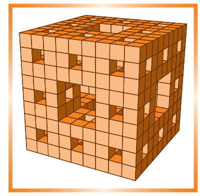


A B pontversenyben kitűzött feladatok (5302–5309.)

B. 5302. Egy 8×8-as táblázat minden mezőjébe $+1$-et vagy -1-et írtunk úgy, hogy az összes szám összege 0. Minden sorban és oszlopban kiszámoljuk a számok összegét. Legfeljebb hány pozitív szám lehet ezen 16 összeg között?

(*3 pont*) *Gáspár Merse Előd* (Budapest) ötlete nyomán

B. 5303. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögnek C-nél van a derékszöge. Vegyünk fel a BC oldal belsejében egy D pontot úgy, hogy a CDA szög $75°$ legyen. Tegyük fel, hogy az ADC háromszög területe egységnyi. Bizonyítsuk be, hogy $BD=2$.

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5304. *a*) Vannak-e olyan a és b pozitív egész számok, amelyekre

$$a+b \mid a^2+b^2, \quad \text{de} \quad a+b \nmid a^4+b^4?$$

b) Vannak-e olyan a és b pozitív egész számok, amelyekre

$$a+b \mid a^4+b^4, \quad \text{de} \quad a+b \nmid a^2+b^2?$$

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5305. Legyen az ABC háromszög BC oldalának B-hez közelebbi harmadolópontja A_1, C-hez közelebbi harmadolópontja pedig A_2. A CA oldalon hasonlóképpen jelöljük ki a B_1 és B_2, végül az AB oldalon a C_1 és C_2 harmadolópontokat. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög súlypontja illeszkedik az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszögek körülírt köreinek közös pontjait összekötő egyenesre.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5306. Van egy cinkelt dobókockánk és egy cinkelt érménk, amelynek egyik oldalán egy pötty van, a másik oldalán pedig kettő. Tudjuk, hogy a dobott pöttyök számának várható értéke ugyanannyi a kocka és az érme esetén. Mutassuk meg, hogy egyszerre dobva a kockával és az érmével, annak a valószínűsége, hogy az érmével több pöttyöt dobunk, mint a kockával nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy a kockával dobunk több pöttyöt, mint az érmével.

(*5 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5307. Egy hegyesszögű háromszög területe T, beírt körének sugara r, körülírt körének sugara R. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{3}\,T \leqslant (r+R)^2.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Simon László Bence* (Budapest)

B. 5308. Jelölje a_n az $n+1, n+2, \ldots, n+10$ pozitív egész számok legkisebb közös többszörösét. Határozzuk meg a legnagyobb olyan λ valós számot, melyre $\lambda a_n \leqslant a_{n+1}$ mindig teljesül.

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

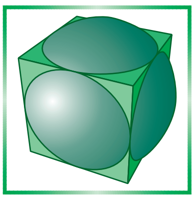
B. 5309. Szerkesszük meg a parabola fókuszpontját és vezéregyenesét, ha adott a tengelye és két pontja.

(*6 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (848–850.)

A. 848. Legyen G egy síkgráf, amely egyben páros gráf is. Igaz-e mindig, hogy minden lapjához hozzárendelhetjük egy csúcsát úgy, hogy semelyik két laphoz ne rendeljük ugyanazt a csúcsot?

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

A. 849. Az r valós szám esetén jelölje $f(r)$ az r számhoz legközelebbi egész számot (ha r törtrésze $1/2$, $f(r)$ legyen $r-1/2$). Legyenek $a>b>c$ racionális számok úgy, hogy minden n egészre $f(na)+f(nb)+f(nc)=n$ teljesüljön. Mi lehet a, b és c értéke?

Javasolta: *Damásdi Gábor* (Budapest)

A. 850. Igazoljuk, hogy létezik egy olyan N pozitív valós szám, melyre tetszőleges $a, b>N$ valós számok esetén az a és b hosszúságú oldalakkal rendelkező téglalap kerülete lefedhető egymásba nem nyúló egység sugarú körlapokkal (a körlapok érinthetik egymást).

Javasolta: *Váli Benedek* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2023. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄