of negligible mass. The tire is placed on a frictionless table such that the plane of the tire is vertical, and initially the two weights are along the same vertical line (the heavier one is on the top). The tire is released from this unstable equilibrium state. *a*) What is the velocity of the centre of the tire when the weight of mass M reaches the lowest point of its trajectory? *b*) In the case *a*), what is the force exerted on the table? **P. 5484.** A sample of diatomic gas is taken through the cyclic process which is a circle in the $p{-}V$ diagram, when appropriate units are used, and is shown in the *figure.* Using numerical methods, determine the efficiency of the heat engine which executes the above cyclic process. **P. 5485.** The vertices of a regular pentagon are connected along the sides by wires which have the same resistance, as shown in the *figure.* In another regular pentagon, we place wires along the diagonals to form a five-pointed star. (The wires are insulated and there are electrical joints only at the vertices of the pentagon.) The equivalent resistances measured between adjacent vertices of the two pentagons (R_{AB} and R_{PQ}) are the same in the two connections. In which circuit will the equivalent resistance between the vertices of a diagonal (R_{AC} or R_{PR}) be greater, and by what factor? **P. 5486.** The components of the circuit shown in the *figure* are ideal. Initially, one of the capacitors is charged to q_0, and the other capacitor is uncharged. *a*) What is the maximum current after closing switch K? *b*) How long after closing the switch does the current first reach its maximum value? **P. 5487.** The flat surface of a half-cylinder glass of refractive index n is tin coated. The half-cylinder is illuminated horizontally with a laser beam as shown in the *figure.* At what value of α will the emerging light beam be exactly vertical? What should the minimum value of n be for such a beam path to be possible? **P. 5488.** α-particles are accelerated through a potential difference of 10^6 V and then the particle beam enters perpendicularly into a region of uniform magnetic field of induction $B=1.5$ T and of width $d=7$ cm, as shown in the *figure.* *a*) At what angle are the particles deflected? *b*) How much time are the particles in the magnetic field? **P. 5489.** A rectangular frame was constructed with horizontal sides of length a made of rigid, straight pieces of wires each of mass m, and vertical sides of length b made of thin, negligible-mass threads. The frame was immersed into some dishwashing liquid, holding by one of the wires, and then it was taken out of it. The width of the resulting soap film was reduced to d at the centre. What is the surface tension of the liquid? *Data:* $a=5$ cm, $b=8$ cm, $d=3.6$ cm, $m=2.6$ g.

400 éve született Blaise Pascal

Pascal hidrosztatikai kísérlete Rouenben

A mechanikus számológépének rajza



Pascalt ábrázoló 0 eurós emlékbankjegy

Matek az Utcán – szerte az országban

2023.0**3.14**.

A ceglédi *Matek az Utcán* drónról fényképezve

Sapkás logikai feladat
Debrecenben

Matek Flashmob a Blaha Lujza téren
Budapesten – A π megmérése

Polidron labda építése

Logikai játék az aszfalton

Számolós kicsiknek Cegléden

Petőfi Kulturális Ügynökség
Nemzeti Együttműködési Alap
nka Nemzeti Kulturális Alap
Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt.
Miniszterelnökség