Beszámoló a 2022. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2022. évi Eötvös-versenye október 14-én délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen[1] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 60 versenyző adott be dolgozatot, 21 egyetemista és 39 középiskolás.

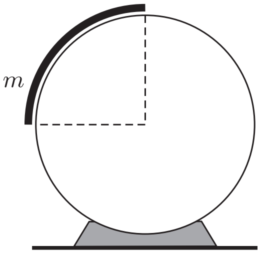
Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

❄

1. feladat. *Vízszintes tengelyű, rögzített hengerre egy vékony, hajlékony, m tömegű láncot helyezünk az ábrán látható módon, és nyugalomban tartjuk. A henger és a lánc közötti súrlódás elhanyagolható.*

a) Mekkora gyorsulással indul el a lánc, ha szabadon engedjük?

b) Mekkora a láncot feszítő erő legnagyobb értéke az elengedés utáni pillanatban?



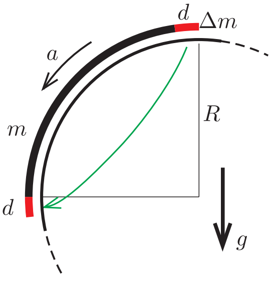
(*Gelencsér Jenő*)

Megoldás. *a*) Számítsuk ki a lánc gyorsulását az indulás pillanatában. Ezt többféle módszerrel is megtehetjük.

I. módszer. Ha a lánc a gyorsulással indul, akkor egy nagyon rövid t időtartam alatt az elmozdulása $d=\frac{a}{2}t^2$, a sebessége pedig $v=at$ lesz. Alkalmazzuk a mechanikai energiamegmaradás törvényét erre a mozgásra (*1. ábra*).

A lánc mozgási energiája (annak megváltozása)

$$\Delta E_{\text{mozgási}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ma^2t^2.$$



1. ábra

A helyzeti energia változását legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, hogy gondolatban levágunk a lánc felső végéről egy d hosszúságú darabot, és azt a lánc alsó

[1] Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`

végéhez „ragasztjuk”. Ennek a darabkának a tömege

$$\Delta m = \frac{m}{\frac{1}{2}R\pi}d,$$

és mivel R távolsággal mélyebbre kerül,

$$\Delta E_{\text{helyzeti}} = -\Delta m\, gR = -\frac{2mg}{\pi}d = -\frac{mg}{\pi}at^2.$$

Az energiamegmaradás tétele szerint

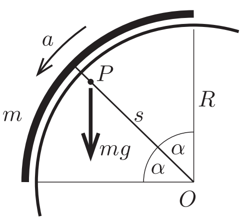
$$\Delta E_{\text{mozgási}} + \Delta E_{\text{helyzeti}} = 0,$$

ahonnan

$$\frac{1}{2}mat^2\left(a - \frac{2}{\pi}g\right) = 0.$$

Mivel $mat^2 \neq 0$, a keresett gyorsulás:

$$a = \frac{2}{\pi}g.$$



2. ábra

II. módszer. Ismert (vagy táblázatokban megtalálható), hogy az R sugarú, 2α nyílásszögű homogén körív P tömegközéppontja a kör O középponttól

$$s = \frac{\sin\alpha}{\alpha}R$$

távolságra van (*2. ábra*). Esetünkben $\alpha = \pi/4$, így

$$s = \frac{\sqrt{8}}{\pi}R \approx 0{,}9R.$$

Az éppen meginduló láncot tekinthetjük merev testnek, amelynek az O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = mR^2$. A láncra (merev testre) ható külső erők forgatónyomatéka csak a nehézségi erőből származik, nagysága

$$M = mgs\sin\frac{\pi}{4} = mgR\frac{\sqrt{8}}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi}mgR.$$

(A láncra hatnak még a henger által kifejtett, helyről helyre változó kényszererők is, ezen erők azonban – súrlódásmentes esetben – mindenhol sugárirányúak, tehát az O pontra vonatkoztatott forgatónyomatékuk nulla.)

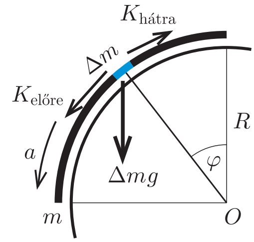
A forgómozgás alaptörvénye szerint a test szöggyorsulása

$$\beta = \frac{M}{\Theta} = \frac{2}{\pi}\frac{mgR}{mR^2} = \frac{2}{\pi}\frac{g}{R},$$

a lánc „kerületi” gyorsulása pedig

$$a = R\beta = \frac{2}{\pi}g.$$

b) A láncot feszítő K erő a lánc végeinél nulla, közöttük pedig valahol maximuma van. Ezt a helyet, valamint a maximális feszítőerő nagyságát keressük. A lánc egy-egy kicsiny, φ szöggel jellemezhető helyen lévő darabkájára ható nehézségi erő önmagában (éppen úgy, mint egy φ hajlásszögű lejtőn) $g\sin\varphi$ gyorsulást hozna létre, ami a lánc felső részén kisebb, az aljának közelében nagyobb, mint az egész lánc a gyorsulása (*3. ábra*).



3. ábra

Emiatt a felső részeken a láncszemekre ható feszítőerők különbsége általában nullától különböző, hiszen egy Δm tömegű, kicsiny lánc-darabka mozgásegyenlete

$$K_{\text{előre}} - K_{\text{hátra}} + \Delta m\, g\sin\varphi = \Delta m\, a = \Delta m\, g\frac{2}{\pi},$$

vagyis

$$K_{\text{előre}} = K_{\text{hátra}} + \Delta m\cdot g\left(\frac{2}{\pi} - \sin\varphi\right).$$

Látható, hogy a lánc felső végétől ($\varphi = 0$ helytől) elindulva mindaddig, amíg

$$\sin\varphi < \frac{2}{\pi}, \quad \text{addig} \quad K_{\text{előre}} > K_{\text{hátra}},$$

vagyis a $K(\varphi)$ kényszererő (a láncot feszítő erő) φ növekvő függvénye. Ha viszont

$$\sin\varphi > \frac{2}{\pi}, \quad \text{akkor} \quad K_{\text{előre}} < K_{\text{hátra}},$$

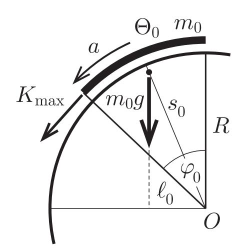
tehát ebben a tartományban a $K(\varphi)$ kényszererő φ csökkenő függvénye. Ezek szerint a kényszererő

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{2}{\pi} \approx 0{,}69 \text{ radián} \approx 39{,}5^\circ$$

szögnél a legnagyobb. Itt

$$K_{\text{előre}} = K_{\text{hátra}} = K_{\max}.$$

Kérdés, hogy mekkora $K_{\max}$ értéke. Ezt a lánc felső ($\varphi \leqslant \varphi_0$ szögekkel jellemzett) darabjának forgási mozgásegyenletéből kaphatjuk meg (*4. ábra*).



4. ábra

A kérdéses láncdarab tömege

$$m_0 = \frac{m}{\frac{1}{2}\pi}\varphi_0,$$

a tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_0 = m_0 R^2,$$

tömegközéppontjának az O ponttól mért távolsága

$$s_0 = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right)}{\frac{1}{2}\varphi_0} R,$$

és a tömegközéppont távolsága az O ponton átmenő függőleges egyenestől

$$\ell_0 = s_0 \sin\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right).$$

A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$K_{\max} R + m_0 g \ell_0 = \Theta_0 \frac{a}{R},$$

ahonnan a fentebb kiszámított értékek behelyettesítése után kapjuk, hogy

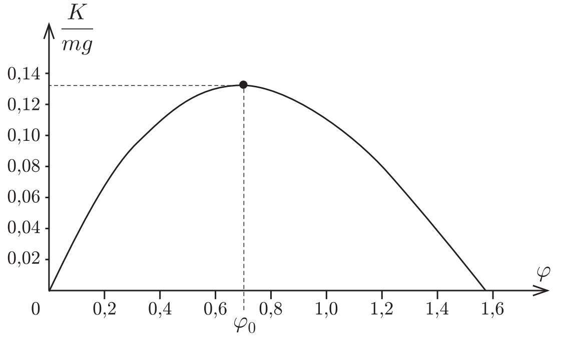
$$K_{\max} = mg\left(\frac{4}{\pi^2}\varphi_0 - \frac{4}{\pi}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right) \approx 0{,}13\, mg.$$

Ugyanezt az eredményt megkaphatjuk a munkatételből is, ha felírjuk, hogy egy nagyon rövid időtartam alatt a nehézségi erő munkájának és a K kényszererő munkájának összege a kezdetben álló láncdarab mozgási energiájával lesz egyenlő.

A láncot feszítő erőt a fentiek mintájára tetszőleges pontban (tetszőleges φ szögre) kiszámíthatjuk:

$$K(\varphi) = mg\left(\frac{4}{\pi^2}\varphi - \frac{4}{\pi}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

és ábrázolhatjuk is (*5. ábra*).



5. ábra

2. feladat. *Egy téglatest alakú gáztartályt egy kétrétegű, finom szövésű fémháló oszt két részre; a két térrész térfogatának aránya* $1:2$. *A fémháló két rétege a közöttük lévő, igen keskeny rés miatt nem ér össze. A tartályban egyszeresen pozitív töltésű ionokból álló gáz található. A hőmérsékletet mindkét térrészben állandó,* 1200 K *értéken tartjuk. Milyen polaritású és mekkora egyenfeszültséget kell* *kapcsolni a fémháló rétegei közé ahhoz, hogy hosszú idő után a két térrészben található ionok száma megegyezzen? (A gáz elég ritka ahhoz, hogy a részecskék közötti kölcsönhatás elhanyagolható legyen, az átlagos szabad úthossz pedig jóval nagyobb a fémháló rétegeinek távolságánál. Az ionok töltése állandó.)*

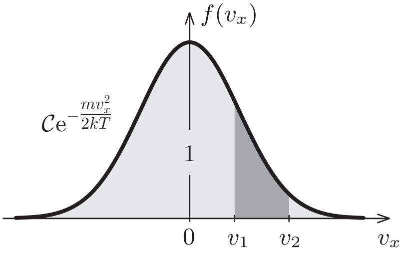
(*Vigh Máté*)

I. megoldás. Ez a gondolatmenet a kinetikus gázelméleten alapul. Elöljáróban összefoglalunk néhány fontosabb tudnivalót, amit a megoldás során fel fogunk használni[2].

Ismert, hogy adott T hőmérsékletű gázban a részecskék sebességének egy adott (például x) irányba eső vetülete nem mutat egyenletes eloszlást: kisebb sebességértékek előfordulása gyakoribb, míg a nagy értékek kevésbé valószínűek. Ezt az előfordulási gyakoriságot az $f(v_x)$ Maxwell–Boltzmann-féle eloszlásfüggvénnyel lehet jellemezni, amely megadja, hogy a részecskék mekkora hányada rendelkezik egy adott $(v_x, v_x + \mathrm{d}v_x)$ intervallumba eső sebességkomponenssel:

$$\frac{\text{a } (v_x, v_x + \mathrm{d}v_x) \text{ tartománynak megfelelő részecskék száma}}{\text{összes részecske száma}} = f(v_x)\mathrm{d}v_x.$$

Ebből a meghatározásból következik, hogy az $f(v_x)$ függvény görbe alatti területe *tetszőleges* (tehát nem csak infinitezimálisan kicsiny) sebességintervallumon megadja az abba a tartományba eső részecskék számának arányát a teljes részecskeszámhoz viszonyítva (lásd a *6. ábrát*). Ennek értelmében az $f(v_x)$ eloszlásfüggvény teljes görbe alatti területe szükségszerűen 1 (más szóval a függvény normált).



6. ábra

Az $f(v_x)$ függvény alakját egy $\mathcal{C}$ normálási tényező erejéig az x irányú mozgáshoz tartozó $mv_x^2/2$ energia határozza meg a Boltzmann-faktor alapján:

$$f(v_x) = \mathcal{C}\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}},$$

amelyet *normáleloszlásnak* vagy *Gauss-eloszlásnak* neveznek.

Ezután térjünk rá a konkrét feladat megoldására. A koordináta-rendszerünk x tengelyét válasszuk a fémháló síkjára merőlegesen, a kisebb térrész felől a nagyobb felé mutató irányban. A kisebb térrészre vonatkozó fizikai mennyiségeket jelöljük 1-es indexszel, míg a nagyobb térrészhez tartozó mennyiségeket 2-es indexszel.

Ha a fémháló két rétege közé nem kapcsolunk feszültséget, a gáz egyenletesen tölti ki az egész tartályt, azaz a két térrészben a részecskeszám-sűrűség (n) megegyezik, az ionok számának aránya pedig a térfogatok arányával egyezik meg. A kívánt végállapotban azonban a két térrész részecskeszáma egyenlő, így a részecskeszám-sűrűségek viszonya:

$$n_1 = 2n_2.$$

[2] Az Eötvös-versenyen bármely nyomtatott szakirodalom szabadon használható.

Ez az inhomogén elrendeződés olyan polaritású elektromos térrel tartható fenn, amelyben a térerősség akadályozza a pozitív töltésű ionok áramlását a kisebb térrészből a nagyobb térrész irányába. A síkkondenzátornak tekinthető fémhálónak tehát a kisebb térrész felőli oldala lesz negatív töltésű, a nagyobb térrész felé eső oldala pedig pozitív polaritású.

A feladat szövege szerint a részecskék átlagos szabad úthossza jóval nagyobb a fémháló rétegeinek távolságánál, ezért a „kondenzátor" belsejében az ionok egymással nem (pontosabban elhanyagolhatóan kis eséllyel) ütköznek, kizárólag az itt uralkodó elektromos mező hatása alatt állnak. A nagyobb térrészből a fémháló rétegei közé belépő ionok az elektromos tér hatására felgyorsulnak, majd a kisebb térrészbe érve az ott lévő részecskékkel ütközve termalizálódnak. Ebben az irányban tehát az ionok akadály nélkül áthaladnak a hálón. A kisebb térrész felől belépő ionok azonban csak akkor tudnak áthaladni a fémhálón, ha az x irányú sebességkomponensük nagyobb egy bizonyos v^* értéknél, ellenkező esetben az elektromos tér visszafordítja őket. Az ilyen irányú áthaladáshoz szükséges határsebességet a munkatételből kaphatjuk meg:

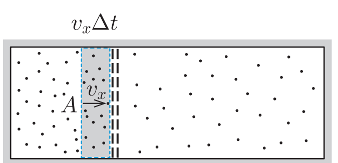
$$-eU = 0 - \frac{1}{2}mv^{*2} \quad \longrightarrow \quad v^* = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$

ahol e az elemi töltés, U pedig a fémhálóra kapcsolt feszültség. Itt is igaz, hogy a $v_x > v^*$ feltételt teljesítő ionok a nagyobb térrészbe érve termalizálódnak. Hogy pontosan mekkora az a v^* sebesség (és mekkora az ehhez tartozó U feszültség), amelynél a két térfélben a részecskék száma azonos marad, azt vizsgáljuk meg részletesebben!

Tekintsük a kisebb térrészben lévő részecskék közül azokat, melyeknek x irányú sebességkomponense a rács felé mutat és a $(v_x, v_x + \mathrm{d}v_x)$ tartományba esik. Ezek az ionok az eloszlásfüggvény definíciója alapján $n_1 f(v_x)\,\mathrm{d}v_x$ térfogati sűrűségben helyezkednek el a kisebb térrészben. Kicsiny Δt időtartam alatt a részecskék ezen csoportjából csak azok az ionok érnek el a fémhálóig, melyek legfeljebb $v_x\Delta t$ távolságra vannak attól. A fémháló teljes A területére tehát Δt idő alatt a megadott sebességtartományban

$$n_1 f(v_x)\mathrm{d}v_x \cdot A v_x \Delta t$$

számú ion érkezik be a kisebbik térrész felől. A fémhálóra kapcsolt feszültség miatt csak a $v_x > v^*$ feltételt teljesítő részecskék jutnak át a nagyobb térrészbe (*7. ábra*), ezért az átjutó ionok számát a sebesség szerinti integrálként a következőképp fejezhetjük ki:



7. ábra

$$\Delta N_1 = \int_{v^*}^{\infty} n_1 f(v_x) \cdot A v_x \Delta t \, \mathrm{d}v_x.$$

Ha ezt a mennyiséget elosztjuk az A területtel és a Δt időtartammal, akkor megkapjuk a kisebb térrészből a nagyobb térrészbe belépő részecskeáram-sűrűséget:

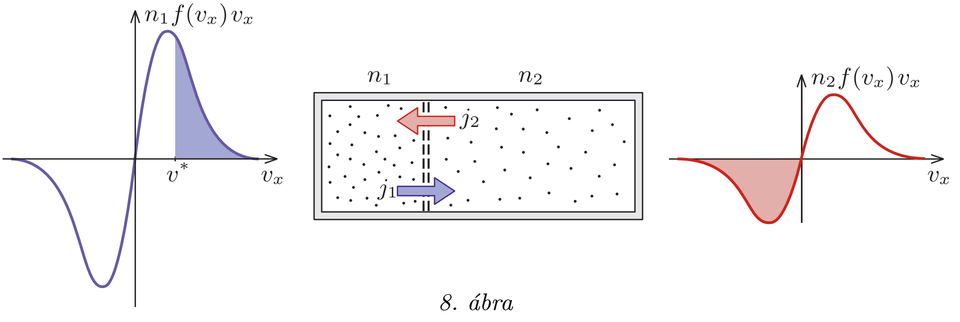
$$j_1 = \frac{\Delta N_1}{A\Delta t} = n_1 \int\limits_{v^*}^{\infty} f(v_x) v_x \,\mathrm{d}v_x.$$

Teljesen hasonlóan számolhatjuk ki a nagyobb térrészből a kisebbe átlépő részecskék áramsűrűségét, azzal a különbséggel, hogy ilyen irányban minden olyan részecske átjut a fémhálón, amelynek x irányú sebességkomponense negatív:

$$j_2 = n_2 \int\limits_{-\infty}^{0} f(v_x) v_x \,\mathrm{d}v_x.$$

Látható, hogy j_2 negatív, hiszen a negatív x tengely irányába történő részecskeáramlást ír le. Állandósult állapotban (lásd a *8. ábrát*) a nagyobb térrészbe belépő és onnan kilépő részecskék áramsűrűségének előjeles összege zérus:

$$j_1 + j_2 = 0.$$



8. ábra

Felhasználva $f(v_x)$ korábban felírt alakját:

$$n_1 \int\limits_{v^*}^{\infty} \mathcal{C}\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} v_x \,\mathrm{d}v_x + n_2 \int\limits_{-\infty}^{0} \mathcal{C}\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} v_x \,\mathrm{d}v_x = 0.$$

Az integrálok kiszámításához érdemes áttérni a $w = mv_x^2/(2kT)$ változóra. Ennek segítségével

$$\mathrm{d}w = \frac{m}{kT} v_x \,\mathrm{d}v_x,$$

így a fenti egyenlet egyszerűsítések és az integrálási határok megváltoztatása után így írható:

$$n_1 \int\limits_{\frac{eU}{kT}}^{\infty} \mathrm{e}^{-w} \mathrm{d}w + n_2 \int\limits_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{-w} \mathrm{d}w = 0.$$

Az integrálokat most már elvégezhetjük:

$$n_1[-\mathrm{e}^{-w}]_{\frac{eU}{kT}}^{\infty} + n_2[-\mathrm{e}^{-w}]_{\infty}^{0} = 0.$$

A primitív függvényeket a határokon kiértékelve kapjuk:

$$n_1\mathrm{e}^{-\frac{eU}{kT}} - n_2 = 0,$$

ahonnan a keresett U feszültség:

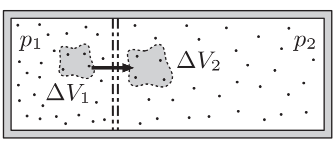
$$U = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{kT}{e}\ln 2 \approx 72\ \mathrm{mV}.$$

Megjegyzés. Voltak versenyzők, akik a fizikai jelenséget részletesen átlátták, az áramsűrűségekre felírt integrálokat azonban nem számolták ki, ehelyett észszerű becsléseket végeztek. A Versenybizottság ezeket a közelítéseket is értékelte.

II. megoldás. Az állandósult állapot kialakulása után a kisebb térrészben kétszer akkora lesz a nyomás, mint a nagyobb térrészben, hiszen a hőmérséklet és részecskeszám ugyanakkora, a térfogatok aránya viszont 1 : 2:

$$p_1 = 2p_2.$$

Végezzük el a következő gondolatkísérletet. A kisebb térrészben vegyünk körbe ΔN számú iont egy könnyű ballonnal, ahol ΔN sokkal kisebb a teljes gázmennyiség részecskeszámánál. Jelölje a ballon kezdeti térfogatát ΔV_1. Vigyük át gondolatban ezt a ballont a másik térrészbe, majd engedjük ott izotermikusan kitágulni akkora ΔV_2 térfogatig, amedig a bezárt gáz nyomása p_1 értékről p_2-re csökken (*9. ábra*). Számítsuk ki, mekkora munkát kell végeznünk a folyamat közben!



9. ábra

Amikor a ΔV_1 térfogatú ballont a kisebb térrészből eltávolítjuk, a térrészben lévő p_1 nyomású gáz igyekszik a ballont „kilökni” onnan. Ennek megakadályozására nekünk negatív,

$$W_1 = -p_1\Delta V_1$$

munkát kell végeznünk. Ezután a fémháló elektromos mezőjén a térerősséggel ellentétes irányban kell elmozdítani az $e\Delta N$ össztöltésű gázmennyiséget, ez további

$$W_2 = e\Delta N \cdot U$$

munkát igényel. Amikor a ballont izotermikusan kitágítjuk a végső ΔV_2 térfogatra, az általunk végzett munka negatív, értéke

$$W_3 = -\Delta N kT \ln\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1}.$$

Nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy a nagyobb térrészben ΔV_2 térfogatú helyet kell szorítani az oda átvitt gázmennyiségnek, ehhez

$$W_4 = p_2 \Delta V_2$$

munka szükséges. A képzeletbeli folyamat során tehát összesen

$$W_{\text{teljes}} = -p_1 \Delta V_1 + e\Delta N \cdot U - \Delta N kT \ln \frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} + p_2 \Delta V_2$$

munkát végeztünk. Vegyük észre, hogy az első és az utolsó tag kiejti egymást, hiszen az ideális gázok állapotegyenlete szerint

$$p_1 \Delta V_1 = \Delta N kT, \qquad p_2 \Delta V_2 = \Delta N kT.$$

Szintén ebből következik, hogy a ballon végső és kezdeti térfogatának aránya kifejezhető a nyomások arányával:

$$\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

A teljes munkavégzés tehát így írható:

$$W_{\text{teljes}} = e\Delta N \cdot U - \Delta N kT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Ha ez a munka negatív lenne, akkor a folyamat magától végbemenne, azaz a kis gázmennyiség átjutna a kisebb térrészből a nagyobb térrészbe. Ellenkező esetben, ha a munka előjele pozitív lenne, a folyamat az ellentétes irányban menne végbe spontán módon. Mivel stacionárius állapotban egyik sem történik meg, W_{teljes} szükségképpen zérus:

$$e\Delta N \cdot U - \Delta N kT \ln \frac{p_1}{p_2} = 0.$$

A mozgatott gázmennyiség ΔN részecskeszámával leoszthatunk, majd közvetlenül megkapjuk az

$$U = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \frac{kT}{e} \ln 2$$

eredményt, amely megegyezik az I. megoldás eredményével.

III. megoldás. Vegyük észre, hogy a megoldás, amit kaptunk, átrendezhető a következő alakba:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1} = \mathrm{e}^{-\frac{eU}{kT}} = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{kT}},$$

ahol ΔE a két térrész közötti (elektrosztatikus) potenciális energia különbsége. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha átrendezzük a jól ismert „barometrikus magasságformula” képletét:

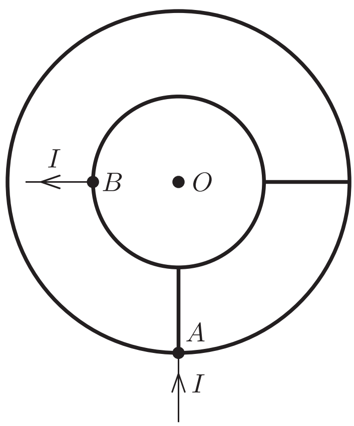
$$\frac{p_2}{p_1} = \mathrm{e}^{-\frac{\varrho g \Delta h}{p_1}} = \mathrm{e}^{-\frac{mg\Delta h}{kT}} = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{kT}},$$

ahol ϱ a gáz sűrűsége, g a nehézségi gyorsulás, Δh a magasságkülönbség, m a részecskék tömege, és ΔE itt is a két helyzet közötti (gravitációs) potenciális energia különbsége.

Ha nem a „nagy szabad úthossz” közelítését vizsgálnánk, a két fémháló között a nyomás ugyanúgy változna, mint a „barometrikus magasságformula” izotermikus légoszlopában. Az mg nehézségi erő helyére az eE elektromos erő kerülne.

Mindkét esetben megjelenik az $\mathrm{e}^{-\frac{\Delta E}{kT}}$ Boltzmann-tényező. Ennek magyarázata az, hogy a gázrészecskéket energetikai szempontból jellemző (v_x, v_y, v_z) sebességkomponensek mellett a feladatbeli rendszerben megjelenik még egy „szabadsági fok” is: az, hogy a részecske melyik térfélben helyezkedik el. A nagyobb (2-es számú) térrészben az ionok potenciális energiája $\Delta E = eU$ értékkel magasabb, mint a kisebb (1-es számú) térrészben, ezért az ionok megtalálási valószínűség-sűrűségének (vagy az azzal arányos részecskesűrűségek) aránya $\mathrm{e}^{-\frac{eU}{kT}}$.

Ezzel a gondolatmenettel a megoldás – megfelelő indoklással – egyetlen sorban megkapható.



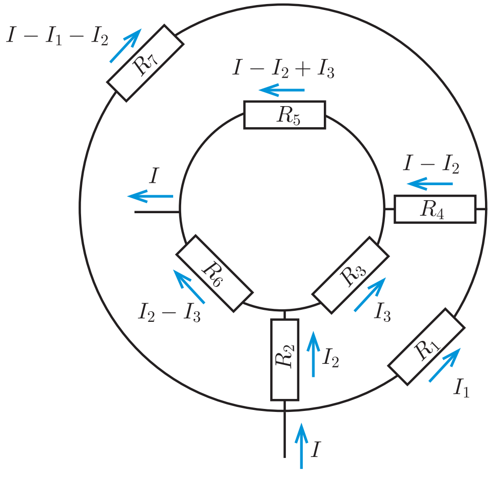
3. feladat. *Egyenletes vastagságú ellenálláshuzalból r és $2r$ sugarú karikákat készítünk, és azokat egy síkban, koncentrikusan helyezzük el. A karikákat két helyen, ugyanabból az ellenálláshuzalból készült, sugárirányú „küllőkkel” kötjük össze, az ábrán látható módon. Az elrendezés A pontjánál (sugárirányban) I erősségű áramot vezetünk be, a B pontjából pedig (szintén sugárirányban) elvezetjük azt. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a karikák O középpontjában?*

(*Cserti József*)

I. megoldás. A feladat megoldása során először a Kirchhoff-törvények segítségével meghatározzuk az egyes vezetékekben folyó áramokat, majd kiszámoljuk az ezek által keltett mágneses teret a karikák közös O középpontjában.

Jelölje R az r hosszúságú vezetékdarab ellenállását! Így az egyes körívek, illetve a küllők ellenállása, az ábrán megadott jelöléseket használva, az alábbiak szerint adódik: $R_1 = \pi R$, $R_2 = R_4 = R$, $R_3 = R_6 = \frac{\pi}{2} R$, $R_5 = \pi R$, $R_7 = 3\pi R$.

Az A pontban bevezetünk, a B pontban kivezetünk I áramot. Az egyes vezetékdarabokon folyó áramokat a *10. ábra* alapján vesszük fel, ahol már kielégítettük a Kirchhoff-féle csomóponti törvényeket, azaz bármely csomópontra a bemenő és kimenő áramok összege megegyezik. Láthatjuk, hogy összesen három ismeretlen paraméterünk van: I_1, I_2 és I_3, melyeket a huroktörvényekből határozhatunk meg. Írjuk fel a huroktörvényeket a külső karikára, a belső karikára, valamint a jobb alsó



10. ábra

negyed körgyűrű határára:

$$(1) \qquad R_1I_1 - R_7(I - I_1 - I_2) = 0 \quad \to \quad \pi R\big[I_1 - 3(I - I_1 - I_2)\big] = 0,$$

$$R_3I_3 + R_5(I - I_2 + I_3) - R_6(I_2 - I_3) = 0,$$

amiből

$$(2) \qquad \frac{\pi R}{2}\big[I_3 + 2(I - I_2 + I_3) - (I_2 - I_3)\big] = 0,$$

adódik, és végül

$$(3) \qquad R_2I_2 + R_3I_3 - R_4(I - I_2) - R_1I_1 = R\left[I_2 + \frac{\pi}{2}I_3 - (I - I_2) - \pi I_1\right] = 0.$$

Az ismeretlen paraméterek (I_1, I_2 és I_3) egy háromismeretlenes, lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódnak. Tényleg szükség van ezek kiszámolására? Próbáljuk megoldani a feladatot enélkül!

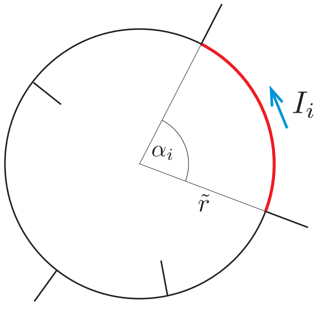
A sugárirányú bevezetések, kivezetések és küllők a Biot–Savart törvény értelmében nem adnak járulékot a középpontban mért mágneses tér értékéhez. A mágneses indukció nagysága egy r sugarú, I áramjárta körvezető középpontjában $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{r}$. Ha csak egy α középponti szöggel leírható körív járulékát tekintjük a középpontban, az $B = \frac{\mu_0\alpha}{4\pi}\frac{I}{r}$ alakban adódik. Ezek alapján már kiszámíthatjuk a külső, majd a belső karika által keltett mágneses teret. A külső karika esetén:

$$B = \frac{\mu_0}{8}\frac{I_1}{2r} - \frac{3\mu_0}{8}\frac{I - I_1 - I_2}{2r} = \frac{\mu_0}{16r}\big[I_1 - 3(I - I_1 - I_2)\big] = 0,$$

azaz a mágneses indukció értéke nulla a középpontban. A levezetés utolsó lépésében felhasználtuk az (1) egyenletet. A belső karika esetében:

$$B = \frac{\mu_0}{8}\frac{I_3}{r} + \frac{2\mu_0}{8}\frac{I - I_2 + I_3}{r} - \frac{\mu_0}{8}\frac{I_2 - I_3}{r} = \frac{\mu_0}{8r}\left[I_3 + 2(I - I_2 + I_3) - (I_2 - I_3)\right] = 0,$$

itt is nullának adódik a mágneses indukció nagysága. Az utolsó lépésben a (2) egyenletet használtuk fel. Összegezve, a teljes rendszer esetében is nulla a mágneses indukcióvektor a középpontban. Mi a mélyebb fizikai oka ennek az eredménynek? Nézzük át a probléma általánosított megoldását!



11. ábra

II. (általános) megoldás. A felrajzolt *11. ábra* csak sugárirányú küllőkből és koncentrikus karikákból áll. A sugárirányú szakaszok által keltett mágneses tér a középpontban nulla. Tekintsünk egy $\tilde{r}$ sugarú karikát, melyet a befutó sugárirányú vezetékek körívekre bontanak. Az i. körív középponti szöge legyen α_i, hossza ℓ_i, rajta átfolyó áram I_i, ellenállása R_i, ezen ellenálláson eső feszültség U_i.

Az i. körív által keltett mágneses tér a középpontban

$$B_i = \frac{\mu_0 \alpha_i}{4\pi}\frac{I_i}{\tilde{r}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ell_i I_i}{\tilde{r}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{r R_i I_i}{R\tilde{r}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{r U_i}{R\tilde{r}^2},$$

ami arányos a köríven eső feszültséggel. Összegezve az összes körív járulékát:

$$B = \sum_i B_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{r}{R\tilde{r}^2}\sum_i U_i = 0.$$

A huroktörvény alapján a feszültségesések összege a zárt karikára nulla, így a karika által keltett mágneses tér is nulla a középpontban. Az általános megoldás alapján akárhány koncentrikus kör és sugárirányú vezetékből összeállított elrendezés esetén nulla a mágneses tér a középpontban.

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2022. november 25-én délután került sor az ELTE TTK Konferenciatermében. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. A 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Egri Győző, Koncz Imre* és *Várkonyi Péter* jöttek el – ők pár mondatban beszéltek a pályafutásukról.

Ezután következett a 2022. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Gnädig Péter,* a 2. feladatét *Vankó Péter,* a 3. feladatét *Széchenyi Gábor* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Mindhárom feladat helyes megoldásáért *első díjat* nyert **Kovács Balázs Csaba,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Hatvani Bajza József Gimnáziumban érettségizett *Maruzsiné Sevella Judit* tanítványaként.

Az első feladat helyes, valamint a második és harmadik feladat lényegében helyes megoldásáért *második díjat* nyert **Kincses Ábel,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a Deák téri Evangélikus Gimnáziumban érettségizett *Horváth Gabriella és Szőkéné Mezősi Tímea* tanítványaként.

Az első és a harmadik feladat helyes megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Gurzó József,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett *Nagy Piroska Mária* tanítványaként.

A harmadik feladat helyes, valamint az első vagy a második feladat lényegében helyes megoldásáért *kiemelt dicséretet* kapott **Bognár András Károly,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Nagy Piroska Mária tanítványa; **Csonka Illés,** a Ciszteri Rend Nagy Lajos Gimnáziuma 11. osztályos tanulója, *Jéhn János és Pálfalvi László* tanítványa; valamint **Hajós Balázs,** az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Gyertyán Attila* tanítványa.

Az első vagy a harmadik feladat helyes, vagy a második feladat lényegében helyes megoldásáért *dicséretet* kapott **Bencz Benedek,** a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthon 10. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa; **Blázsik Árpád,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Békásmegyeri Veres Péter Gimnáziumban érettségizett *Rakovszki Andorás* és *Székely György* tanítványaként; **Gábriel Tamás,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Nagy Piroska Mária tanítványa; **Halász Henrik Kristóf,** a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Gutai Árpád* és *Csányi Sándor* tanítványa; **Horváth Ákos Zsolt,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a Kempelen Farkas Gimnáziumban érettségizett *Bakosné Novák Andrea* és *Horváth Eszter* tanítványaként; **Kohut Márk Balázs,** a Kecskeméti Katona József Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Sáróné Jéga-Szabó Irén* tanítványa, **Köpenczei Csanád,** a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Wiandt Péter* tanítványa; **Molnár Barnabás,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Nagy Piroska Mária tanítványa; **Molnár-Szabó Vilmos,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, Nagy Piroska Mária tanítványa; **Schäffer Donát,** a Pécsi Janus Pannonius Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Lehőcz Mária* és *Lányi Veronika* tanítványa; valamint **Toronyi András,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthonban érettségizett Horváth Norbert tanítványaként.

Az első díjjal a verseny plakettjén kívül az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* és a *Nanorobot Vagyonkezelő Kft.* adományából 80 ezer forint, a második díjjal 65 ezer, a harmadik díjjal 50 ezer, a kiemelt dicsérettel 30 ezer, a dicsérettel 15 ezer forint pénzjutalom járt. A díjazottak tanárai könyveket kaptak az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ajándékaként. Köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Gnädig Péter, Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté