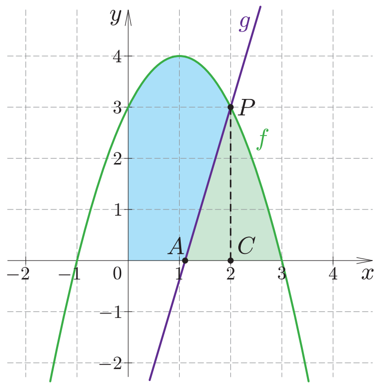
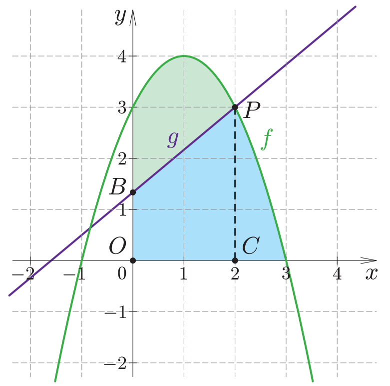
Legyen az egyenes és az x tengely metszéspontja: $A(a;0)$, ekkor a függvény alatti terület $[2;3]$ intervallumra eső darabja és egy derékszögű háromszög területe adja a 3 t.e. nagyságú területet.

$$\int_2^3 (-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}.$$

A derékszögű háromszög területe: $\frac{(2-a)\cdot 3}{2} = 3 - \frac{5}{3}$, amelyből $a = \frac{10}{9}$. A kérdéses egyenes két pontja: $A\left(\frac{10}{9};0\right)$, $P(2;3)$, innen az egyenes egyenlete: $8y - 27x = -30$.





Másik eset: az egyenes úgy vágja két részre a kérdéses területet, hogy a nagyobb rész illeszkedik az x tengelyre. Legyen a keresett egyenes és az y tengely metszéspontja: $B(0;b)$, ekkor egy derékszögű trapéz és az $\frac{5}{3}$ t.e. görbe alatti terület összegeként kapjuk meg a 6 t.e. területet. A trapéz alapjai b és 3 egység hosszúak, a magassága 2 egység, innen $b = \frac{4}{3}$. A keresett egyenes két pontja: $P(2;3)$ és $B\left(0;\frac{4}{3}\right)$.

Az egyenes egyenlete: $6y - 5x = 8$.

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom

Matematika feladatok megoldása

B. 5197. *Jelölje $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmazát, és legyen k adott pozitív egész. Van-e olyan monoton növő $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre*

$$(*) \qquad f\big(f(x)\big) = f(x) + x + k$$

minden $x \in \mathbb{N}$ esetén?

(6 pont)

I. megoldás. Jelölje a feladatbeli feltételt $(*)$. Megmutatjuk, hogy létezik legalább egy ilyen függvény. Legyen $\mathcal{S}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Definiáljuk f-et rekurzív módon. Legyen $f(0) = 1$, és tegyük fel, hogy f definiálva van már $\mathcal{S}_n$-en úgy, hogy $(*)$ teljesül. Ekkor $f(n+1)$-et definiáljuk a következő módon: Ha $n+1 \in f(\mathcal{S}_n)$, és $f(p) = n+1$, akkor

$$f(n+1) \stackrel{\text{def}}{=} f\big(f(p)\big) = f(p) + p + k = n + p + k + 1.$$

Ha $n+1 \notin f(\mathcal{S}_n)$, akkor pedig

$$f(n+1) \stackrel{\text{def}}{=} f(n) + 1.$$

Ezzel a rekurzív definiálással nyilván teljesül a $(*)$ feltétel $\mathbb{N}$-en.

Annyi a dolgunk, hogy megmutassuk, hogy f monoton növekvő. Ennél többet mutatunk meg indukcióval:

$(**)$ a pozitív egészek halmazán teljesül a következő: $f(n+1) = f(n) + 1$, ha $n+1 \notin f(\mathcal{S}_n)$ és $f(n+1) = f(n) + 2$, ha $n+1 \in f(\mathcal{S}_n)$. Ebből az előbbi eset f definíciója alapján biztosan teljesül, csak az utóbbi eset bizonyítandó. Az első néhány számra ez valóban igaz, mert $f(1) = k+1$, $f(2) = k+2$, $\ldots$, $f(k) = 2k$, $f(k+1) = 2k+2$. Tegyük fel, hogy ez igaz $\mathcal{S}_n$-en. Ekkor három eset lehetséges:

A) Ha $n+1 \notin f(\mathcal{S}_n)$, akkor definíció szerint $f(n+1) = f(n) + 1$.

B) Ha $n+1 \in f(\mathcal{S}_n)$ és $f(p) = n+1$, illetve $f(p-1) = n$. Ekkor

$$f(n+1) = n + p + k + 1,$$
$$f(n) = f\big(f(p-1)\big) = f(p-1) + p - 1 + k = n + p + k - 1,$$

ekkor $f(n+1) = f(n) + 2$.

C) Ha $n+1 \in f(\mathcal{S}_n)$ és $f(p) = n+1$, illetve $f(p-1) = n-1$. Ekkor

$$f(n+1) = n + p + k + 1.$$

Mivel f az indukciós feltevés alapján szigorúan monoton nő $\mathcal{S}_n$-en, tudjuk, hogy $n \notin f(\mathcal{S}_{n-1})$, amiből következik, hogy

$$f(n) = f(n-1) + 1 = f\big(f(p-1)\big) + 1 = f(p-1) + p - 1 + 1 + k = n + p + k - 1.$$

Ebből pedig kapjuk, hogy $f(n+1) = f(n) + 2$. Ezzel beláttuk $(**)$-et, vagyis f szigorúan monoton növekvő a pozitív egészek halmazán. Még annyit meg kell mutatni, hogy $f(0) < f(1)$, ami könnyű, mert tudjuk, hogy $f(0) = 1$, $f(1) = k+1$, ahol k egy pozitív egész.

Zömbik Barnabás (Budapest V. Ker. Eötvös József Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Mutatunk tetszőleges k-ra egy jó függvényt.

Legyen F_n az n-edik Fibonacci-szám, ahol $F_1 = F_2 = 1$. Ennek alkalmazásához írjuk át a számokat az úgynevezett „Fibonacci-számrendszer”-be: az $a_2F_2 + a_3F_3 + \ldots + a_nF_n = X$ számot $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_3 a_2}$ módon írjuk le. Itt az $a_2, a_3, \ldots, a_n$

együtthatók egy olyan $0-1$ sorozatot alkotnak, mely nem tartalmaz két szomszédos 1-est. Ismert tétel, hogy minden pozitív egész szám egyértelműen felírható ilyen alakban (F_1-et nem vettük bele, különben $F_1 = F_2 = 1$ miatt ez a felírás nem lenne egyértelmű).

Rendelje hozzá a függvényünk az $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2} - k$ számhoz az $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 0} - k$ számot.

Nézzük, miért jó ez a függvény. Először lássuk be, hogy $f\big(f(x)\big) = f(x) + x + k$.

A Fibonacci-számok rekurziója miatt $a_x F_x + a_x F_{x+1} = a_x F_{x+2}$, ezért

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2} + \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 0} = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 00}.$$

Tehát $x + k + f(x) + k = f\big(f(x)\big) + k$. Mindkét oldalból k-t kivonva éppen a bizonyítandót kapjuk.

Ezután belátjuk, hogy monoton növő a függvény. Az $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2} - k$ szám pozitív, ezért a nála nagyobb $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 0} - k$ is az, vagyis a függvény a pozitív egészeken értelmezett, és értékei is pozitív egészek. Két Fibonacci-számrendszerbeli alak közül először is az a nagyobb, amelyiknek első (első nem 0) jegye „előrébb" van, tehát több számjegyből áll.

Ha ugyanannyi számjegyből állnak, akkor $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} > \overline{b_n b_{n-1} \dots b_2}$ pontosan akkor teljesül, ha $k > i$-re $b_k = a_k$, és $a_i > b_i$ (hasonlóan a 10-es számrendszerben felírt számok rendezéséhez).

Ebből pedig egyenesen következik, hogy $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2} > \overline{b_n b_{n-1} \dots b_2}$ ekvivalens azzal, hogy $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 0} > \overline{b_n b_{n-1} \dots b_2 0}$. Így mindkét oldalból k-t kivonva nem változik, hogy a függvény kisebb számhoz kisebb számot rendel (azaz nem csak monoton, hanem szigorúan monoton is.)

Ezzel beláttuk, hogy van egy ilyen függvény.

Sztranyák Gabriella (Budapest XIII. Ker. Berzsenyi Dániel Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. Mutatunk egy, a feltételnek megfelelő függvényt; ehhez felhasználjuk a **B. 3429.** feladat* ötleteit.

A $f(x)$ függvényt egy valós értékű lineáris függvény egész értékekre kerekítésével fogjuk megkonstruálni.

Legyen $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ a $q^2 = q + 1$ egyenlet pozitív megoldása, továbbá legyen $d = \dfrac{k}{q}$. Bármely pozitív egész x esetén legyen $f(x)$ az az egész szám, amely a $\left[qx + d - \frac{1}{2}, qx + d + \frac{1}{2}\right)$ intervallumba esik.

Mivel $qx + d - \frac{1}{2} > q + 0 - \frac{1}{2} > 0$, az $f(x)$ érték pozitív egész, tehát f valóban egy $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény (és mivel $q > 1$, szigorúan monoton növő).

Az $f(x)$ definíciója szerint

$$(1) \qquad -\frac{1}{2} \leqslant f(x) - qx - d < \frac{1}{2}.$$

* https://www.komal.hu/verseny/2001-01/B.h.shtml#b3429

Ugyanezt x helyett $f(x)$-szel felírva,

$$(2)\qquad -\frac{1}{2} \leqslant f\big(f(x)\big) - qf(x) - d < \frac{1}{2}.$$

Adjuk össze (2)-t és (1) $(q-1)$-szeresét:

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(q-1) \leqslant \Big(f\big(f(x)\big) - qf(x) - d\Big) + (q-1)\big(f(x) - qx - d\big) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(q-1),$$

$$-\frac{q}{2} \leqslant f\big(f(x)\big) - f(x) - (q^2-q)x - qd < \frac{q}{2},$$

$$-\frac{q}{2} \leqslant f\big(f(x)\big) - f(x) - x - k < \frac{q}{2}.$$

Az $f\big(f(x)\big) - f(x) - x - k$ egy egész szám, és mint láttuk, $-\frac{q}{2} \approx -0{,}809$ és $\frac{q}{2} \approx 0{,}809$ közé esik. Ez az egész szám csak a 0 lehet, tehát $f\big(f(x)\big) - f(x) - x - k = 0$, vagyis $f\big(f(x)\big) = f(x) + x + k$.

39 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 15 versenyző: Bencsik Dávid, Bényei Borisz, Berkó Sebestyén, Bognár András Károly, Kalocsai Zoltán, Kercsó-Molnár Anita, Lovas Márton, Mohay Lili Veronika, Nádor Benedek, Németh Márton, Romaniuc Albert-Iulian, Sebestyén József Tas, Sztranyák Gabriella, Varga Boldizsár, Zömbik Barnabás. 5 pontos 2, 4 pontos 3, 3 pontos 6, 2 pontos 1, 0 pontos 11 dolgozat.

B. 5264. *Ketten a következő játékot játsszák. Először Kezdő előírja egy* 0–1 *sorozat tetszőleges számú (akár végtelen sok) elemét úgy, hogy végtelen sok elem még ne legyen előírva. Ezután Második előírja a sorozat legkisebb indexű még nem előírt elemének értékét. Majd ezeket a lépéseket ismételgetik felváltva a végtelenségig. Kezdő nyer, ha a kapott sorozat valahonnan kezdve periodikus, Második nyer, ha nem az. Van-e valakinek nyerő stratégiája (és ha igen, kinek)?*

(*4 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

I. megoldás. Másodiknak van nyerő stratégiája, például a következő. A páratlanadik lépéseiben mindegy, hogy mit ír elő, a párosadikokban pedig, ha az a $2k$-adik lépés és az n-edik helyre kell tennie, akkor megnézi, hogy mi áll az $n-k$-adik helyen, és nem azt írja az n-edik helyre.

Bizonyítás. Indirekten tegyük fel, hogy a $q+1$-edik elemétől kezdve periodikus lesz az így kapott sorozat, a periódus legyen p tagú. Válasszuk meg az a pozitív egészet úgy, hogy $ap > q$ teljesüljön. Mi történik a $2k = 2ap$-edik lépésben? Mivel $n \geqslant 2k$, azért $n-k \geqslant k$, azaz $n - ap \geqslant ap$, így $n - ap > q$. Tehát a sorozat $n - ap = n - k$-adik és n-edik elemének meg kellene egyeznie, ami ellentmondás.

Szakács Domonkos (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Másodiknak van nyerő stratégiája. Ismert, hogy a periodikus 0-1 sorozatok megszámlálhatóan végtelen sokan vannak. Ennek egy gyors indoklása: Minden ilyen sorozat leírható két véges sorozattal, melyek közül az első lesz a periódus előtti rész, a második a periódus. Ezeket a véges sorozatokat egy-egy nemnegatív a és b egész szám 2-es számrendszerben felírt alakjának is tekinthetjük. Minden ilyen a, b párhoz rendeljük hozzá a $2^a \cdot 3^b$ számot. A prímtényezős alak egyértelműsége miatt ez a hozzárendelés injektív, ezáltal a valahonnan kezdve periodikus $0-1$ sorozatok halmaza a pozitív egészek egy részhalmazának felel meg, ami nyilván megszámlálható.

Ha $\underline{s_1}, \underline{s_2}, \ldots$ a valahonnan kezdve periodikus $0-1$ sorozatok egy felsorolása, akkor Második számára egy – elvileg létező – nyerő stratégia az, ha minden i-re az i-edik lépésében előírandó n_i-edik elemet az $\underline{s_i}$ sorozat n_i-edik elemétől különbözőnek adja meg. Ekkor a kapott sorozat biztosan különbözni fog mindegyik $\underline{s_i}$ sorozattól, tehát nem periodikus.

Duchon Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

59 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 23 versenyző: Ali Richárd, Christ Miranda Anna, Chrobák Gergő, Czanik Pál, Domján Olivér, Duchon Márton, Fórizs Emma, Fülöp Csilla, Kovács Benedek Noel, László Anna, Melján Dávid Gergő, Molnár István Ádám, Nagy Leila, Nguyen Kim Dorka, Simon László Bence, Szakács Ábel, Szakács Domonkos, Szeibert Dominik, Tarján Bernát, Varga Boldizsár, Virág Rudolf, Wiener Anna, Zömbik Barnabás. 3 pontot 6, 2 pontos 5, 1 pontos 10, 0 pontos 10 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

Nehezebb feladat megoldása*

A. 827. *Legyen $n > 1$ egész szám. Egy pakliban n-féle színű és n-féle értékű kártya van, minden szín és érték párból pontosan egy, azaz összesen n^2 darab. A paklit megkeverjük, és kiosztjuk n játékos között úgy, hogy mindenki n darab kártyát kapjon. A játékosok azt akarják megcsinálni, hogy egy általuk választott sorrendben leülnek egy kör alakú asztalhoz, és az első játékostól kezdve sorban leraknak egy-egy lapot, míg végül mindenki lerakta az összes lapját úgy, hogy mindig olyan kártyát kell rakni, amely sem színben, sem értékben nem egyezik meg a közvetlenül előtte lerakott kártyával (az elsőnek lerakott kártya bármi lehet). Mely n-ekre lehetséges, hogy úgy lett kiosztva a pakli, hogy a játékosok ezt nem tudják megcsinálni? (A játékosok együttműködnek egymással, és látják egymás lapjait.)*

Javasolta: *Kocsis Anett* (Budapest)

Megoldás. Válasz: Minden n-re lehetséges, hogy úgy lett kiosztva a pakli, hogy ezt nem tudják megcsinálni.

---

* 2021. szeptembertől ismét minden A-jelű feladat megoldása megtalálható honlapunkon, ez az egyik közülük.