Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1756. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$4 \cdot \cos\left(\pi \cdot \sin(\pi \cdot x)\right) = -5x^2 + 15x - \frac{61}{4}$$

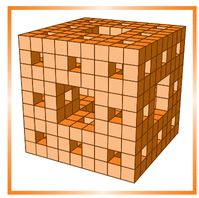
egyenletet.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1757. Jánoska egy négyzet alakú szőnyegen próbálja ki azt az új robotot, amelyet karácsonyra kapott. A négyzet oldalainak hossza 4 méter, csúcsai pedig rendre az A, B, C és D pontok. Legyen a P pont az $ABCD$ négyzet azon belső pontja, amely az AB és a BC oldaltól egyaránt 1 méter távolságra van. A P pontban álló robot egy véletlenszerűen kiválasztott irányban egyenesen elindul és 2 méterre eltávolodik a P ponttól, majd megáll. Mekkora a valószínűsége, hogy ekkor a robot a szőnyegen kívül van?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

Beküldési határidő: 2023. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5294–5301.)

B. 5294. A hegyesszögű ABC háromszög két magasságvonala AT_A és BT_B. Az AB oldal felezőpontja F, míg T_AT_B felezőpontja G. Bizonyítsuk be, hogy FG merőleges T_AT_B-re.

(*3 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5295. Adjuk meg a legnagyobb olyan k egész számot, amelyre 1722-t k-val elosztva a maradék $2m$, míg 2179-et k-val elosztva a maradék $3m$ (alkalmas $0 \leqslant m < k/3$ természetes számra).

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

B. 5296. Hány különböző lépéssorozattal juthat el egy bástya a 8×8-as sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarkába, ha felváltva lép jobbra és felfelé, továbbá először jobbra lép és utoljára felfelé?

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5297. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 2CBA\sphericalangle$. Legyenek A', B', C' rendre az CA, AB és BC oldalak olyan belső pontjai, amelyekre az $A'B'C'$ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Mutassuk meg, hogy a BAC és a $B'A'C'$ szögek felezői a $B'C'$ szakaszon metszik egymást.

(*4 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

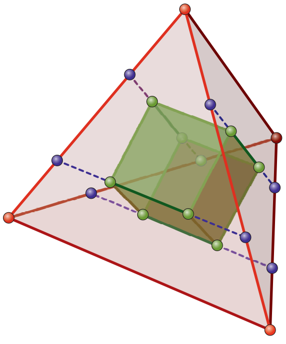
B. 5298. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$y + yx^2 - 2x = 0,$$
$$z + zy^2 - 2y = 0,$$
$$x + xz^2 - 2z = 0.$$

(*5 pont*) (*Amerikai feladat*)

B. 5299. A számegyenes $1, 2, 3$ pontjában egy-egy bolha ül. Ha egy bolha az a pontban, míg egy másik bolha a b pontban van, akkor az a-ban levő bolha átugorhat a $2b - a$ pontba. Előfordulhat-e véges sok ilyen ugrást követően, hogy a bolhák a $2^{100}, 3^{100}, 2^{100} + 3^{100}$ pontokban vannak?

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)



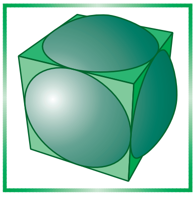
B. 5300. Legyen T egységnyi élhosszúságú szabályos tetraéder. Írjunk T-be egy kockát úgy, hogy T minden lapjára a kockának pontosan két csúcsa illeszkedjen az *ábra* szerint (a szaggatott vonalak párhuzamosak a tetraéder megfelelő éleivel). Mekkora a kocka térfogata?

(*5 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5301. Tegyük fel, hogy tíz pozitív egész szám reciprokának összege 1. Igazoljuk, hogy mindegyikük kisebb, mint 10^{1000}.

(*6 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

Beküldési határidő: 2023. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (845–847.)

A. 845. Az ABC háromszög beírt köre a BC, CA, AB oldalakat rendre a D, E, F pontokban érinti. Jelölje A' azt a pontot a beírt körön, melyre az $A'BC$ háromszög körülírt köre érinti a beírt kört. Hasonlóan definiáljuk a B' és C' pontot. Igazoljuk, hogy az $A'D$, $B'E$ és $C'F$ egyenesek átmennek egy ponton.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)