Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Hány olyan, *egész* számokból álló számhármas van, melyben a három szám szorzata 6? (Két számhármast nem tekintünk különbözőnek, ha csak a számok sorrendjében térnek el egymástól.) (*4 pont*)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a *valós* számok halmazán:

b) $(x+1)(x-2)(x-3)=6$; (*5 pont*)

c) $(\sin x\cos x-2\sin x)(2\sin x-1)=0$. (*5 pont*)

hang neve	frekvencia (Hz)
A	440
B	
H	
C	
Cisz	
D	
Disz	
E	
F	
Fisz	
G	
Gisz	
A′	880

2. Az úgynevezett normál zenei A hang frekvenciája 440 Hz. Az egy oktávval magasabb A hang frekvenciája éppen kétszer ekkora, azaz 880 Hz. Közöttük 11 „félhang” van, ld. a *táblázatot.*

Két szomszédos félhang frekvenciájának hányadosa állandó, jelölje ezt az állandót q.

a) Igazoljuk, hogy q értéke öt tizedesjegy pontossággal 1,059 46. (*4 pont*)

b) Határozzuk meg a táblázatban az egymás után következő félhangok hiányzó frekvenciáit egész Herzre kerekítve. (*3 pont*)

Ha két hang egyszerre szólal meg, az emberi fül általában azokat a hangközöket hallja „szépnek”, amelyekben a két megszólaló hang frekvenciájának hányadosa minél „egyszerűbb” törttel fejezhető ki. A *kvint* hangköz például két olyan hang együttes megszólalását jelenti, melyek 7 félhangnyi távolságra vannak egymástól. A két hang frekvenciájának hányadosa ilyenkor nagyon közel van a $\frac{3}{2}$-hez.

c) Számítsuk ki a két hang frekvenciájának hányadosát három tizedesjegy pontossággal és határozzuk meg, hogy a hányados hány százalékkal tér el a $\frac{3}{2}$-től. (*4 pont*)

d) Tekintsük növekvő sorrendben a félhangok frekvenciáinak pontos értékét, majd ezeknek az értékeknek a kettes alapú logaritmusát. Az ezekből képzett sorozatot jelölje $\{a_n\}$. Válasszuk ki az alábbiak közül az igaz állítás betűjelét. (*2 pont*)

A) Az $\{a_n\}$ sorozat számtani sorozat, melynek differenciája $\frac{1}{12}$.

B) Az $\{a_n\}$ sorozat számtani sorozat, melynek differenciája $\sqrt[12]{2}$.

C) Az $\{a_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $\frac{1}{12}$.

D) Az $\{a_n\}$ sorozat mértani sorozat, melynek hányadosa $\sqrt[12]{2}$.

3. A $3x - 2y - 7 = 0$ egyenletű egyenes merőleges az $ax - 6y + 1 = 0$ egyenletű egyenesre.

a) Határozzuk meg a értékét. (*4 pont*)

A $3x - 2y + k = 0$ egyenletű egyenes az x-tengelyt a P, az y-tengelyt a Q pontban metszi.

b) Határozzuk meg k lehetséges értékeit, ha az OPQ háromszög területe 75 egység (O a koordináta-rendszer origóját jelöli). (*7 pont*)

4. A Boci tej 1 literes dobozban 380 forintba kerül az üzletben, 2 deciliteres dobozban pedig dobozonként 220 forintba.

a) Ha 2 deciliteres dobozokban veszünk összesen 1 liter tejet, akkor hány százalékkal fizetünk többet, mint ha egy doboz 1 literes tejet vettünk volna? (*3 pont*)

A 2 dl-es tejesdoboz – matematikai értelemben – hasonló az 1 litereshez. A tejet forgalmazó cég számára a dobozokba tölthető tej ára a tej térfogatával, a tejesdoboz előállítási költsége pedig a doboz felszínével egyenesen arányos. Egy liter dobozba tölthető tej a forgalmazó cég számára 210 forintba kerül, az egy literes tejesdoboz előállítása pedig 80 forintba.

b) Hány százalékkal kerül többe az öt darab 2 dl-es kiszerelésű tej előállítása, mint az egy doboz 1 literes kiszerelésű tejé? (*6 pont*)

Minőségellenőrzéskor a legyártott tejesdobozoknak átlagosan 4%-át sérültnek találják.

c) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott tejesdoboz közül legfeljebb 1 sérültet találnak. (*4 pont*)

II. rész

5. *a*) Hány olyan egyenest határoznak meg egy téglatest csúcsai, melyek nem illeszkednek a téglatest egyik élére sem? (*3 pont*)

Egy 12 cm sugarú gömbbe téglalap alapú egyenes hasábot írunk úgy, hogy a hasáb csúcsai a gömb felületén vannak. A hasáb alaplapja éleinek aránya 1 : 2, a hasáb magassága 16 cm.

b) Mekkora a hasáb térfogata? (*5 pont*)

Egy 12 cm sugarú gömbből olyan dísztárgyat csiszolnak ki, melynek alakja téglalap alapú egyenes hasáb, és a hasáb alaplapja éleinek aránya 1 : 2.

c) Mekkora az így kicsiszolható legnagyobb dísztárgy térfogata? (*8 pont*)

6. Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a három dobott szám

a) összege kisebb 5-nél; (*3 pont*)

b) között van 4-nél nagyobb; (*3 pont*)

c) szorzata osztható 6-tal. (*5 pont*)

A három dobott számot balról jobbra egymás mellé írjuk. Azt tapasztaljuk, hogy az így kapott háromjegyű számban a középső számjegy éppen a három számjegy mediánja.

d) Hány ilyen tulajdonságú háromjegyű számot kaphatunk? (*5 pont*)

7. *a*) Tekintsük az $a_n = \sin(n \cdot 7^\circ)$ sorozatot ($n \in \mathbb{Z}^+$). A sorozat első 100 tagja közül melyik a három legkisebb? (*6 pont*)

b) Igazoljuk, hogy a $\dfrac{3}{\cos^2 x - \cos x + 1}$ kifejezés minden valós x esetén értelmezhető. (*3 pont*)

c) Határozzuk meg az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{3}{\cos^2 x - \cos x + 1}$$

függvény értékkészletét. Hol veszi fel a függvény a maximumát? (*7 pont*)

8. G egy tízpontú egyszerű gráf, melynek összesen 6 éle van.

a) Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább egy olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? (*2 pont*)

b) Igaz-e, hogy G csúcsai közt biztosan van legalább két olyan, amelynek a fokszáma legalább 2? (*2 pont*)

Egy szabályos tízszög legrövidebb átlója egységnyi hosszúságú.

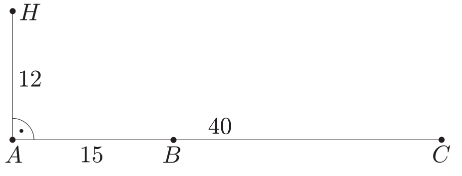
c) Határozzuk meg a tízszög oldalainak hosszát. (*3 pont*)

Az A, B, C, D és E pontok egy ötpontú teljes gráf csúcsai. A gráf élei közül véletlenszerűen kiszínezünk négyet.

d) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az A, B, C, D, E pontokból és a színezett élekből álló gráf fagráf lesz. (*9 pont*)

9. Két város közti utat egy kamion odafelé 60 km/h, visszafelé 50 km/h átlagsebességgel tett meg.

a) Határozzuk meg a kamionnak a két út egészére vonatkozó átlagsebességét. (*4 pont*)



A tengeren lévő (pontszerűnek tekintett) H szigetről árut szállítanak a tengerparton lévő C pontba. Az egyenesnek tekinthető partvonalnak azonban csak az AB szakaszán tud kikötni a hajó ($HA \perp AB$), ezért itt átrakodják a rakományát, és közúton (a part mentén) kamionnal szállítják el C-be. A rakodás egy óráig tart. Az adatok: $HA = 12$ km, $AB = 15$ km, $AC = 40$ km.

A hajó átlagsebessége a vízen 8 km/h, a kamion átlagsebessége közúton 40 km/h.

b) Melyik útvonal a gyorsabb: a HAC vagy a HBC? Mennyi a szállítási idő az egyes útvonalakon? (*4 pont*) *c*) Az AB szakasz mely D pontján kössön ki a hajó, hogy a szállítmány a lehető leghamarabb eljusson C-be? Mennyi ekkor a szállítási idő? (*8 pont*)

Koncz Levente
Budapest

Megoldásvázlatok a 2023/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az*

$$f : [0;5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

függvényt. (*4 pont*)

b) *A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az*

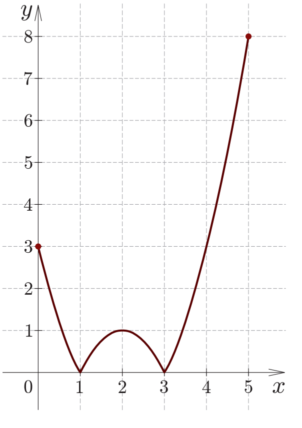
$$|x^2 - 4x + 3| = p$$

egyenletnek a $[0;5]$ *intervallumon?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Először azonos átalakítást végzünk:

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3| = |(x-2)^2 - 1|,$$

majd ábrázoljuk a függvényt.



b) Az $|x^2 - 4x + 3| = p$ egyenlet megoldásainak száma leolvasható a grafikonról.

– Ha $p < 0$, akkor nincs megoldás.
– Ha $p = 0$, akkor 2 megoldás van.
– Ha $0 < p < 1$, akkor 4 megoldás van.
– Ha $p = 1$, akkor 3 megoldás van.
– Ha $1 < p \leqslant 3$, akkor 2 megoldás van.
– Ha $3 < p \leqslant 8$, akkor 1 megoldás van.
– Ha $p > 8$, akkor nincs megoldás.

2. *a*) *Az* $\overline{abc}$ *háromjegyű szám kilencszerese az* $\overline{xabc}$ *alakú négyjegyű szám. Bizonyítsuk be, hogy az* $\overline{abc}$ *szám osztható* 125*-tel.* (*6 pont*)

b) *Igazoljuk, hogy* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\frac{\lg(7^x) + \lg(7^{-x})}{2} \leqslant \lg\left(\frac{7^x + 7^{-x}}{2}\right). \qquad (8\ pont)$$