A d-dimenziós tér fedése konvex test eltoltjaival*

1. Egy fedési feladat

Egy iskolában rendszeresen beázik a mennyezet, így hát megpróbálják legalább a tanári asztalt megmenteni, nehogy az is tönkremenjen. E célból a matekszertár logikai készleteit veszik igénybe: megpróbálják egybevágó idomokkal teljesen lefedni az asztalt. Ha a kis (nem lyukas!) négyzeteket használják, akkor könnyen kitalálható, hogy hogyan lesz a legkevesebb idomra szükség. De vajon mi a helyzet, ha (szintén nem lyukas!) kör idomokkal próbálják lefedni? Akkor mi a leggazdaságosabb fedés? Még izgalmasabb – és általánosabb – kérdés, hogy mi a helyzet akkor, ha az „asztallapunk” a d-dimenziós tér, a lefedéshez használt testek pedig valamilyen egybevágó, szintén d-dimenziós konvex testek. Ez a cikk ezzel az utóbbi, általános problémával foglalkozik.

Korábbi cikkeinkben [1, 2] bevezettük $\mathbb{R}^d$-t, a d-dimenziós euklídeszi geometria ponthalmazát, és abban a konvex, illetve a zárt halmazokat. Néhány jelölés: egy $\mathbb{R}^d$-beli K halmaz eltoltja egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ vektorral a $K + \mathbf{v} = \{\mathbf{x} + \mathbf{v} : \mathbf{x} \in K\}$ halmaz. (Vagyis a vektoroknak az a halmaza, amelyet úgy kapunk, hogy K minden elemét eltoljuk $\mathbf{v}$-vel.) A K halmaz λ-szorosa, ahol λ valós szám (skalár), a $\lambda K = \{\lambda\mathbf{x} : \mathbf{x} \in K\}$ halmaz, speciálisan $-K = (-1)K$, amely nem más, mint a K halmaz origóra vett középpontos tükörképe.

Az, hogy egybevágó – sőt azonos helyzetű – alakzatokat akarunk használni, megfelel annak, hogy egy d-dimenziós K zárt konvex halmaz eltoltjaival akarjuk a lehető leggazdaságosabban lefedni az egész $\mathbb{R}^d$ teret. Hogyan definiáljuk a gazdaságosságot? Nyilvánvalóan végtelen sok eltoltra lesz szükségünk, így azok száma nem megfelelő mennyiség. Definiálható egy fedés sűrűsége, de az technikailag némiképp izzadságos, ezért egy egyszerűbb mennyiséget használunk: célunk az, hogy egyik pont se legyen *túl sokszor fedve.* További egyszerűsítés, hogy a lefedéshez használt test legyen középpontosan szimmetrikus. (A kiindulási példában használt négyzet és kör is megfelel ennek a feltételnek.) Nyilván nem megy az általánosság rovására, ha a kiindulási test – amelynek az eltoltjaival fedünk – szimmetriaközéppontjának az origót választjuk.

2. Fedés megadása beírt oktaéder és körülírt kocka segítségével

Az első módszer, melyet bemutatunk azon alapszik, hogy tetszőleges középpontosan szimmetrikus konvex testet tudunk „szendvicselni” egy oktaéder és egy paralelotóp közé. Lássuk, mik ezek a d-dimenziós testek!

Vegyünk $\mathbb{R}^d$-ben d darab olyan vektort – $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ –, amelyek nem esnek egy hipersíkba, tehát csak úgy lehet a számszorosaik összegeként a $\mathbf{0}$ vektort előállítani,

* A cikk az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

ha mindegyiknek a 0-szorosát vesszük. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ az $\mathbb{R}^d$ tér egy *bázisa.* A síkban például ilyen bázis két vektor, amelyek nincsenek egy egyenesen, a térben bázis három olyan vektor, amelyek nincsenek egy síkban. A bázisnak van egy fontos tulajdonsága: $\mathbb{R}^d$ minden $\mathbf{p}$ vektora előáll $\mathbf{p} = \lambda_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_d\mathbf{u}_d$ alakban valamely $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ skalárokra, ráadásul az előállítás egyértelmű.

Az $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ bázis segítségével meghatározunk két alakzatot. Egyrészt az

$$X(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d) = \operatorname{conv}\{\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, -\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_d, -\mathbf{u}_d\}$$

halmazt az általuk meghatározott *keresztpolitópnak* hívjuk, ahol a *conv* jelentése konvex burok, lásd [1]. Háromdimenziós térben például, ha az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ egységvektorokat vesszük, akkor éppen egy szabályos oktaédert kapunk.

Ugyanakkor egy bázis meghatároz egy másik objektumot is, amely pedig a paralelogramma d-dimenziós megfelelője, a *paralelotóp:*

$$P(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d) = \big\{\mu_1\mathbf{u}_1 + \mu_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \mu_d\mathbf{u}_d : \mu_1, \dots, \mu_d \in [-1, 1]\big\}.$$

Gondoljuk meg, hogy ez háromdimenzióban éppen egy paralelogramma alapú ferde hasáb. (Ezt három dimenzió esetén paralelepipedonnak is nevezik.)

Ugyancsak könnyen meggondolható, hogy az így megadott paralellotóp konvex, és az is, hogy középpontosan szimmetrikus, a szimmetria-középpontja pedig az origó.

Tetszőleges d dimenzióban azon hasáb d-dimenziós térfogata, mely alapjának $(d-1)$-dimenziós térfogata A, magassága pedig m:

$$Am.$$

Azon gúla d-dimenziós térfogata, mely alapjának $(d-1)$-dimenziós térfogata A, magassága pedig m:

$$\frac{1}{d}Am.$$

(Ezt a két térfogatképletet most nem igazoljuk, de látható, hogy a megfelelő háromdimenziós képletek általánosításai.)

1. feladat. *Egy K test térfogatát jelölje $\operatorname{vol}(K)$. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ bázisra*

$$\operatorname{vol}\big(X(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)\big) = \frac{1}{d!}\operatorname{vol}\big(P(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)\big).$$

1. tétel (Auerbach-bázis létezése). *Legyen K egy $\mathbb{R}^d$-beli origóra középpontosan szimmetrikus, korlátos, zárt, konvex halmaz. Ekkor van olyan bázisa $\mathbb{R}^d$-nek, amely által meghatározott keresztpolitóp K-ban van és amely által meghatározott paralelotóp tartalmazza K-t.*

A bizonyításhoz vegyük $\mathbb{R}^d$ egy olyan bázisát, amelynek minden vektora K-beli, és amelyre a $\operatorname{vol}\big(X(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)\big)$ térfogat maximális. Az, hogy ilyen bázis van, tehát hogy ez a maximum valóban felvétetik, igazolható abból, hogy K korlátos és zárt, de most ezt a bizonyítást sem részletezzük. Mivel K konvex, ezért $X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ benne van K-ban, hiszen minden konvex alakzat tartalmazza akárhány pontjának konvex burkát.

Be kell látnunk, hogy a $P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ paralelotóp tartalmazza K-t. Legyen $\mathbf{u} \in K$ egy tetszőleges pont. A bázis definíciójánál említettük, hogy minden vektor – így u is – egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}_1 + \ldots + \lambda_d\mathbf{u}_d$ alakban valamely $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \in \mathbb{R}$ skalárokra. Be kell látnunk, hogy minden i-re $\lambda_i \in [-1, 1]$. Rögzítsük mondjuk $i = 1$-et és tegyük fel, hogy $\lambda_1 > 0$. Az $X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ keresztpolitópot tekinthetjük egy kettős gúlának, melynek alapja a $(d-1)$-dimenziós $\operatorname{conv}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_d)$ keresztpolitóp, és két további csúcsa az $\mathbf{u}_1$ és $-\mathbf{u}_1$ pont. Ha a $\mathbf{u}_1$-hez tartozó gúla magassága m, akkor azon gúla magassága, melynek alapja szintén $\operatorname{conv} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_d$, de a további pontja $\mathbf{u}$, éppen $\lambda_1 m$. Persze K konvexitásából adódóan ez a gúla is K-beli, illetve az origóra vett tükrözöttjével együtt kapott kettős gúla is. Mivel a bázist úgy választottuk, hogy az általuk meghatározott keresztpolitóp maximális térfogatú legyen, ezért azt kapjuk, hogy $\lambda_1 \leqslant 1$.

Az origóra vett középpontos szimmetriát kihasználva hasonlóan belátható, hogy $\lambda_1 < 0$ esetén λ_1 nagyobb vagy egyenlő, mint -1, tehát $\lambda_1 \in [-1, 1]$, és ugyanez belátható a többi λ_i együtthatóról is. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk. $\square$

Célunk a következő belátása.

2. tétel. *Legyen K egy korlátos, zárt, konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, amely az origóra középpontosan szimmetrikus, tehát $K = -K$. Ekkor létezik $\mathbf{v}$ vektorok olyan $E \subset \mathbb{R}^d$ halmaza, amely vektorokkal rendre eltolva K-t a kapott alakzatok együtt fedik $\mathbb{R}^d$-t (formálisan $\bigcup\limits_{\mathbf{v}\in E} (K + \mathbf{v}) = \mathbb{R}^d$), és $\mathbb{R}^d$ egyik pontját se fedi több, mint $(d+1)^d$ ilyen alakú halmaz.*

Hogyan használjuk az 1. tételt a tér egy fedésének konstrukciójához?

2. feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ bázisra*

$$X(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) \supseteq \frac{1}{d} P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d).$$

Adott tehát a $K = -K$ korlátos, zárt, konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben. Vegyünk egy hozzá tartozó $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ Auerbach-bázist, tehát olyat, amely megfelel az 1. tétel feltételeinek. A 2. feladat szerint

$$\frac{1}{d} P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d) \subseteq K \subseteq P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d). \tag{1}$$

Csempézzük $\mathbb{R}^d$-t a kicsiny $\frac{1}{d}P(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d)$ paralelotóp eltoltjaival úgy, hogy az eltoltak e paralelotóp éleinek egész számszorosaival – vagyis az $1/d \cdot \mathbf{u}_i$-k páros számszorosaival – legyenek odébb. Így kitöltöttük az egész $\mathbb{R}^d$ teret ezekkel, és az eltolásvektoraink halmaza

$$E = \left\{ \frac{2i_1}{d}\mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{2i_d}{d}\mathbf{u}_d : i_1, \ldots, i_d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ekkor tehát az $\frac{1}{d}P(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d)+\mathbf{v}$ alakú halmazok, ahol $\mathbf{v}\in E$, fedik $\mathbb{R}^d$-t, így persze a $K+\mathbf{v}$ $(\mathbf{v}\in E)$ halmazok is. Kérdés, hogy egy tetszőleges $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^d$ pontot legfeljebb hányszor fednek az utóbbiak. Az (1) tartalmazásból adódóan $\mathbf{p}$-t legfeljebb annyi $K+\mathbf{v}$ halmaz tartalmazza, ahány $P(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d)+\mathbf{v}$ alakú halmaz.

3. feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^d$ pontra a $\mathbf{p}$ pontot tartalmazó $P(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d)+\mathbf{v}$ alakú halmazok száma, ahol $\mathbf{v}\in E$, legfeljebb $(d+1)^d$.*

Ha magunk akarjuk megoldani ezt a feladatot, még ne olvassunk tovább, segítség következik!

Segítség. Lássuk be, hogy $P(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d)+\mathbf{v}$ pontosan akkor tartalmazza $\mathbf{p}$-t, ha $\frac{d+1}{d}P(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d)+\mathbf{p}$ tartalmazza az $\frac{1}{d}P(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_d)+\mathbf{v}$ paralelotópot.

Ha megoldottuk ezt a feladatot, akkor a 2. tételt beláttuk. □

3. Második módszer: fél sugarú gömbök pakolása

Most bemutatunk egy egyszerű, de tanulságos módszert, amellyel ráadásul egy gazdaságosabb fedést kapunk.

3. tétel. *Legyen K egy korlátos, zárt, konvex halmaz $\mathbb{R}^d$-ben, amely az origóra középpontosan szimmetrikus, tehát $K=-K$. Ekkor létezik olyan $E\subset\mathbb{R}^d$ halmaz, amelyre a $K+\mathbf{v}$ alakú halmazok, ahol $\mathbf{v}\in E$, fedik $\mathbb{R}^d$-t (formálisan $\bigcup_{\mathbf{v}\in E}(K+\mathbf{v})=$ $=\mathbb{R}^d$), és $\mathbb{R}^d$ egyik pontját se fedi több, mint 3^d ilyen alakú halmaz. (Ez – $d>2$ esetén – nyilván „gazdaságosabb" fedést jelent, mint amilyet a 2. tétel ígér.)*

Először nézzük azt az esetet, amikor K az origó középpontú egység sugarú (tömör) gömb. Ekkor tetszőleges $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^d$ vektorra és $\lambda>0$ számra a $\lambda K+\mathbf{v}$ gömb éppen a $\mathbf{v}$-től legfeljebb λ távol lévő pontok halmaza. Egy $\mathbb{R}^d$-beli halmazt most hívjunk *tágasnak,* ha bármely két pontjának a távolsága legalább 1.

Most jön az ötlet: vegyünk egy *maximális tágas halmazt* $\mathbb{R}^d$-ben, tehát olyat, amely tágas, de amelyhez tetszőleges pontot hozzávéve már nem tágas halmazt kapunk. Intuitíve a következő módon látható be, hogy ilyen halmaz van. Veszünk egy tágas halmazt. Ha hozzávehető még pont úgy, hogy tágas maradjon, akkor hozzáveszünk egy ilyen pontot. Addig veszünk hozzá újabb pontokat, amíg már nem tudunk. Lehet, hogy végtelen sok lépésre lesz szükségünk, de ez nem baj, van időnk. (Igazából a végtelen sok lépést igénylő „bizonyításokat" nem szoktuk bizonyításnak tekinteni. De itt ez a gondolatmenet halmazelméleti eszközöket – például a Zorn-lemmát – használva korrektté tehető.) Van tehát egy maximális tágas halmazunk, jelölje E.

4. feladat. *Lássuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{v},\mathbf{w}\in E$ különböző pontokra az $\frac{1}{2}K+\mathbf{v}$ és az $\frac{1}{2}K+\mathbf{w}$ gömbök átfedés nélküliek, tehát a belsejeik diszjunktak.*

Most tekintsük a $K+\mathbf{v}$ alakú gömböket minden $\mathbf{v}\in E$ vektorra. Ezek a gömbök persze fedik $\mathbb{R}^d$-t, ami következik abból, hogy E maximális, hiszen ha lenne olyan pont, amit nem fednek, akkor az az E minden pontjánál 1-nél távolabb lenne, vagyis vele bővíthető lenne E, tehát E nem lenne maximális.

Legfeljebb hányszor van fedve egy pont? Legyen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ tetszőleges pont. Mely E-beli $\mathbf{v}$ vektorokra tartalmazza a $K + \mathbf{v}$ gömb $\mathbf{p}$-t? Éppen azon $\mathbf{v}$-kre, amelyek benne vannak a $\mathbf{p}$ középpontú $K + \mathbf{p}$ gömbben. Ha viszont valamely $\mathbf{v}$ vektor benne van a $K + \mathbf{p}$ gömbben, akkor a fél sugarú $\frac{1}{2}K + \mathbf{v}$ benne van a $\frac{3}{2}$ sugarú $\frac{3}{2}K + \mathbf{p}$ gömbben. Ugyanakkor tudjuk, hogy az E pontjai körüli fél sugarú gömbök átfedés nélküliek. Tehát $\mathbf{p}$-t legfeljebb annyi $K + \mathbf{v}$ alakban írható gömb fedi (ahol $\mathbf{v} \in E$), ahány átfedés nélküli $\frac{1}{2}$ sugarú gömb belefér egy $\frac{3}{2}$ sugarú gömbbe.

Hogy ez pontosan mennyi, azt általánosságban, tetszőleges d-dimenzióra megadni nehéz. De egy felső becslést könnyen tudunk adni a térfogatot használva. Ehhez csak azt kell tudni, hogy a d-dimenziós térfogat hogyan változik, ha a halmazt nagyítjuk. Tudható – bár itt most ezt sem bizonyítjuk –, hogy tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra és $H \subset \mathbb{R}^d$ korlátos, konvex halmazra ha H λ-szorosára változik – vagyis benne minden távolság λ-szoros lesz –, akkor a térfogata $|\lambda|^d$-szeres lesz, azaz

$$\operatorname{vol}(\lambda H) = |\lambda|^d \operatorname{vol}(H).$$

Ezt az azonosságot elfogadhatjuk azért is, mert hihető, hiszen a sík, illetve térbeli eset kiterjesztése, de azért is, mert egy kockára persze igaz, és konvex testek térfogatát kicsiny kockákra történő felbontás segítségével definiáljuk.

Innen már könnyen megkapjuk a kívánt becslést, kihasználva, hogy a p körüli $3/2$ sugarú gömbben nem lehet több $1/2$ sugarú gömböcske, mint ahányszoros a nagyobb gömb térfogata a kisebbének. Vagyis

$$\left(\frac{3}{2}K + \mathbf{p}\right)\text{-ben levő } \frac{1}{2}K + \mathbf{v} \text{ alakú gömbök száma, ahol } \mathbf{v} \in E \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{vol}\left(\frac{3}{2}K\right) \Big/ \operatorname{vol}\left(\frac{1}{2}K\right) = \frac{(3/2)^d \operatorname{vol}(K)}{(1/2)^d \operatorname{vol}(K)} = 3^d,$$

amivel a 3. tételt beláttuk, ha K az egységgömb.

A bizonyítás szó szerint megismételhető tetszőleges középpontosan szimmetrikus, korlátos, zárt, konvex K halmazra, egyetlen dolgot kell ehhez tenni, definiálni a tágas halmazt. Rögzítsük tehát K-t. Egy $E \subset \mathbb{R}^d$ halmazt *K-tágasnak* hívunk, ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ különböző pontokra az $\frac{1}{2}K + \mathbf{u}$ és az $\frac{1}{2}K + \mathbf{v}$ halmazok átfedés nélküliek, tehát a belsejeik diszjunktak. Az, hogy van maximális, tehát tovább nem bővíthető K-tágas halmaz $\mathbb{R}^d$-ben hasonló gondolatmenettel látható be, mint a gömbök esetén. És innentől a bizonyításban sehol nem használtuk, hogy K a gömb – ezt érdemes végiggondolni. □

Felmerül a kérdés, hogy ennél gazdaságosabb fedés adható-e. Erdős és Rogers [3, 4] belátták, hogy a 3. tételnél *sokkal gazdaságosabb* fedés is megadható tetszőleges K konvex test esetén: olyan, amelynél egyik pontot sem tartalmazza több, mint $3d \ln d$ eltoltja K-nak. Ha érdekel, miért van ez így, gyere matematikusnak, az egyetemen elmesélem.

Hivatkozások

[1] Naszódi M.: *Konvex testbe írható tetraéder d-dimenzióban,* KöMaL, 2022. május. `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`

[2] Naszódi M.: *Politópok és a gömb d-dimenzióban,* KöMaL, 2018. december. `http://db.komal.hu/KomalHU/`

[3] P. Erdős and C. A. Rogers, *Covering space with convex bodies,* Acta Arith., **7** (1961/1962), 281–285.

[4] C. A. Rogers: *A note on coverings,* Mathematika, **4** (1957), 1–6.

Naszódi Márton

Könyvajánló

Megjelent *Bártfai Pál: A háromszög* című gyűjteményes, összefoglaló művének elektronikus változata.

`https://www.bolyai.hu/files/Bartfai_Pal_A_haromszog.pdf`

A könyv a szerző és a Bolyai János Matematikai Társulat jóvoltából szabadon letölthető, másolható, terjeszthető.

A mű összegyűjtve tartalmazza a lényegesebb tudnivalókat a háromszögről, közismert és kevésbé ismert – helyenként kifejezetten meglepő – tételeket egyaránt. Az állításokat bizonyításokkal együtt közli, melyek között egyszerűbbek és több gondolkodást igénylőek egyaránt előfordulnak.

A könyv minden matematika iránt érdeklődőnek nyújthat érdekes újdonságokat, versenyre készülő diákok (és felkészítő tanáraik) számára pedig szinte kötelező olvasmánynak tekinthető. Részleteiben is felhasználható ismeretszerzési céllal, képlettárként, vagy bizonyítási technikák elsajátítására.

A tartalomból:

– A háromszögről általában
– Baricentrikus koordináták
– Derékszögű háromszög
– Pythagorasz-tétel
– Apollóniusz-kör
– Feuerbach-kör
– A szimmedián
– Erdős-Mordell egyenlőtlenség
– Dél Keresztje
– A háromszög Apollóniusz-körei
– A háromszög szögfelezői
– Ceva tétele
– Thalesz-tétel
– Gergonne-háromszög
– Euler-egyenes
– Napóleon tétele és a panoráma pont
– Simson-egyenes
– Brocard-pontok
– Izodinamikus pont
– Egyéb nevezetes pontok

Olvasásához, használatához sok sikert kívánunk!