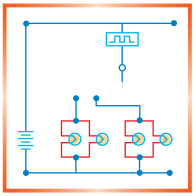


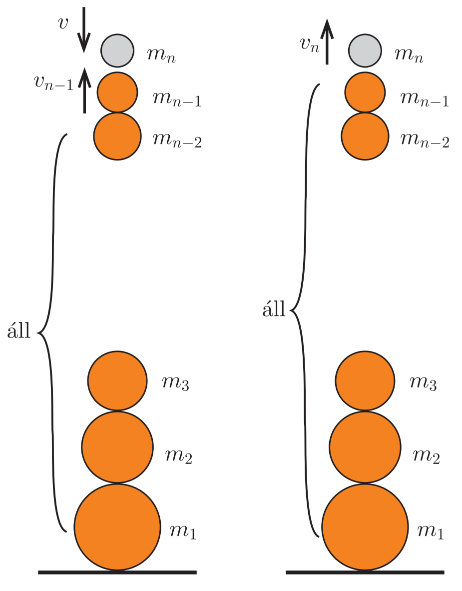
Fizika gyakorlatok megoldása

G. 791. *Zsonglőrködő elméleti fizikus a következő mutatványt találja ki. Egymás tetejére helyez n számú, tökéletesen rugalmas labdát, közöttük igen kicsiny résekkel. A labdatornyot kemény felületre ejti, ahová a labdák v sebességgel érkeznek meg. A sorozatos pillanatszerű ütközések után a legfelső labda kivételével minden lejjebb lévő labda megáll, a legfelső viszont nv sebességgel pattan fel. Bizonyítsuk be (például a teljes indukció módszerével), hogy ez a mutatvány akkor teljesülhet, ha a labdák tömege kielégíti a következő formulát:*

$$m_k = \frac{2m_0}{k(1+k)},$$

ahol m_0 a legalsó labda tömege, valamint $k = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n$.

(4 pont)



Megoldás. Ha alulról számolva az $(n-1)$-edik, m_{n-1} tömegű, felfelé v_{n-1} sebességgel haladó labda rugalmasan ütközik az m_n tömegű, lefelé v sebességgel mozgó labdával, és az ütközés után az alsó labda megáll (lásd az *ábrát*), a felső pedig v_n sebességgel kezd el mozogni felfelé, akkor a lendület- és az energiamegmaradás törvénye szerint fennáll:

$$m_{n-1}v_{n-1} - m_n v = m_n v_n,$$

tehát

$$\frac{m_{n-1}}{m_n} = \frac{v_n + v}{v_{n-1}}, \tag{1}$$

illetve

$$\frac{1}{2}m_{n-1}v_{n-1}^2 + \frac{1}{2}m_n v^2 = \frac{1}{2}m_n v_n,$$

tehát

$$\frac{m_{n-1}}{m_n} = \frac{v_n^2 - v^2}{v_{n-1}^2}. \tag{2}$$

A (2) egyenletet (1)-gyel elosztva kapjuk, hogy

$$(3) \qquad 1=\frac{v_n-v}{v_{n-1}}, \qquad v_n=v_{n-1}+v.$$

Mivel $v_1=v$, (3) szerint

$$v_2=2v,\ v_3=3v,\ \ldots,\ v_n=nv,$$

ahogy ez a feladat szövegében is szerepel.

A v_n sebességek ismeretében akár (1)-ből, akár (2)-ből kiszámíthatjuk, hogy

$$(4) \qquad m_n=\frac{n-1}{n+1}\,m_{n-1}.$$

Mivel $m_1=m_0$, $m_2=\frac{1}{3}\,m_0$, $v_3=\frac{2}{4}\,m_2=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\,m_0$, és általában

$$m_k=\frac{k-1}{\boldsymbol{k+1}}\,\frac{k-2}{\boldsymbol{k}}\,\frac{k-3}{k-1}\ldots\frac{5}{7}\,\frac{4}{6}\,\frac{3}{5}\,\frac{\mathbf{2}}{4}\,\frac{1}{3}\,\boldsymbol{m}_0.$$

Sorozatos egyszerűsítések után csak a vastagon szedett tényezők maradnak meg:

$$(5) \qquad m_k=\frac{2m_0}{k(k+1)},$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Az (5) formula érvényességét (4)-ből kiindulva a *teljes indukció* módszerével is beláthatjuk. Tudjuk, hogy $m_1=m_0$ és $m_2=\frac{1}{3}m_0$, tehát $k=1$-re (5) érvényes. De akkor (4) alapján $k+1$-re is érvényes, hiszen

$$\frac{k-1}{k+1}m_{k-1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{2m_0}{(k-1)k}=\frac{2m_0}{k(k+1)}=m_k.$$

Több dolgozat alapján

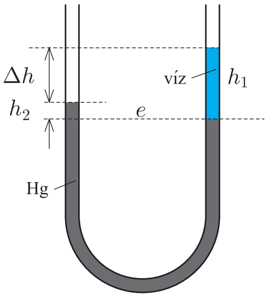
11 dolgozat érkezett. Helyes Antal Áron, Bencze Mátyás, Nagy Csenge, Sütő Áron, Tóth Hanga Katalin, Zhang Wenshuo Steve és Žigo Boglárka megoldása. Nem versenyszerű (nem a versenykiírásnak megfelelő formátumú) 4 dolgozat.

G. 794. U *alakú cső keresztmetszete* 1,5 cm^2. *A csőbe higanyt töltünk úgy, hogy az mindkét szárban elég magasan álljon. A cső egyik szárába a higanyra* 0,1 dl *vizet öntünk. Melyik szárban és mennyivel fog magasabban állni a folyadék felszíne?*

(*4 pont*)

Megoldás. Az $A=1{,}5\ \mathrm{cm}^2$ keresztmetszetű csőben lévő $V=0{,}1\ \mathrm{dl}=10\ \mathrm{cm}^3$ térfogatú vízoszlop magassága

$$h_1=\frac{V}{A}\approx 6{,}7\ \mathrm{cm}.$$



A higany és a víz nem keveredő folyadékok. Az egyensúly beálltával a cső két szárában a higany azonos magasságú pontjaiban, például az *ábrán* e-vel jelölt vízszintes vonal mentén a hidrosztatikai nyomások megegyeznek.

Jelöljük a higanyszintek magasságkülönbségét h_2-vel. Egyensúlyban a h_1 magas vízoszlop hidrosztatikai nyomása megegyezik a h_2 magas higanyoszlop hidrosztatikai nyomásával.

$$\varrho_{\text{víz}} g h_1 = \varrho_{\text{higany}} g h_2,$$

vagyis

$$h_2 = \frac{\varrho_{\text{víz}}}{\varrho_{\text{higany}}} h_1 = \frac{1}{13{,}6} \cdot 6{,}7\ \text{cm} \approx 0{,}5\ \text{cm}.$$

Ezek szerint a „vízes oldalon” fog magasabban állni a folyadék, és a szintkülönbség

$$\Delta h = h_1 - h_2 \approx 6{,}2\ \text{cm}.$$

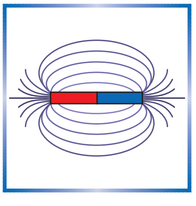
Medgyesi Júlia (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Kezdetben a cső mindkét szárában „elég magasan” áll a higany, emiatt nem fordulhat elő, hogy a betöltött víz részben vagy teljesen „átnyomja” a higanyt az egyik szárból a másikba.

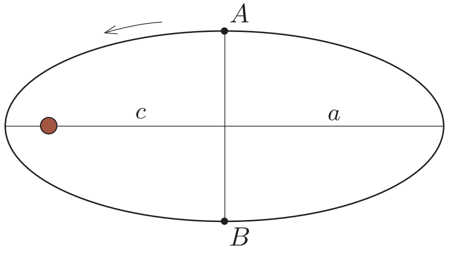
2. A számolás rész- és végeredményét 2 jegy pontossággal adtuk meg. Ennél sokkal pontosabb számításnak itt most nincs értelme, hiszen a kezdeti adatokat (a víz térfogatát és a cső keresztmetszetét) is csak 1–2 jegy pontosan ismerjük.

(*G. P.*)

39 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1, nem versenyszerű 6 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása



P. 5411. *A Föld körül egy műhold $c/a = e$ numerikus excentricitású ellipszispályán kering, keringési ideje T. Mennyi idő alatt ér a műhold az* ábrán *jelölt A pontból a B pontba?*

(*4 pont*)

Közli: *Szász Krisztián*, Budapest