b) Adjuk meg a következő állítások logikai értékét. (*2 pont*)

Állítás	**Igaz**	**Hamis**
A logó felső határoló íve illeszkedik a g-jelű függvény grafikonjára.		
Egy negyedfokú polinomfüggvény maximum 3 szélsőértékkel rendelkezik.		
Egy negyedfokú polinomfüggvény inflexiós pontjainak száma legalább kettő.		

c) Mekkora az elkészített logó térfogata, ha vastagsága 2 centiméter? (*9 pont*)

Keszeg Attila Tibor
Veszprém

Megoldásvázlatok a 2023/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő feladatokat:*

a) $|\sin x| > \cos x - 1$; (*5 pont*)

b) $27x^6 + 26x^3 - 1 = 0$. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Nézzük meg a relációs jel két oldalán levő függvények értékkészletét:

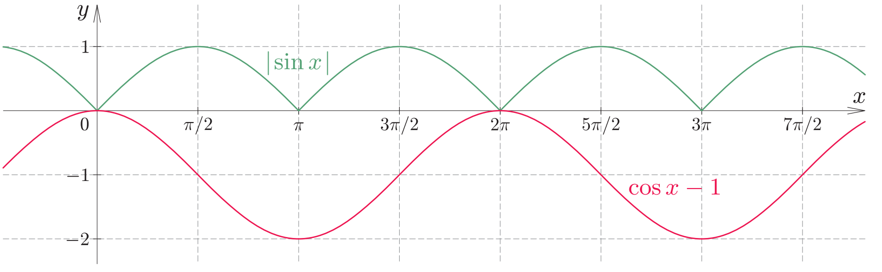
$$0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1, \quad \text{illetve} \quad -2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant 0.$$

Ezekből következik, hogy a feladatban szereplő egyenlőtlenség a

$$|\sin x| = \cos x - 1 = 0$$

eset kivételével mindig teljesül. Ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$



b) Az $y = x^3$ új ismeretlen bevezetésével a

$$27y^2 + 26y - 1 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, ahonnan

$$y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{1}{27},$$

ezért az egyenlet megoldása:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Ezek valóban kielégítik az eredeti egyenletet.

2. *Egy fagráf éleit újabb* 435 *él behúzásával kiegészítettük, így egy egyszerű, összefüggő teljes gráfot kaptunk. Hány pontú ez a gráf?* (*4 pont*)

b) *Igazoljuk a következő állítást: bármely n pontú fagráf annyi újabb él behúzásával tehető egyszerű, összefüggő teljes gráffá, amennyi az $n-1$ pontú teljes gráf éleinek száma.* (*4 pont*)

Leonardo Pisano *(kb. 1170 – kb. 1250?) olasz matematikus Fibonacci néven lett ismert. Több érdekes könyve, feladata maradt fenn. Róla nevezték el a következő sorozatot:* $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$. *A sorozat tetszőleges tagja úgy kapható meg, hogy az előző két tagot összeadjuk. Az első és második tag is* 1.

c) *Egy pozitív tagú mértani sorozat három egymást követő tagjának összege* 700. *Ha az első számhoz* 44*-et, a második számhoz* 33*-at adunk, a harmadik számból pedig* 23*-at kivonunk, a Fibonacci-sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Melyek ezek a számok?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az n pontú fagráf éleinek száma: $n-1$, az n pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$. Ezért felírhatjuk, hogy:

$$n - 1 + 435 = \frac{n(n-1)}{2},$$

majd az összefüggést rendezve:

$$n^2 - 3n - 868 = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldása: 31, tehát 31 pontú a gráf.

b) Az $n-1$ pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, ezért

$$n - 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{2n - 2 + n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

amely éppen az n pontú teljes gráf éleinek száma.

c) A mértani sorozat három egymást követő tagja legyen: a, aq, aq^2, így a Fibonacci-sorozat három egymást követő tagja:

$$a + 44, \quad aq + 33, \quad aq^2 - 23.$$

A fentiekből az

$$a + aq + aq^2 = 700, \tag{1}$$

$$a + 44 + aq + 33 = aq^2 - 23 \tag{2}$$

összefüggéseket kapjuk. A kapott egyenletrendszer egy lehetséges megoldása: összeadjuk a két egyenletet, és rendezzük az összefüggést:

$$a + aq = 300, \quad a = \frac{300}{1+q}, \quad q \neq -1,$$

hiszen a Fibonacci-sorozat tagjai nem lehetnek negatívak. Ezt behelyettesítve az (1) egyenletbe:

$$\frac{300}{1+q}\left(1 + q + q^2\right) = 700.$$

Rendezve:

$$3q^2 - 4q - 4 = 0,$$

ahonnan a pozitív gyök $q = 2$.

Az eredeti sorozat tagjai: 100, 200, 400, a Fibonacci-sorozat tagjai pedig: 144, 233, 377.

3. *A Derelye pékségben jártunk.*

a) A pékség polcán 30 *darab mákos kifli van. Vannak közte olyan darabok, amelyek nem felelnek meg a szigorú minőségi követelményeknek. Ha két kiflit – visszatevés nélkül – kiveszünk, akkor annak a valószínűsége, hogy mind a kettő hibátlan* $\frac{38}{9}$*-szer nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy mindkét kivett darab hibás. Hány nem megfelelő mákos kifli van a polcon?* *(7 pont)*

A túrós batyukat is szigorú ellenőrzés alá vonjuk a pékségben. Lemérve a polcon található darabokat, a következő értékeket kapjuk grammban: 132, 132, 133, 132, 130, 129, 129, 131, 130, 130, 132, 130, 130, 128, 127, 129, 132, 131, 133, 131, 129, 127, 128, 127, 129.

b) Készítsünk az adatokból gyakorisági táblázatot. Igazoljuk, hogy az adatok szórása nem haladja meg a megengedett 2 *értéket.* *(5 pont)*

Megoldás. *a*) Tegyük fel, hogy a pékségben h darab hibás mákos kifli van. Ekkor annak a valószínűsége, hogy a két kivett darab hibátlan: $\frac{\binom{30-h}{2}}{\binom{30}{2}}$, annak a valószínűsége, hogy a kivett két darab hibás: $\frac{\binom{h}{2}}{\binom{30}{2}}$, így:

$$\frac{\binom{30-h}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{38}{9} \cdot \frac{\binom{h}{2}}{\binom{30}{2}},$$

$$\frac{(30-h)!}{2! \cdot (28-h)!} = \frac{38}{9} \cdot \frac{h!}{2! \cdot (h-2)!},$$

$$9(30-h)(29-h) = 38h(h-1),$$

$$h^2 + 17h - 270 = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldása $h = 10$. Tehát 10 hibás volt a mákos kiflik között.

b) Gyakorisági táblázat:

gramm	127	128	129	130	131	132	133
darab	3	2	5	5	3	5	2

Az értékek átlaga: $a = 130{,}04$ gramm, ezt felhasználva a szórásnégyzet:

$$\sigma^2 = \frac{3(a-127)^2 + 2(a-128)^2 + 5(a-129)^2 + 5(a-130)^2}{25} +$$

$$+ \frac{3(a-131)^2 + 5(a-132)^2 + 2(a-133)^2}{25} \approx \frac{80{,}96}{25} \approx 3{,}2384.$$

A szórás ennek négyzetgyöke: $\sigma \approx 1{,}8$, tehát az adatok szórása kisebb, mint 2.

4. *Bármely szabályos sokszögnek van beírt és köréírt köre is.*

a) *Mekkora a szabályos nyolcszögnél a beírható és köré írható kör sugarának aránya?* *(3 pont)*

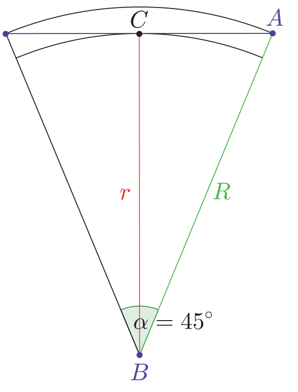
Egy szabályos sokszög beírható körének sugara (r) *és köré írható körének sugara* (R) *között a következő összefüggés áll fenn:*

$$4r^2 + 3R^2 = 4\sqrt{3}rR.$$

b) *Mekkora az* $\frac{r}{R}$ *arány értéke?* *(6 pont)*

c) *Hány oldalú lehet a sokszög?* *(4 pont)*

Megoldás. *a*) Az *ábra* egy szabályos nyolcszög egy részletét mutatja. Az ABC derékszögű háromszögből: $\frac{r}{R} = \cos 22{,}5° \approx 0{,}9239$.



b) *Első megoldás:* Mivel $r \neq 0$ és $R \neq 0$, a

$$4r^2 + 3R^2 = 4\sqrt{3}rR$$

egyenletet eloszthatjuk $r \cdot R$-rel. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$4\frac{r}{R} + 3\frac{R}{r} = 4\sqrt{3}.$$

Az $x = \frac{r}{R}$ új ismeretlen bevezetésével és rendezéssel a

$$4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek egyetlen megoldása $x = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Második megoldás: Adott, hogy

$$4r^2 + 3R^2 - 4\sqrt{3}rR = 0.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldala egy kéttagú kifejezés négyzete:

$$\left(2r - \sqrt{3}R\right)^2 = 0,$$

ez pedig csak akkor teljesül, ha $\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Az $\frac{r}{R} = \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ összefüggés segítségével az *a*) feladathoz hasonlóan a szabályos sokszögbe rajzolható egyenlő szárú, egybevágó háromszögek szárszögét kapjuk meg: $\frac{\alpha}{2} = 30°$, ahonnan a szárak szöge: $\alpha = 60°$, tehát szabályos hatszögről van szó.

II. rész

5. *Adott két, pozitív valós számok halmazán értelmezett függvény:*

$$f(x) = x^{2-\log_2 x} + x \quad \text{és} \quad g(x) = x^{3-\log_2 x} - x.$$

a) *Igazak, vagy hamisak az alábbi állítások?* (*5 pont*)

A) $f(1) = 2$;

B) $2 \cdot f(2) = g(2)$;

C) $g(1) + g(2) + g(4) + g(8) = -5$.

b) *Adjuk meg az összes olyan $a \in D_f \cap D_g$ valós számot, melyre $f(a) - g(a) = 2$.* (*11 pont*)

Megoldás. a) Az állítások igaz, vagy hamis tartalmáról meggyőződhetünk egyszerű behelyettesítéssel:

$$f(1) = 1^{2-\log_2 1} + 1 = 2,$$

$$f(2) = 2^{2-\log_2 2} + 2 = 4,$$

$$g(1) = 1^{3-\log_2 1} - 1 = 0,$$

$$g(2) = 2^{3-\log_2 2} - 2 = 2,$$

$$g(4) = 4^{3-\log_2 4} - 4 = 0,$$

$$g(8) = 8^{3-\log_2 8} - 8 = -7.$$

Ezek szerint
A) igaz,
B) hamis,
C) igaz.

b) Ha létezik $a \in D_f \cap D_g$, amelyre $f(a) - g(a) = 2$, akkor

$$a^{2-\log_2 a} + a - \left(a^{3-\log_2 a} - a\right) = 2,$$

$$a^{2-\log_2 a} - a^{3-\log_2 a} + 2a - 2 = 0,$$

$$a^{2-\log_2 a}(1-a) - 2(1-a) = 0,$$

$$(1-a)\left(a^{2-\log_2 a} - 2\right) = 0,$$

innen $a_1 = 1$, vagy $a^{2-\log_2 a} = 2$. Tudjuk, hogy $a > 0$ a logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt, ezért az egyenlet mindkét oldala pozitív, így, ha $a \neq 1$, vehetjük mindkét oldal a alapú logaritmusát. A logaritmus azonosságait felhasználva:

$$2 - \log_2 a = \log_a 2.$$

Vezessük be az $y = \log_2 a$ új ismeretlent, ekkor $\log_a 2 = \frac{1}{y}$, így

$$2 - y = \frac{1}{y},$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0,$$

$$(y-1)^2 = 0,$$

tehát $\log_2 a = 1$, $a_2 = 2$, így két olyan a érték létezik, amelyre $f(a) - g(a) = 2$.

6. *Egy baráti társaság együtt lottózik. Minden alkalommal a hagyományos ötöslottón töltenek ki szelvényeket (kilencven számból kell ötöt eltalálni). Az egyik héten a nagy nyeremény reményében újra összeültek és megtervezték a kitöltés módszerét. A csoport minden tagja ugyanannyi szelvényt töltött ki, de ügyeltek arra, hogy minden szelvény különbözőképpen legyen kitöltve.*

a) Hányan voltak a csoportban, ha ügyes szervezéssel mindenki 25 különböző szelvényt töltött ki és így pontosan annyi különbözően kitöltött szelvényük lett, amennyi egy sorsolásnál a különböző négytalálatos szelvények lehetséges száma? (*6 pont*)

b) Az azon a héten kihúzott öt szám (x,y,z,u,v) *értékére a következő összefüggések írhatók fel:*

$$x+y+z=49,\qquad y+z+u=101,\qquad z+u+v=173,$$
$$u+v+x=147,\qquad v+x+y=109.$$

Mik voltak a nyerőszámok? (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Egy húzásnál a különböző négytalálatos szelvények száma:

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}=5\cdot 85=25\cdot 17,$$

azaz 17-en voltak a csoportban.

b) Egy lehetséges megoldás:

$$x+y+z=49, \tag{1}$$
$$y+z+u=101, \tag{2}$$
$$z+u+v=173, \tag{3}$$
$$u+v+x=147, \tag{4}$$
$$v+x+y=109. \tag{5}$$

Adjuk össze mind az öt egyenletet:

$$3(x+y+z+u+v)=579,$$
$$x+y+z+u+v=193. \tag{6}$$

Az (1)-ből $x+y+z=49$, (4)-ből: $u+v=147-x$, ezért:

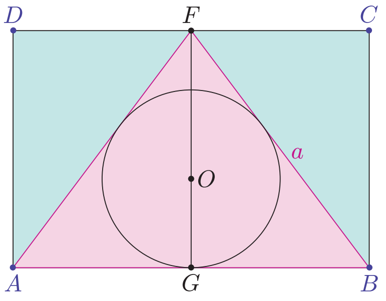
$$49+147-x=193,\quad x=3,$$

ezt és a (2) összefüggést visszahelyettesítve (6)-ba:

$$3+101+v=193,\quad v=89.$$

Mivel $x=3$, $v=89$, az (5) összefüggésből: $y=17$, az (1)-ből: $z=29$, a (4)-ből: $u=55$.

Az ötöslottó nyerőszámai azon a héten a következők voltak: 3, 17, 29, 55, 89.



7. *Gábor egy különleges kis dartstáblát készít kisfiának: egy téglalapban egyenlő szárú háromszög és annak beírt köre látható az ábra szerint. A téglalap és a háromszög közös oldala 6 deciméter, a háromszögbe írt kör sugara 15 centiméter.*

a) Mekkora a háromszög területének és kerületének pontos értéke? *(10 pont)*

Feltételezzük, hogy a játékkal játszó kisfiú minden lövése egyenlő eséllyel éri el a téglalap alakú céltábla bármely pontját.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a körbe talál a lövés? *(3 pont)*

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a háromszög körön kívüli pontját találja el a lövés? *(3 pont)*

Megoldás. *a*) Legyen az egyenlő szárú háromszög szára: a, ekkor az ABF háromszög t területét kétféleképpen felírva:

$$t = 15 \cdot s = \frac{60 \cdot m}{2},$$

ahol s a háromszög kerületének fele:

$$\frac{2a + 60}{2} = a + 30,$$

m pedig a háromszög magassága: $m = \sqrt{a^2 - 30^2}$. Az előzőek alapján:

$$15(a + 30) = 30\sqrt{a^2 - 30^2},$$

$$(a + 30)^2 = 4(a^2 - 900),$$

$$a^2 - 20a - 1500 = 0,$$

amelynek a pozitív gyöke: $a = 50$ cm, így $m = 40$ cm.

A háromszög területe 1200 négyzetcentiméter, a kerülete 160 centiméter.

b) Mivel a kisfiú minden lövése egyenlő eséllyel éri el a téglalap alakú céltábla bármely pontját, alkalmazhatjuk a geometriai valószínűség összefüggését:

$$p(\text{kör}) = \frac{\text{kör területe}}{\text{téglalap területe}} = \frac{15^2\pi}{40 \cdot 60} \approx 0{,}2944,$$

azaz 29,4% valószínűséggel találja el a céltábla kör alakú részét.

c) $$p(\text{háromszög körön kívül}) = \frac{\text{háromszög területe} - \text{kör területe}}{\text{téglalap területe}} =$$

$$= \frac{1200 - 225\pi}{2400} \approx 0{,}2056,$$

tehát 20,56% valószínűséggel találja el a céltábla háromszögének körön kívüli részét.

8. *Adott az $n^4 + 64 \cdot m^4$ kifejezés, ahol n és m pozitív egész számok.*

a) Igazoljuk, hogy ha $n = m = 2$, a kifejezés osztható 13-mal. (*2 pont*)

b) Adjunk meg olyan n és m értéket, amelyek relatív prímek és amelyekre a kifejezés értéke osztható 5-tel. (*3 pont*)

c) Igazoljuk, hogy bármely n és m pozitív egész esetén a kifejezés értéke nem prímszám. (*11 pont*)

Megoldás. *a*) Ha $n = m = 2$, a kifejezés értéke $2^4 + 64 \cdot 2^4 = 2^4 \cdot 65 = 16 \cdot 5 \cdot 13$, azaz osztható 13-mal.

b) Ha $n = 2$, $m = 3$, akkor $(2; 3) = 1$, ekkor a kifejezés a következő: $2^4 + 64 \cdot 3^4$. Az összeg első tagja 6-ra, a második tagja 4-re végződik, ezért az összeg osztható 5-tel.

c) Alakítsuk szorzattá a kifejezést:

$$n^4 + 64m^4 = (n^2 + 8m^2)^2 - 16n^2m^2 = (n^2 + 8m^2 - 4nm)(n^2 + 8m^2 + 4nm).$$

A szorzat egyik tényezője sem lehet 1, hiszen $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, és

$$n^2 + 8m^2 - 4nm = (n - 2m)^2 + 4m^2,$$

vagyis a kifejezés felbontható két, 1-nél nagyobb, pozitív egész szám szorzatára, tehát nem lehet prímszám.

9. *Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ függvény.*

a) Határozzuk meg a függvény és a koordinátatengelyek által alkotott, első negyedben levő síkidom területét. (*6 pont*)

b) Egy egyenes áthalad az előbbi f függvény $P(2; 3)$ koordinátájú pontján. Mi lehet ennek az egyenesnek az egyenlete, ha tudjuk, hogy az első negyedben létrejött síkidomot úgy vágja két részre, hogy az egyik rész területe kétszer akkora, mint a másik rész területe? (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Határozzuk meg a függvény és a koordinátatengelyek által alkotott, első negyedbeli síkidom területét. A függvénygrafikon koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjai: $(0; 3)$ és $(3; 0)$, ezért a síkidom területe:

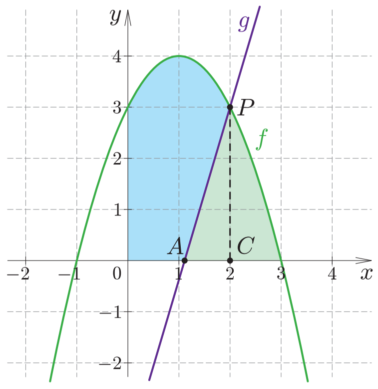
$$\int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_0^3 = 9 \text{ területegység.}$$

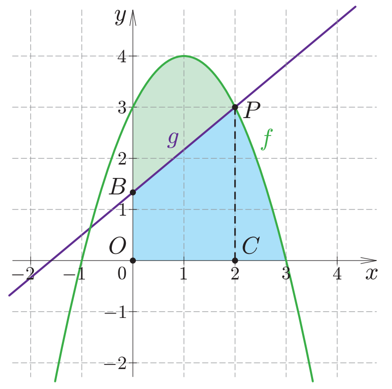
b) Először nézzük azt az esetet, amikor $2 : 1$ arányban osztja a területet az egyenes. Ebben az esetben egy 6 területegység és egy 3 területegység méretű rész keletkezik, az x tengely, a függvény egy darabja és a keresendő egyenes zárja közre a kisebb területet. Ekkor a $[0; 3]$ intervallum egy pontjában metszi a kívánt egyenes az x tengelyt. Ha az origóban metszené, akkor már 3 területegységnél nagyobb területű síkidom keletkezne, mint azt könnyen ellenőrizni tudjuk.

Legyen az egyenes és az x tengely metszéspontja: $A(a;0)$, ekkor a függvény alatti terület $[2;3]$ intervallumra eső darabja és egy derékszögű háromszög területe adja a 3 t.e. nagyságú területet.

$$\int_2^3 (-x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3}.$$

A derékszögű háromszög területe: $\frac{(2-a)\cdot 3}{2} = 3-\frac{5}{3}$, amelyből $a=\frac{10}{9}$. A kérdéses egyenes két pontja: $A\left(\frac{10}{9};0\right)$, $P(2;3)$, innen az egyenes egyenlete: $8y-27x=-30$.





Másik eset: az egyenes úgy vágja két részre a kérdéses területet, hogy a nagyobb rész illeszkedik az x tengelyre. Legyen a keresett egyenes és az y tengely metszéspontja: $B(0;b)$, ekkor egy derékszögű trapéz és az $\frac{5}{3}$ t.e. görbe alatti terület összegeként kapjuk meg a 6 t.e. területet. A trapéz alapjai b és 3 egység hosszúak, a magassága 2 egység, innen $b=\frac{4}{3}$. A keresett egyenes két pontja: $P(2;3)$ és $B\left(0;\frac{4}{3}\right)$.

Az egyenes egyenlete: $6y-5x=8$.

Tatár Zsuzsanna Mária
Esztergom

Matematika feladatok megoldása

B. 5197. *Jelölje $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmazát, és legyen k adott pozitív egész. Van-e olyan monoton növő $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, amelyre*

$$(*)\qquad f\big(f(x)\big)=f(x)+x+k$$

minden $x\in\mathbb{N}$ esetén?

(6 pont)